Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103586**

ID профиля: **252366**

Вариант 23

Математика 11 класс.
Черновик.

лист 1 из 3

① $S = \frac{a_1+a_6}{2}\cdot 6 = (a_1+a_1+5d)\cdot 3 = 6a_1+15d$

$a_{10}\cdot a_{16} = (a_1+9d)(a_1+15d) = a_1^2+24a_1d+135d^2$

$a_{11}\cdot a_{15} = (a_1+10d)(a_1+14d) = a_1^2+24a_1d+140d^2$

$\begin{cases} a_{10}\cdot a_{16} > S+39 \\ a_{11}\cdot a_{15} < S+55 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a_1^2+24a_1d+135d^2 > 6a_1+15d+39 \\ a_1^2+24a_1d+140d^2 < 6a_1+15d+55 \end{cases}$

$-5d^2 > -16$

$5d^2 < 16$

$d = 1$

При $d=1$

$\begin{cases} a_1^2+24a_1+135-6a_1-15-39>0 \\ a_1^2+24a_1+140-6a_1-15-55<0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a_1^2+18a_1+81>0 \Rightarrow a\in R\setminus\{-9\} \\ a_1^2+18a_1+70<0 \end{cases}$

$\Rightarrow a_1 \in (-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11})$

Ответ: $a_1 = -12, -11, -10, -8, -7, -6$.

$a_{11} \cdot a_{15} = S + 55$

$-5d^2 > -16$

$-12, 16$

$n \setminus \{-9\}$

$[-9-\sqrt{11}; -$

$S = \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = (a_1 + a_6) \cdot 3 = (a_1 + a_1 + 5d) \cdot 3 = 6a_1 + 15d$

$a_{10} \cdot a_{16} > 6a_1 + 15d + 39$

$a_{11} \cdot a_{15} < S + 55$

$(a_1 + 9d)(a_1 + 15d) > 6a_1 + 15d + 39$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 6a_1 + 15d + 55$

$a_1^2 + 24a_1 d + 135d^2 > 6a_1 + 15d + 39$

$a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2 < 6a_1 + 15d + 55$

$a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2 < 6a_1 + 15d + 55$

$-5d^2 > -16 \quad | \cdot (-1)$

$5d^2 < 16$

$d = 1$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 15 + 39 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 15 + 55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \quad (a_1+9)^2 > 0 \\ a_1^2 + 18a_1 + 80 < 0 \quad a \in [-A; -7) \end{cases}$$

$55 - 39 = 16$

$39 + 15 = 54$

$135 - 54 = 81$

$18 \cdot 18 = 324$

$324 - 280 = 44$

$324 - 280 = 44$

$D = 324 - 320 = 4$

$a_1 = \frac{-18 - 4}{2} = \frac{-22}{2} = -11$

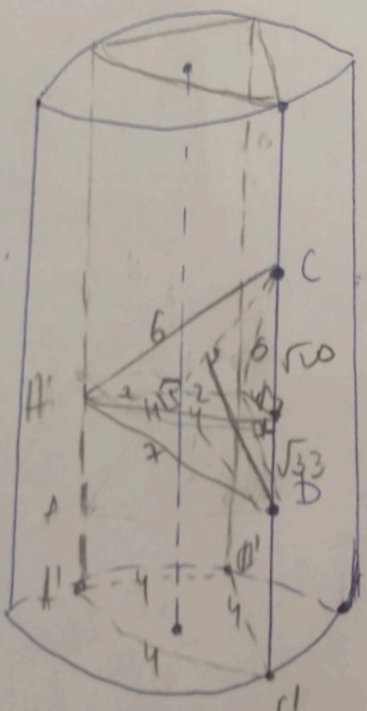
$a_1 = \frac{-18 + 4}{2} = \frac{-14}{2} = -7$

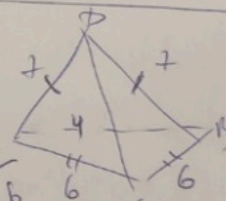
~~$a_1 = -9$~~

$D = 81 - 80 = 1$

$a_1 = -9 + 1$

ответ: $a_1 \in$ ~~1~~ $a_1 = -10, -8$





$24 \cdot 24 = 576$

$(24d)^2 - 4 \cdot 140d^2$

$576d^2 -$

$140 \cdot 4 = 560$

$16 = 36 + 36 -$

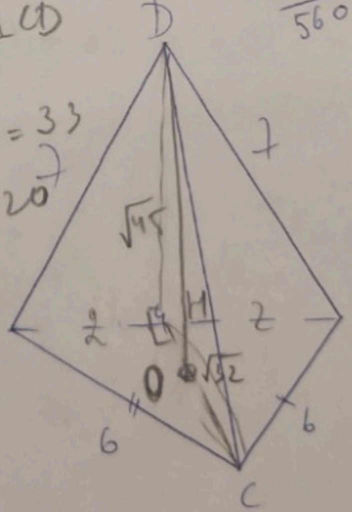
$16 =$

$AB \perp CD$

$A_1B_1 \perp CD$

$49 - 16 = 33$

$36 - 16 = 20$



$AD \perp$ пл CDH

$AB \perp CD$

Пусть высота падает в точку O $\triangle ABC$.

$DO \perp AB$
$AB \perp CD$ $\Rightarrow AB \perp (CDO)$,

но $AB \perp (CDH) \Rightarrow$

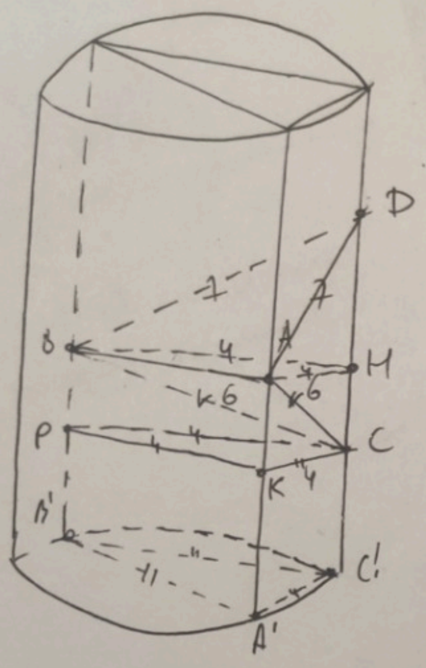
$CDH \parallel CDO$, против.

$A'B'C'$ - р/с

21103586 (U252366 M1303908)

Чистовик. лист 2 из 3

(2)



1) Радиус цилиндра будет наименьшим, если проекции точек B, A, C на основание цилиндра будут образовывать равносторонний треугольник.

2) $KC \parallel A'C'$, $PK \parallel B'A'$ $\Rightarrow$

$\triangle BPC = \triangle KCA$.

3) $BP = AK$, $BP \parallel AK \Rightarrow BPKA$ - пар-м $\Rightarrow$ $AB \parallel PK$, $PK = 4 = BA$.

$KC = 4$, $PC = 4$

4) $HC = \sqrt{36-16} = \sqrt{20}$

$DH = \sqrt{49-16} = \sqrt{33}$

Ответ: $\sqrt{20} + \sqrt{33}$

$$a_1^2+18a_1+81>0$$
$$\begin{cases} a_1^2+18a_1+81>0 \\ a_1^2+18a_1+70<0 \end{cases} \Rightarrow a_1 \in [-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11}]$$

Черновик.

$S = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$ $\quad a_1 \in Z$

$a_{10}\cdot a_6 > S+39$ $\quad S = \frac{a_1+a_6}{2}\cdot 6$

$a_{11}\cdot a_{15} < S+55$ $\quad S = 3(a_1+a_6)$

$S = 3(a_1+a_1+5d)$

$a_{10}\cdot a_6 = (a_1+9d)(a_1+5d)$ $\quad S = 3(2a_1+5d)$

$a_{11}\cdot a_{15} = (a_1+10d)(a_1+14d)$

$$\begin{cases} a_1^2+14a_1d+45d^2 > 6a_1+15d_1+39 \\ a_1^2+24a_1d+140d^2 < 6a_1+15d_1+55 \end{cases}$$
$$a_1^2+14a_1d+45d^2 > 6a_1+15d_1+39$$

$10a_1d - 95d^2 < 16$ $\quad d \in [1;4]$ $\quad$ ~~$d\in[1;5]$~~

$d(10a_1 - 95) < 16$ $\quad a_1 = 10$ $\quad$ ~~$a_1=5 \; d=1$~~

$a_1 = 11 \; d=1$

110 − 95 = 15 $\quad$ 121 − 105 = 16 $\quad$ 55 + 66 = 121 $\quad$ 120 − 15

$a_1 = 5.$

~~$S = 3(10+5d)$~~

$$\begin{cases} \cancel{25+90d+45d^2} > 30+15d_1+39 \\ 25+24\cdot 5d+14d^2 < 30+15d+55 \end{cases}$$ $\quad$ ~~$45d^2+75d_1-44>0$~~ $\quad$ ~~$14d^2+105d-60<0$~~

$a_1 = 11$

$$\begin{cases} 121+154d+45d^2 > 66+15d_1+39 \\ 121+264d+140d^2 < 66+15d+55 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 45d^2+139d+16>0 \\ 140d^2+249d<0 \end{cases}$$

9

$81-70=11$

$a_1 = -9+\sqrt{11}$

$a_1 = -9-\sqrt{11}$

21103586 (U252366 M1303908)

③ Чистовик. лист 3 из 3.

Найдем пары a, b, удовлетворяющих второму ур-нию системы.

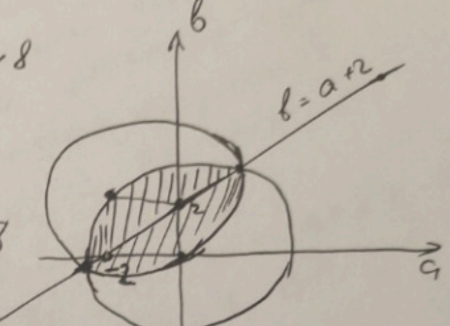
$$a^2+b^2 \le \min(-4a+4b,\ 8).$$

1) $\begin{cases} -4a+4b \le 8 \\ a^2+b^2 \le -4a+4b \quad |+8 \end{cases}$

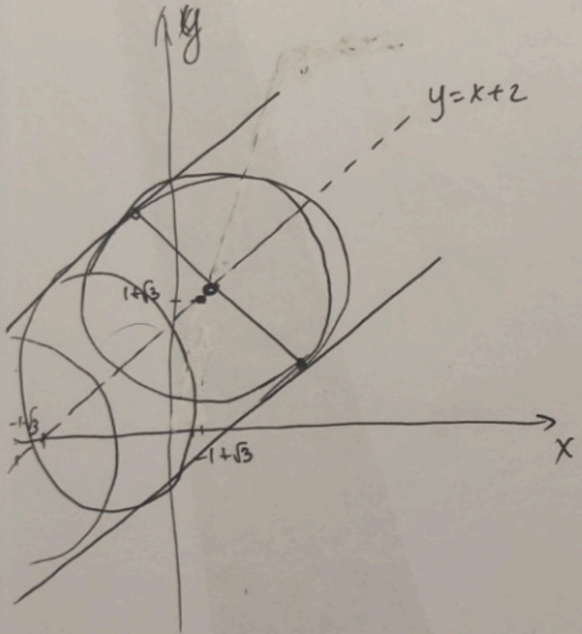
$\begin{cases} b \le 2 + a \\ (a+2)^2+(b-2)^2 \le 8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -4a+4b \ge 8 \\ a^2+b^2 \le 8 \end{cases}$

$\begin{cases} b \ge a+2 \\ a^2+b^2 \le 8 \end{cases}$



При всех возможных парах (a,b) первое ур-ние системы будет задавать фигуру, состоящую из кругов, радиус которых $2\sqrt{2}$.



$-5d^2 > -16$

$5d^2 < 16$

$d = 1$

$\Rightarrow a \in R \setminus \{-9\}$

$-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11})$

$$\begin{cases} a^2+b^2=8 \\ b=a+2 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+b^2=8 \end{cases}$$

$a^2+a^2+4a+4=8$

$2a^2+4a-4=0$

$a^2+2a-2=0$

$D = 1+2=3$

$a_1 = -1+\sqrt{3}$

$a_2 = -1-\sqrt{3}$

$1-2\sqrt{3}+3+b^2=8$

$b^2 = 4+2\sqrt{3}$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b,\ 8) \end{cases}$$

Найти $(x;y)$, которые могут быть решениями хотя бы при каких-нибудь (a, b)

1) $-4a+4b \ge 8 \mid :(-4)$

$a-b \le -2$

$$\begin{cases} a \le b-2 \\ a^2+b^2 \le 8 \end{cases}$$

$b \ge a+2$

$a \in [-8; -2]$

$b \in [2; 8]$

2) $-4a+4b \le 8$

$4b \le 4a+8$

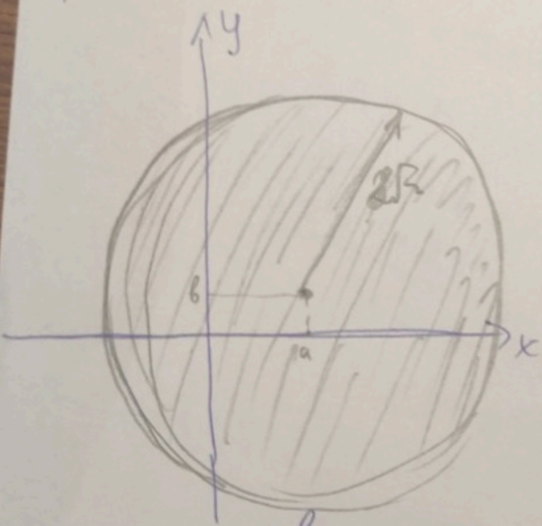
$b \le a+2$

$a^2+b^2 \le -4a+4b$

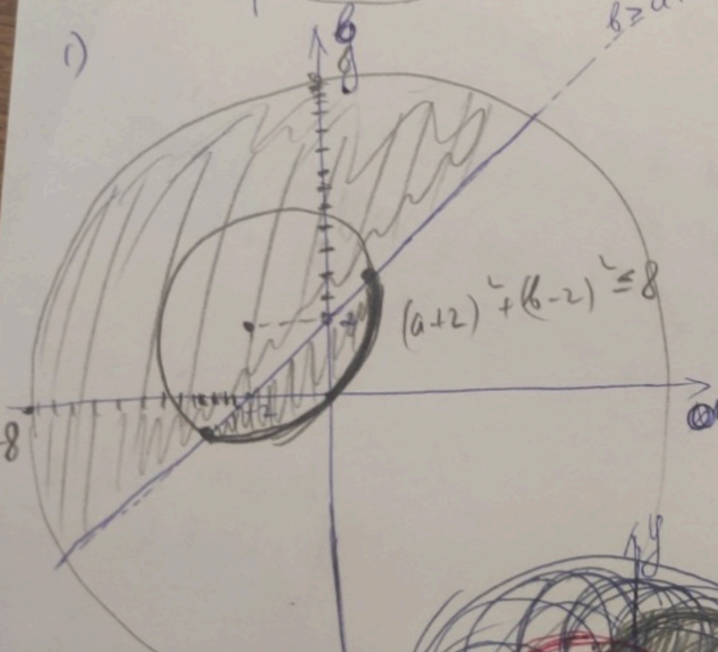
$a^2+4a+b^2-4b \le 0 \mid +8$

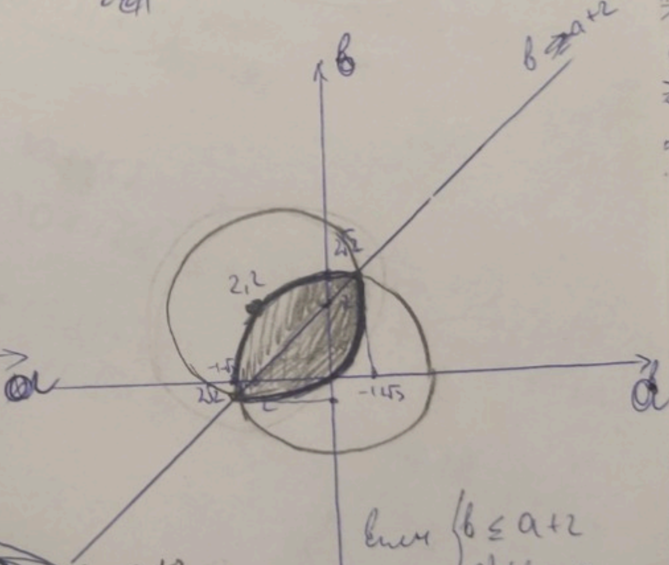
$a^2+4a+4+b^2-4b+4 \le 8$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$

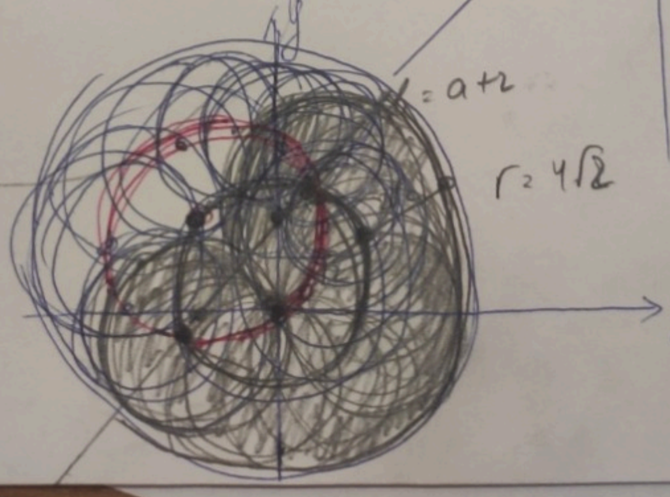


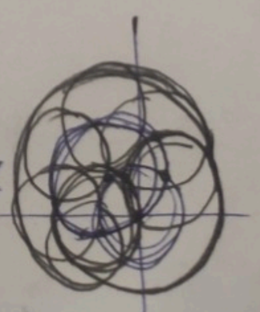
1)





если $\begin{cases} b \le a+2 \\ a^2+b^2=8 \end{cases}$





55
+66
121

При d =

$\begin{cases} a_1^2+24 \\ a_1^2+2 \end{cases}$

Черновик.

$S = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 \quad a_1 d \in \mathbb{Z}$

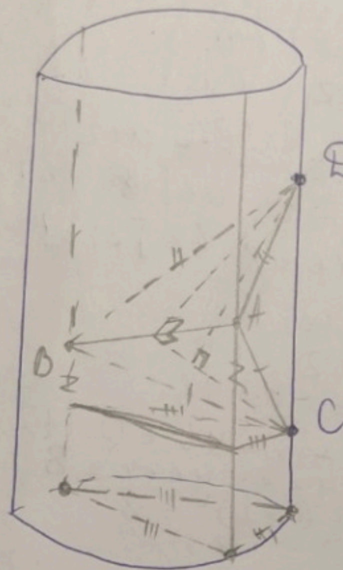
$(a_1+9d)(a_1+15d) > 6a_1+15d+35$

$\underbrace{(a_1+10d)(a_1+14d)} < \underbrace{6a_1+15d+55}$

$<0 \qquad >0$

$a_1 - \quad <0 \qquad <0$

$>0 \qquad >0$



$-44>0$

$-60<$

$d+16>0$

$3d<0$

$\begin{cases} b = a+2 & b_1=\sqrt{3}+1 \\ a^2+b^2=8 & b_2=1-\sqrt{3} \end{cases}$

$a^2+a^2+4a+4-8=0$

$2a^2+4a-4=0$

$a^2+2a-2=0$

$D=4+8=12$

$a_1=\dfrac{-2+2\sqrt{3}}{2}=-1+\sqrt{3}$

$a_2=-1-\sqrt{3}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103586**

ID профиля: **252366**

Вариант 23

(4). $НОД(a, b, c) = 22$

$НОК(a, b, c) = 2^{16} \cdot 11^{19}$

$\Downarrow$

Все числа делятся на 22, и число $2^{16} \cdot 11^{19}$ делится на все числа a, b, c. Значит множителями этих чисел могут быть лишь 2 и 11.

Найдем тройки подходящих чисел a, b, c.

Рассмотрим 2 случая.

1). $2 \cdot 11^{l}$, $2 \cdot 11^{p}$, $11 \cdot 2^{16}$ Одна из степеней l или p должна быть равна 19, чтобы НОК уд. условию.

$2 \cdot 11^{19}$; $2 \cdot 11^{p}$; $11 \cdot 2^{16}$, $p \in [1; 19]$, $p \in \mathbb{Z}$.

2). $2^{q} \cdot 11$, $2^{n} \cdot 11$, $2 \cdot 11^{19}$. Аналогично, q или $n = 16$.

$2^{16} \cdot 11$; $2^{n} \cdot 11$, $2 \cdot 11^{19}$ $n \in [1; 16]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Всего: $19 + 15 = 34$ тройки. Учитывая перестановки,

Ответ: $34 \cdot 6 = 204$

⑤ ОДЗ:
$$\begin{cases} x+34>0 \\ \sqrt{x+34}\neq 1 \\ 2x+23>0 \\ x\neq -4 \\ (x+4)^2\neq 1 \\ x+34>0 \\ 2x+23>0 \\ \sqrt{2x+23}\neq 1 \\ -x-4>0 \end{cases}$$

Обозначим $-x-4=a>0$
$\sqrt{x+34}=b>0$
$\sqrt{2x+23}=c>0$

$\log_b c^2$; $\log_{a^2} b^2$; $\log_c a$ Найдем произведение этих чисел

$2\log_b c \cdot \log_a b \cdot \log_c a = 2\cdot \log_b c \cdot \frac{1}{\log_b a}\cdot\frac{1}{\log_a c} = 2\cdot \log_a c\cdot \frac{1}{\log_a c} = 2.$

Обозначим $\log_b c^2 = x$, $\log_{a^2} b^2 = y$, $\log_c a = z$.

1) $\begin{cases} x=y \\ z=x+1 \end{cases}$ $\quad x\cdot y\cdot z = 2$
$x\cdot x\cdot(x+1)=2$
$x^3+x^2-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2+2x+2=0 \Rightarrow \varnothing \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases}\log_b c^2 = 1 \\ \log_a b = 1 \\ \log_c a = 2\end{cases}$

2) $\begin{cases} x=z \\ y=x+1\end{cases}$ $\quad x\cdot y\cdot z=2$
$x\cdot x\cdot(x+1)=2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \begin{cases}\log_b c^2=1 \\ \log_c a=1 \\ \log_a b=2\end{cases}$

3) $\begin{cases} y=z \\ x=y+1\end{cases}$ $\quad y\cdot y\cdot(y+1)=2 \Rightarrow y=1$ ~~$\log_a$~~ $\Rightarrow \begin{cases}\log_a b=1 \\ \log_c a=1 \\ \log_b c^2=2\end{cases}$

$\log_b c^2 = 1$
$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=1$
$(x+34)=2x+23$
$x+34=4x^2+92x+529$
$4x^2+91x+495=0$
$x=-9$ $\quad x=-\frac{55}{4}$ – не уд ОДЗ

$\log_a b = 1$
$\log_{-x-4}\sqrt{x+34}=1$
$-x-4=\sqrt{x+34}$
$x^2+8x+16=x+34$
$x^2+7x-18=0$
$x=2$ – не уд ОДЗ $\quad x=-9$

$\log_c a = 1$
$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=1$
$2x+23=x^2+8x+16$
$x^2+6x-7=0$
$x=1$ не уд ОДЗ $\quad x=-7$

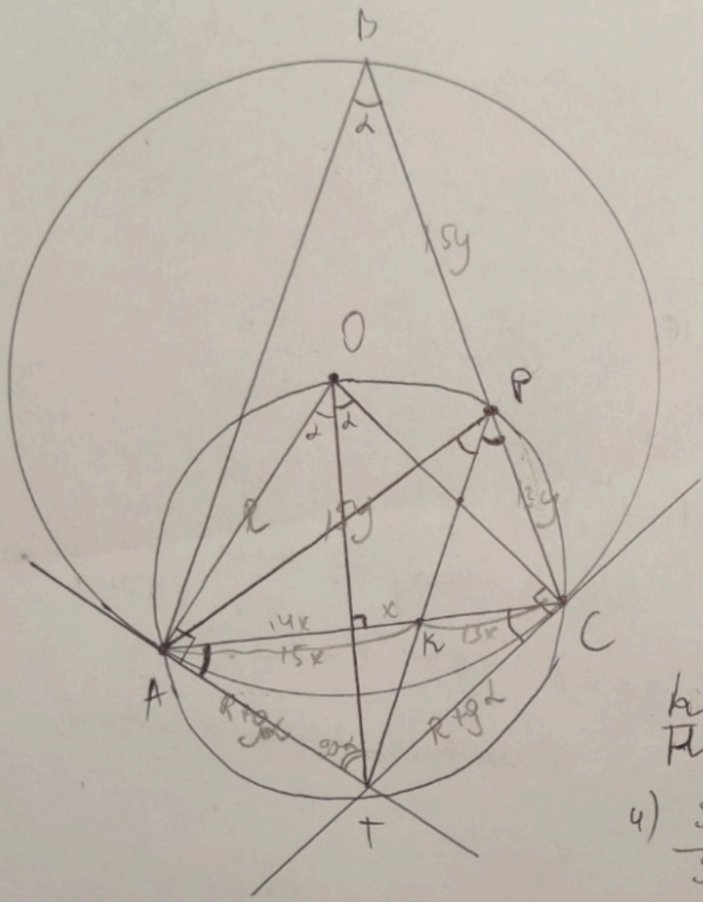
Первой системе (1) уд. $x=-9$ Проверим будет ли при этом x $\log_c a = 2$:
$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=\log_{\sqrt5}(5)=2.$
Значит $x=-9$ подходит.

Вторая система не дает x, также как и третья.

Ответ: -9

Чистовик лист 1 из

6



1) $\angle AOT = \alpha$.

$\Delta AOT = \Delta TOC$, т.к. $OA = OC = R$, $AT = TC$ по с-ву кас-них, проведенных из одной точки.

$\angle AOT = \angle TOC = \alpha$

2) $\angle TOC = \angle CAT$

$\angle TPC = \angle CAT$

как опирающиеся на одну дугу.

3) $\angle TAC = \frac{1}{2} \cup CA = \angle B \Rightarrow$

$\Delta PKC \sim \Delta ABC \Rightarrow$

высоты этих треугольников $\frac{h}{H}$ относятся как $\frac{PC}{BC} = \frac{KC}{AC}$ $\frac{HX}{R}$

4) $\dfrac{S_{APK} = \frac{1}{2} h \cdot AK}{S_{PKC} = \frac{1}{2} h \cdot KC}$

$\frac{15}{13} = \frac{AK}{KC}$, $AK = 15x$, $KC = 13x$

5). $\dfrac{S_{APC}}{S_{ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot H} = \dfrac{h}{H} = \dfrac{KC}{AC} = \dfrac{13x}{28x} = \dfrac{13}{28}$

$\dfrac{15+13}{S_{ABC}} = \dfrac{13}{28}$, $S_{ABC} = \dfrac{28^2}{13} = \dfrac{784}{13}$

$D = 91^2 - 4 \cdot 4 \cdot 495 = 8281 - 7920 = 361 = 19^2$

$x_1 = \frac{-91+19}{8} = -9$

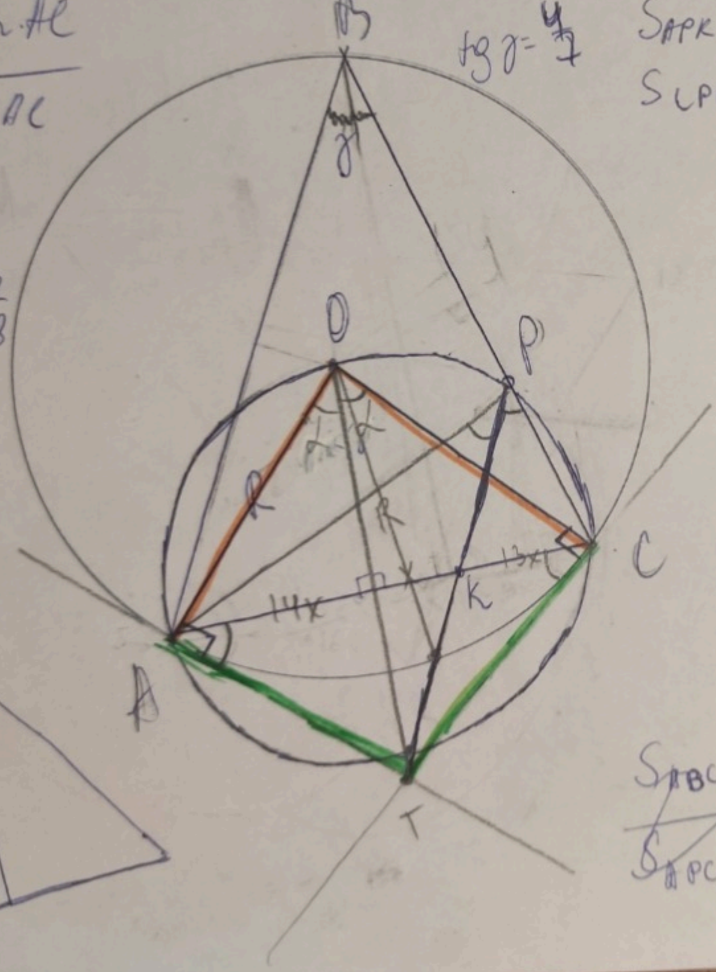
$x_2 = \frac{-91-19}{8} = \frac{-110}{8} = \frac{-55}{4}$

$-\frac{55}{4} \cdot 2 + 23 = -\frac{55}{2} + 23 = -27{,}5 + 23$

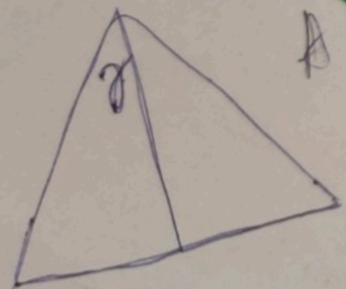
$\frac{S_{APC} = \frac{1}{2} h \cdot AC}{S_{ABC} = \frac{1}{2} H \cdot AC}$

$\frac{28}{S_{ABC}} = \frac{h}{H} = \frac{13}{28}$

$S_{ABC} = \frac{28^2}{13}$



$tg\,\gamma = \frac{4}{7}$



$S_{APK} = 15$

$S_{CPK} = 13$

$S_{ABC} = ?$

$\frac{PC}{BC} = \frac{CK}{AC} = \frac{13}{28}$

$\frac{S_{APK} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot AK}{S_{PKC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot KC}$

$\frac{15}{13} = \frac{AK}{KC}$

$\cancel{S_{ABC} = \frac{1}{2} H \cdot AC} \quad \frac{S_{ABC}}{28} =$

$\cancel{S_{APC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot AC}$

$D = 49 + 72 = 121 = 11^2$

$x = \frac{-7+11}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$2x = \frac{-7-11}{2} = \frac{-18}{2} = -9$

$\frac{AC}{\sin(\angle ABC)} = 28\sqrt{2}\,x$

$\frac{28x}{\sin(\operatorname{arctg}\frac{4}{7})} = 28\sqrt{2}\,x$

$\frac{\sqrt{65}}{4}$

$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad \cos x = \frac{7}{\sqrt{65}}$

$1 + \frac{16}{49} = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad \sin x = \sqrt{1 - \frac{49}{65}} = \sqrt{\frac{16}{65}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$

$\frac{65}{49} = \frac{1}{\cos^2 x}$

21103586 (U252366 M1303909)

Черновик

1) $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34)$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-4x-4) = \log_{(x+4)^2}(x+34)+1$

$-4x-4 = a > 0$

$\sqrt{x+34} = b > 0$

$\sqrt{2x+23} = c > 0$

$$\begin{cases} \log_b c^2 = \log_{a^2} b \\ \log_c a = \log_{a^2} b^2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{\log_b c^2 = \frac{1}{\log_b a^2}} \quad 4\log_b c = \log_a b \\ \log_c a = \log_a b + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_c a = 4\log_b c + 1 \\ 4\log_b c = \log_a b \end{cases}$$

$529 - 34 = 495$

$23 \cdot 23$: 69, 46, 529

$\underset{\text{I}}{\log_b c^2} \quad \underset{\text{II}}{\log_{a^2} b^2} \quad \underset{\text{III}}{\log_c a}$

$\log_b c^2 \cdot \log_{a^2} b^2 \cdot \log_c a = 2\log_b c \cdot \log_a b \cdot \log_c a = 2\log_b c \cdot \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_c a =$

$2 \cdot \log_a c \cdot \log_c a = 2 \cdot \frac{\log_a b}{\log_a b} = 2$

Произведение всех чисел равно 2.

$23 \cdot 4 = 92$

1) $$\begin{cases} \log_b c^2 = \log_{a^2} b^2 \\ \log_c a = \log_{a^2} b^2 + 1 \end{cases}$$

$2\log_b c = \log_a b$

$\log_c a = \log_a b + 1$

$\cancel{\log_c a = 2\log_b c^2 + \log_b b}$

$2\log_b c = \frac{1}{\log_b a}$

$2\log_b c \cdot \log_b a = 1$

$\text{I} = \text{II}$

$\text{III} = \text{II} + 1$

$\text{I} \cdot \text{II} \cdot \text{III} = 2$

$\text{I} \cdot \text{I} \cdot (\text{I}+1) = 2$

$\text{I}^3 + \text{I}^2 - 2 = 0$

$\text{I}_1 = 1$

$x \cdot y \cdot z = 2$

$x = y$

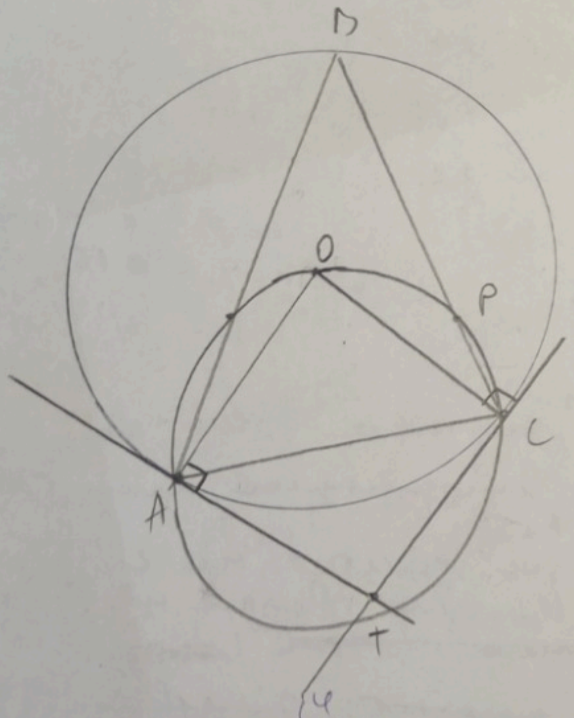
$z = x+1$

$x \cdot x \cdot (x+1) = 2$

$3x^3 + 2x^2 - 2 = 0$

21103586 (U252366 M1303909)

③



$$\sin\gamma = \frac{14x}{R} \qquad \frac{\overset{14}{\cancel{28x}}}{\sin\gamma} = 2R$$

$(\log_{?} c_{?}^{2})^3 + \log$

$$\begin{array}{l} z^3 + z^2 - 2 \;\big|\; z - 1 \;=\; z^2 + 2z + 2 \\ -(z^3 - z^2) \\ \hline \quad 2z^2 - 2 \\ -(2z^2 - 2z) \\ \hline \quad\quad 2z - 2 \\ \quad\quad 2z - 2 \\ \hline \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^3 + x^2 - 2 \;\big|\; x - 1 \;=\; x^2 + 2x + 2 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline \quad 2x^2 - 2 \\ \quad 2x^2 - 2x \\ \hline \quad\quad 2x - 2 \\ \quad\quad 2x - 2 \end{array}$$

$(x-1)(x^2+2x+2)=0$

$\cancel{x^3 + 2x^2 - 2x - x^2 - 2x + 2 = 0}$

$\cancel{x^3 + 2x - 2x - x^2 - 2x + 2 = 0}$

$\cancel{x^3} - x^2 - 2x + 2 = 0$

$x^3 + 2x^2 + \cancel{2x} - x^2 - \cancel{2x} - 2 \qquad 4 - 8$

НОД $(a, b, c) = 22$

НОК $(a, b, c) = 2^{16} \cdot 11^{19}$

~~Все числа a, b, c : $2^{16} \cdot 11^{19}$~~

$2^{16} \cdot 11^{19}$ делится на все числа a, b, c.

все числа ^{a,b,c} делятся на 22.

$m, p, l \leq 19$

$n, q, k \leq 16$

$a = 11^m \cdot 2^n$ $b = 11^p \cdot 2^q$ $c = 11^l \cdot 2^k$

Т.к. НОК $(a, b, c) = 2^{16} \cdot 11^{19}$, то числа a, b, c не могут состоять из других множителей, кроме как 2 и 11. При этом каждое делится на 22.

Найдем тройки чисел.

~~Значит одно число из чисел a, b, c делится~~

~~остальные два числа имеют: $2 \cdot 11^p$, $11 \cdot 2^q$~~

1) $2 \cdot 11^0$, $11 \cdot 2^0$, $11 \cdot 2^0$

2) $2 \cdot 11^0$, $2 \cdot 11^0$, $11 \cdot 2^0$

1). $2 \cdot 11^{19}$, $11 \cdot 2^8$, $11 \cdot 2^k$

2) $2 \cdot 11^8$, $2 \cdot 11^p$, $11 \cdot 2^{14}$