Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103626**

ID профиля: **854416**

Вариант 23

Чистовик

№1

$a_1+a_3+a_4+a_5+a_6=S$

d - шаг прогрессии, $d>0$

$a_1, d \in \mathbb{Z}$

$a_{10}\cdot a_{16} > S+39$

$(a_1+9d)(a_1+15d) > (2a_1+5d)\cdot 3+30$

$a_1^2+24a_1d+135d^2 > 6a_1+15d+39$

$a_{11}\cdot a_{15} < S+55$

$(a_1+10d)(a_1+14d) < (2a_1+5d)\cdot 3+55$

$$\begin{cases} a_1^2+24a_1d+140d^2 < 6a_1+15d+55 \\ a_1^2+24a_1d+135d^2 > 6a_1+15d+39 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} a_1^2+24a_1d+140d^2 \le 6a_1+15d+54 \\ a_1^2+24a_1d+135d^2 \ge 6a_1+15d+40 \end{cases}$$

$5d^2 \le 14$

$d^2 \le \frac{14}{5}$

$d \le \sqrt{\frac{14}{5}} < \sqrt{\frac{20}{5}} = 2$

$d=1$

$$\begin{cases} a_1^2+24a_1+140 \le 6a_1+15+40 \\ a_1^2+24a_1+135 \ge 6a_1+15+40 \end{cases}$$

1

$$\begin{cases} a_1^2+18a_1+71 \le 0 \\ a_1^2+18a_1+80 \ge 0 \end{cases}$$

Чистовик

№1 (продолжение)

$a_1^2 + 18a_1 + 71 \le 0$

$\frac{D}{4} = 81 - 71 = 10$

$a_1 = -9 \pm \sqrt{10}$

$a_1 \in [-9 - \sqrt{10}; -9 + \sqrt{10}]$

Учитываем, что $a_1 \in \mathbb{Z}$:

$a_1 \in \{-12; -11; \dots; -7; -6\}$

$a_1^2 + 18a_1 + 80 \geq 0$

$a_1 = -9 \pm \sqrt{1}$

$a_1 \in (-\infty; -10] \cup [-8; +\infty)$

Итого:

$a_1 \in \{-12; -11; -10; -8; -7; -6\}$

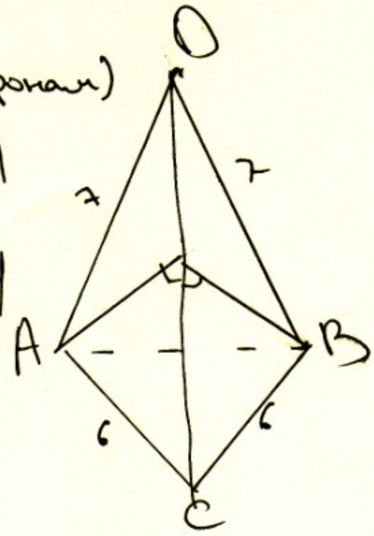
~~Ответ: $a_1 \in \{-12; -10; -8; -7; -6; -11\}$~~

Ответ: $a_1 \in \{-12; -11; -10; -8; -7; -6\}$

Чистовик

-2

$\triangle ACD = \triangle BCD$ (по трем сторонам)



$\Rightarrow$ Высоты из вершин A и B этих треугольников касаются в одну точку H

$\left.\begin{array}{l} AH \perp CD \\ BH \perp CD \end{array}\right| \Rightarrow (AHB) \perp CD$

$CD \parallel$ оси цилиндра $\Big| \Rightarrow$ весь отрезок CD лежит на боковой поверхности цилиндра $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow H \in$ боковой поверхности

$CD \perp$ основанию цилиндра $\Big| \Rightarrow (AHB) \parallel$ основаниям $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Радиус цилиндра равен радиусу описанной окружности $\triangle AHB$

$\frac{AB}{\sin\angle AHB} = 2R$; $R = \frac{AB}{2\sin\angle AHB}$ или при $\sin\angle AHB = 1$

$\Rightarrow \angle AHB = 90^\circ \Big| \Rightarrow AH = HB = \frac{4}{\sqrt{2}}$

$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{36-8} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$HD = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$

$CD = 2\sqrt{7} + \sqrt{41}$

Ответ: $2\sqrt{7} + \sqrt{41}$

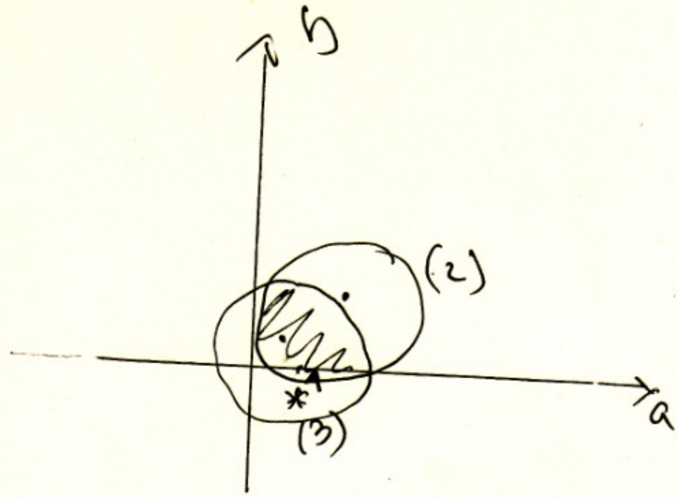
3

21103626 (U854416 M1302238)

Чистовик

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le \min(-4a+4b,8)\end{cases}$$

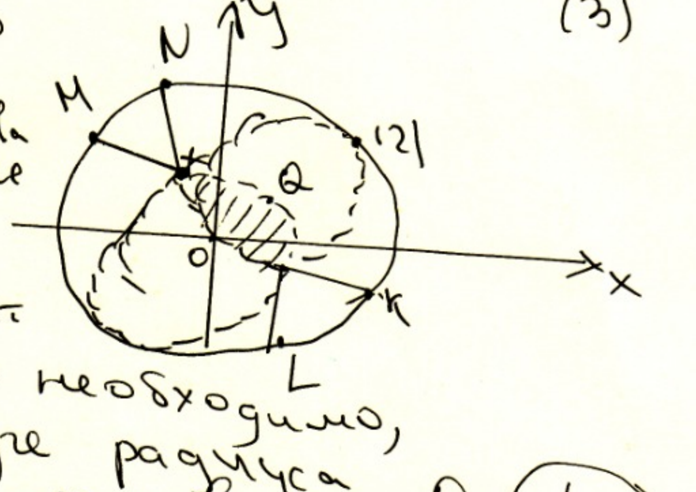


$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le -4a+4b\\ a^2+b^2\le 8\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8 & (1)\\ (a+2)^2+(b-2)^2\le 8 & (2)\\ a^2+b^2\le 8 & (3)\end{cases}$$

$(a;b)$ – центр круга (1). На первом рисунке множество всех ~~...~~ $(a;b)$ удовл. (2) и (3)

Чтобы $(x;y)$ удвол. усл-ю расстояние от $(x;y)$ до ближайшей точки множества изображен. на первом рисунке должно быть $\le 2\sqrt{2}$



Если точка $Г(x;y)$ лежит внутри угла XOY, то необходимо, чтобы $Г$ лежало в круге радиуса $(2\sqrt{2}+2\sqrt{2})=4\sqrt{2}$ с центром в точке O

Аналогично с углом XOY

Иначе должно лежать либо в круге с радиусом $2\sqrt{2}$ и центром в точке X либо в круге с радиусом $2\sqrt{2}$ и центром в точке Y. Итоговая область изображена на втором рисунке $(KLMN)$

4

Чистовик

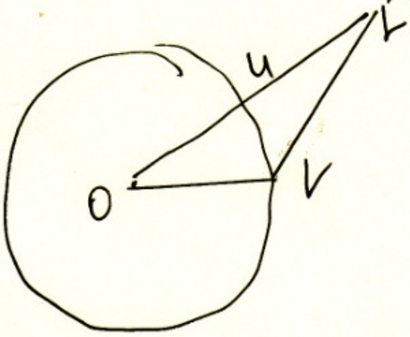
№3 (продолжение)

Вышенаписанное следует из следующего факта:

Лемма. Пусть есть круг с центром O и радиусом R и точка F, не лежащая внутри него. Тогда точка круга ближайшая к F лежит на отрезке FO

Док-во

По нер-ву треугольника



$FO < FV + VO$

$FU + UO < FV + VO$

$FU + R < FV + R$

$FU < FV$

Найдем площадь области $XO = QO = XQ = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle XQO = 60°$

Аналогич. $\angle YQO = 60°$

$\angle MQL = 120°$ $\quad S_{\text{сект } MQL} = \pi \cdot MQ^2 \cdot \frac{120}{360} = \frac{32\pi}{3}$

$S_{\text{сект } NOK} = \frac{32\pi}{3}$ (аналогично)

$S_{\text{сект } MXN} = \pi \cdot MX^2 \cdot \frac{60}{360} = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$

$S_{\text{сект } LYK} = \frac{4\pi}{3}$ (Аналогично)

При сложении площадь ромба OXQY учтется дважды: $S_{OXQY} = XQ^2 \cdot \sin 60° = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

$S_{\text{области}} = \frac{32\pi}{3} \cdot 2 + \frac{4\pi}{3} \cdot 2 - 4\sqrt{3} = \frac{64\pi}{3} + \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3} = 24\pi - 4\sqrt{3}$ 5

Ответ: $24\pi - 4\sqrt{3}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103626**

ID профиля: **854416**

Вариант 23

Чистовик

№1 $НОД(a;b;c)=22$

$НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19}$

В числах a, b, c в качестве простых делителей входят только 2 и 11 т.к. $НОК(a;b;c) \vdots a,b,c$

$a=2^{x_1}\cdot 11^{y_1}$ $\quad \max(x_1, x_2, x_3)=16$ (1)

$b=2^{x_2}\cdot 11^{y_2}$ $\quad \min(x_1, x_2, x_3)=1$ (2)

$c=2^{x_3}\cdot 11^{y_3}$ $\quad \max(y_1;y_2;y_3)=19$ (3)

$\min(y_1;y_2;y_3)=1$ (4)

Количество точек (x_1, x_2, x_3)

$(1;1;16)$ - 3шт

$(1;16;16)$ - 3шт

$(1;f;16)$ - 6шт, $f\in[2;15]$

Итого $3+3+6\cdot 14=90$

Кол-во троек $(y_1;y_2;y_3)$

$(1;1;19)$ - 3шт.

$(1;19;19)$ - 3шт.

$(1;f;19)$ - 6шт. $f\in[2;18]$

Итого $3+3+6\cdot 17=6\cdot 18=108$

Всего троек чисел $90\cdot 108=9720$

Ответ: 9720

1

21103626 (U854416 M1302239)

Чистовик

№5 $a = \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$

$b = \log_{(x+4)^2}(x+34)$

$c = \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$a = 2\log_{x+34}(2x+23)$

$b = \frac{1}{2}\log_{-x-4}(x+34)$

$c = 2\log_{2x+23}(-x-4)$

$c = \frac{2}{ab}$

1) $a = b$ $\quad \frac{2}{ab} - a = 1$; $\quad \frac{2}{a^2} - a = 1$;

$a^3 + a^2 - 2 = 0$

$(a-1)(a^2 + 2a + 2) = 0$

$a = 1$

2) $a = \frac{2}{ab}$ $\quad$; $b - \frac{2}{ab} = 1$; $b = \frac{2}{a^2}$

$\frac{2}{a^2} - \frac{2}{a \cdot \frac{2}{a^2}} = 1$

$\frac{2}{a^2} - a = 1$ - уже было

$a = 1$

3) $b = \frac{1}{ab}$ $\quad$; $a - \frac{2}{ab} = 1$

$a = \frac{2}{b^2}$ $\quad b = 1$

2

1) $a = 1$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = 1$

$\sqrt{x+34} = 2x+23$

$x+34 = 4x^2 + 92x + 524$

Чистовик

~№5 (продолжение)

$4x^2+91x+495=0$

$D=91^2-16\cdot495=361=19^2$

$x_1=\frac{-91+19}{8}=-9$

$x_2=\frac{-91-19}{8}=-\frac{55}{4}$ - не удовл.

2) $B=1$

$(x+4)^2=x+34$

$x^2+8x+16=x+34$

$x^2+7x-18=0$

$D=49+72=121$

$x_1=\frac{-7+11}{2}=2$ - не удовл ОДЗ

$x_2=\frac{-7-11}{2}=-9$

Ответ: -9

3

Чистовик

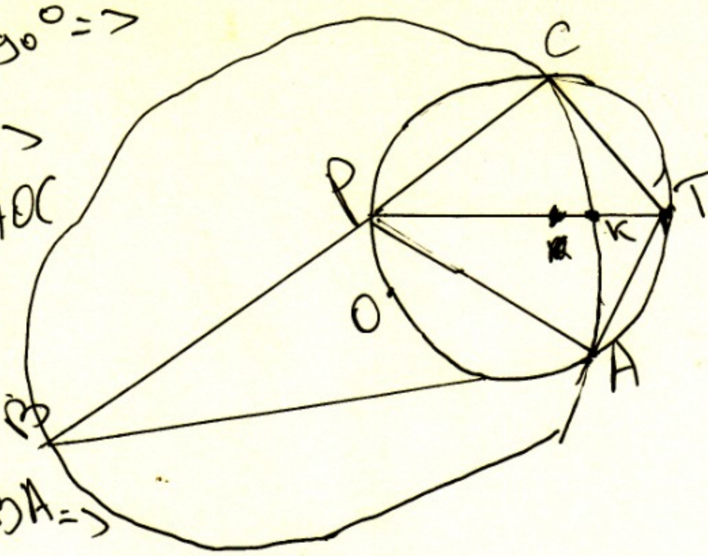
№6

а) $\angle OCT = \angle OAT = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow OCTA$ - вписан $\Rightarrow$

$\Rightarrow T \in$ опис. окр $\triangle AOC$

$CT = TA$ (по опред касат)



$\angle CPK = \angle COT$ (как опирающиеся на одну дугу) $= \frac{1}{2}\angle COA = \angle CBA \Rightarrow$

$\Rightarrow PK \parallel AB$

$\triangle CPK \sim \triangle CBA$

($PK \parallel AB \Rightarrow \angle CPK = \angle CBA$, $\angle C$ - общий)

$$\frac{CK}{KA} = \frac{S_{\triangle CPK}}{S_{\triangle CPK} + S_{\triangle PKA}}$$

$$\frac{S_{\triangle CPK}}{S_{\triangle ABC}} = k^2 = \left(\frac{CK}{CA}\right)^2$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CPK} \cdot \left(\frac{CA}{CK}\right)^2 = S_{\triangle CPK} \cdot \left(\frac{S_{\triangle CPK} + S_{\triangle PKA}}{S_{\triangle CPK}}\right)^2 =$$

$$= 13 \cdot \left(\frac{13+15}{13}\right)^2 = \frac{28 \cdot 28}{13} = \frac{784}{13} = 60\frac{4}{13}$$

Ответ: а) $60\frac{4}{13}$

4

21103626 (U854416 M1302239)