Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103506**

ID профиля: **323589**

Вариант 23

Чистовик Лист 1/6

№1

Если по условию $a_1, a_2, a_3, \dots \in Z$ - ариф. прогрессия, то:

$a_n = a_1 + (n-1)d$; тогда $a_2 = a_1 + d$; $d = a_2 - a_1$; $a_2 \in Z$, $a_1 \in Z$

тогда $a_2 - a_1 \in Z$, $\underline{d \in Z}$, $d > 0$

$$\begin{cases} a_{10} a_{16} > S + 39 & (1) \\ S + 55 > a_{11} a_{15} & (2) \end{cases}$$

$a_{10} = a_1 + 9d$; $a_{11} = a_1 + 10d$; $a_{15} = a_1 + 14d$; $a_{16} = a_1 + 15d$;

$(1)+(2)$ $\quad (a_1 + 9d)(a_1 + 15d) + 55 > 39 + (a_1 + 10d)(a_1 + 14d)$

$135d^2 + 16 > 140d^2$; $5d^2 < 16$; $d^2 < 3{,}2$;

Имеем $\begin{cases} d^2 < 3{,}2 \\ d > 0 \end{cases}$; Исходя из этого $\underline{d = 1}$ - единственный корень.

Необходимо найти a_1. $S = \frac{a_1 + (a_1 + 5)}{2} \cdot 6 = 6a_1 + 15$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 54 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 70 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + 2 \cdot 9 \cdot a_1 + 81 > 0 \\ a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0 \end{cases}$$

$\frac{D}{4} = 81 - 70 = 11$

$a_1 = -9 \pm \sqrt{11}$

$3 < \sqrt{11} < 4$

$$\begin{cases} (a_1 + 9)^2 > 0 \\ -9 - \sqrt{11} < a_1 < -9 + \sqrt{11} \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 \neq -9 \\ -12 \leqslant a_1 \leqslant -5 \end{cases}$$

Значит, возможные значения a_1 — $-12; -11; -10; -8; -7; -6; -5$;

21103506 (U323589 M1298719)

Ответ: $-12; -11; -10; -8; -7; -6; -5$;

№2 (1)

$AB = 4$

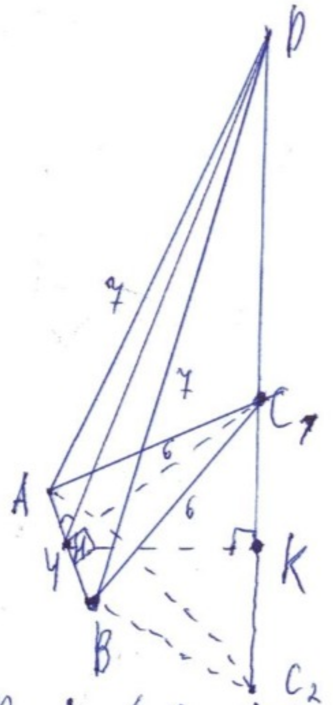
$AC = CB = 6$

$AD = DB = 7$

$CD \parallel$ оси цилиндра

Найти:

CD - ?



Так как $\triangle ADB$ и $\triangle ACB$ равнобедренные, $DH \perp AB$, $CH \perp AB$; $(DHC) \perp AB$,

$AB \perp DC$, а значит и оси цилиндра тоже.

Тогда AB лежит в одной плоскости с диаметрами цилиндра — значит этот диаметр $\geq AB$;

Из условия, он должен быть минимален, а значит $d = 4$; $r = 2$

Так как точки D и C лежат на поверхности цилиндра, прямая DC лежит тоже на ней.

Пусть $HK \perp DC$ и $K \in DC$

Тогда возможны два случая — либо C лежит в точке C_1, либо в точке C_2 ($KC_1 = KC_2$).

№2 (2)

$HK = r = 2$; Найдём CK и DK

$CK^2 = HC^2 - HK^2 = AC^2 - AH^2 - HK^2 = 36 - 4 - 4 = 28$

$CK = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$DK^2 = HD^2 - HK^2 = AD^2 - AH^2 - HK^2 = 49 - 8 = 41$

$DK = \sqrt{41}$

Тогда $\left[\begin{array}{l} CD = \sqrt{41} + 2\sqrt{7} \\ CD = \sqrt{41} - 2\sqrt{7} \end{array}\right.$

Ответ: $\sqrt{41} + 2\sqrt{7}$

$\sqrt{41} - 2\sqrt{7}$

Чистовик Лист 4/6

№3 (1)

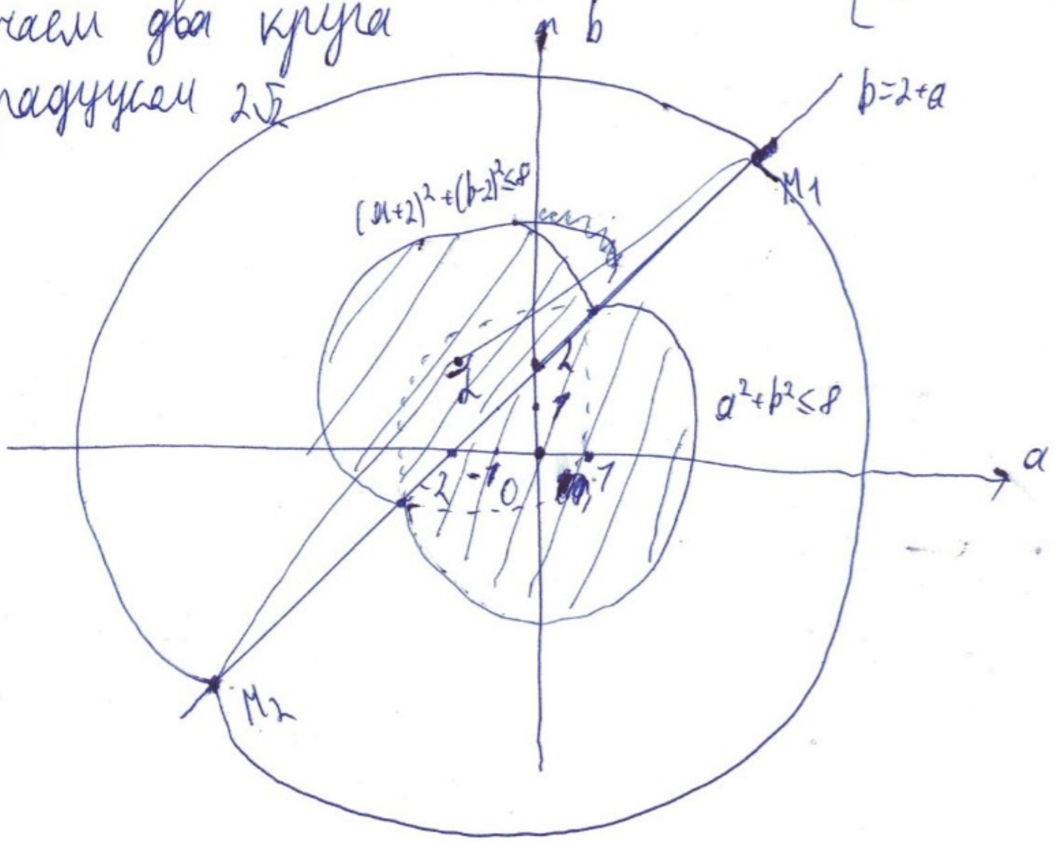
Введём плоскость с координатами $(a; b)$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 8 & (1) \\ a^2+b^2 \leq \min(-4a+4b, 8) & (2) \end{cases}$$

$(a-x)^2+(b-y)^2 \leq 8$ — круг с центром в $(x;y)$ и радиусом $2\sqrt{2}$

$a^2+b^2 \leq \min(-4a+4b, 8)$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \leq -4a+4b \\ -4a+4b \leq 8 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \leq 8 \\ -4a+4b \geq 8 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a+2)^2+(b-2)^2 \leq 8 \\ b \leq 2+a \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \leq 8 \\ b \geq 2+a \end{cases} \end{array}\right.$

Получаем два круга с радиусом $2\sqrt{2}$



21103506 (U323589 M1298719)

№3(2)

Из этого получаем, что круг (1) должен касаться либо пересекать данную область.

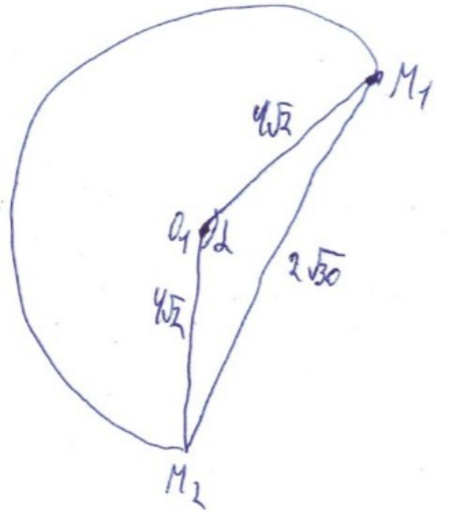
Так как координаты его центра – $(x;y)$, фигурой M будут все точки на коор. плоскости в которых круг (1) может иметь свой центр.

Получаем две более большие части окружностей, представляющих фигуру M.

Их радиус – $2\cdot 2\sqrt{2}$.

Они одинаковы, так что рассчитаем одну из них.

Найдем M_1M_2; $y=x+2$, тогда



$(x+2)^2+x^2=32$

$2x^2+4x+4=32$

$x^2+2x-14=0$

$\frac{D}{4}=1+15=15$

$x=-1\pm\sqrt{15}$; $y=1\pm\sqrt{15}$

Тогда

$M_1(-1+\sqrt{15};\ 1+\sqrt{15})$; $M_1M_2=\sqrt{4\cdot 15+4\cdot 15}=\sqrt{8\cdot 15}=2\sqrt{30}$

$M_2(-1-\sqrt{15};\ 1-\sqrt{15})$

Чистовик лист 6/6

№3(3)

Т. Косинусов для $\triangle O_1M_1M_2$:

$8\cdot 15 = 2\cdot 32 - 2\cdot 32\cdot \cos\angle$; $\cos\angle = \frac{58}{64} = \frac{29}{32}$

$\angle = \arccos\left(\frac{29}{32}\right)$

$$S_M = 2\cdot\left(2\cdot 32\cdot \sin\left(\arccos\frac{29}{32}\right) + \frac{2\pi - \arccos\left(\frac{29}{32}\right)}{2\pi}\cdot\pi\cdot 32\right)$$

(Не успел сократить)

Ответ: $128\sin\left(\arccos\frac{29}{32}\right) + \left(2\pi - \arccos\left(\frac{29}{32}\right)\right)\cdot 32$

21103506 (U323589 M1298719)

Черновик

$y = x + 2$

$(x; x+2) \longleftrightarrow (0;0)$

$(-2; 2)$

$(x+2)^2 + x^2 = 32$

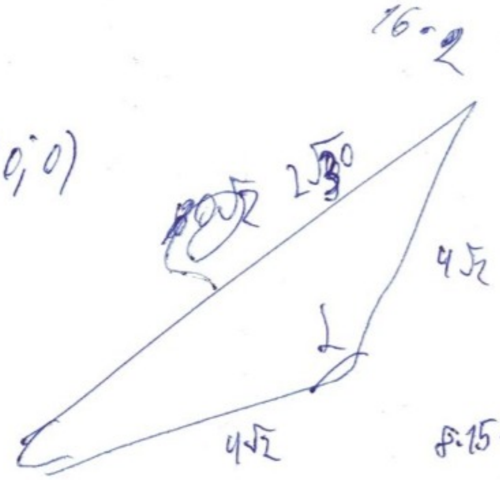
$2x^2 + 4x + 4 = 32$

$x^2 + 2x - 14 = 0$

$\frac{D}{4} = 1 + 14 = 15$

$x = -1 \pm \sqrt{15}$

$4\sqrt{2}$



$64 - 120$

$8 \cdot 15 = 2 \cdot 32 - 2 \cdot 32 \cdot \cos\alpha$

$64\cos\alpha = 64 - 120$

$\cos\alpha = \frac{58}{64}$

$(\sqrt{15}+1)^2 + (\sqrt{15}-1)^2 = 15 + 1 + 15 + 1$

$58 \mid 2$, 29

$x = -1 \pm \sqrt{15}$

$y = 1 \pm \sqrt{15}$

πR^2

$(-1+\sqrt{15}; 1+\sqrt{15})$ $(-1-\sqrt{15}; 1-\sqrt{15})$

21103506 (U323589 M1298719)

$-1 + \sqrt{15} + 1 + \sqrt{15} = 2\sqrt{15}$

$\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{4 \cdot 15 + 4 \cdot 15}} = \sqrt{8 \cdot 15} = 2\sqrt{30}$

Черновик

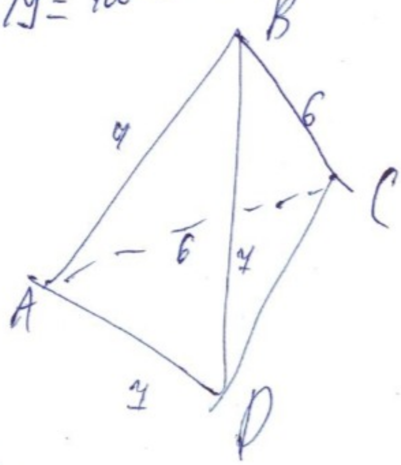
$40+14=54$

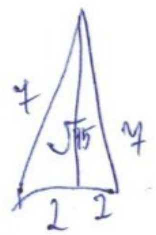
$AB=4$

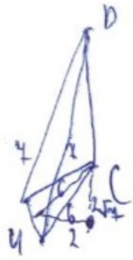
$AC=CB=6$

$AD=DB=7$

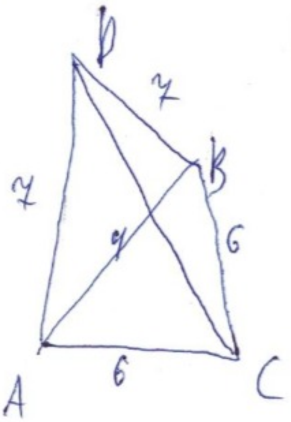
$135-35-19=100-19=81$







$\sqrt{49-4}=\sqrt{45}=$



9

$81-70$

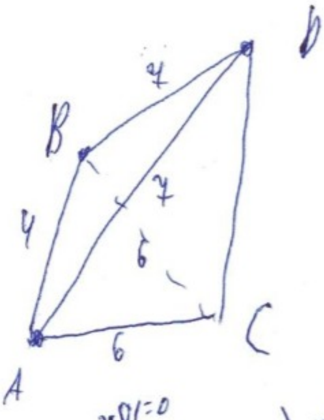
$32-4=28$

$\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

$25-9=$ $20-4=$

$\sqrt{36-4}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$16\cdot2+4=36$



$81+11\cdot18\cdot9-\ldots+70=2\cdot81-2\cdot81=0$

$S=6a_1+d+2d+3d+4d+5d=6a_1+15d$

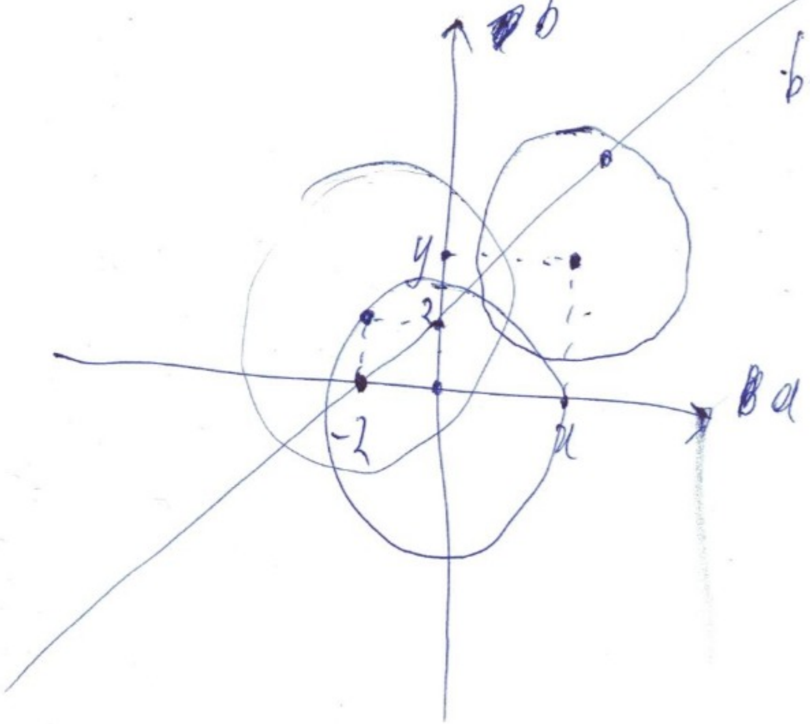
$-9+3{,}5=-6+0{,}5=$

$=-5{,}5$

Черновик

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b,\ 8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 8 \\ \end{cases}$$



$-4a+4b < 8$

$b < 2+a$

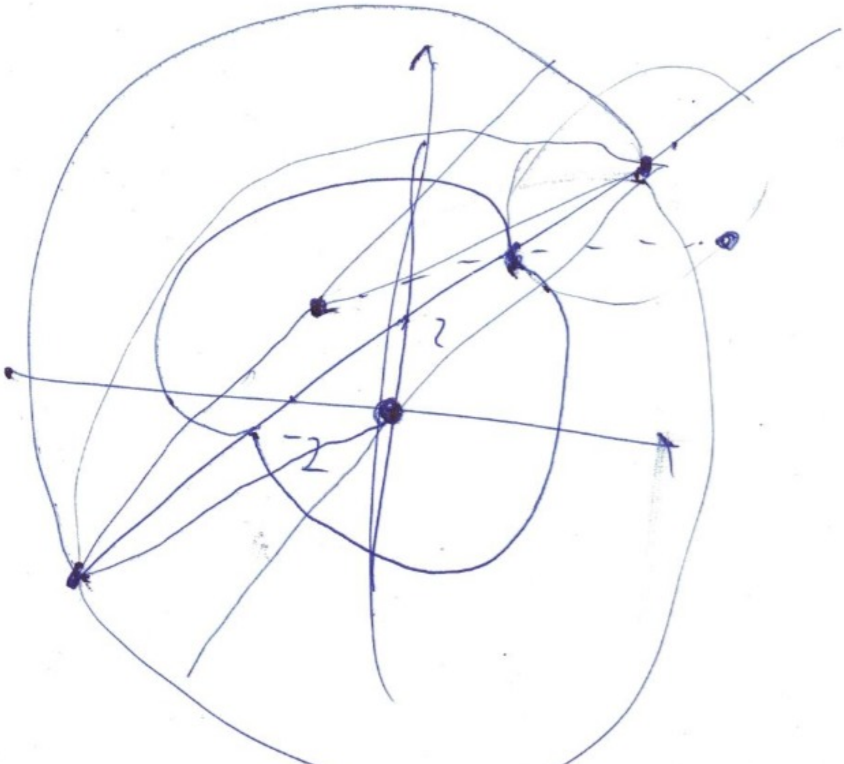
$4(b-a)$

$a^2+b^2 \le 8$

$a^2+b^2 \le -4a+4b$

$a^2+4a+4+b^2-4b+4 \le 8$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$



$b=2+a$

$(a+2)^2+a^2 \le 8$

$2a^2+4a+4 \le 8$

$a^2+2a-2=0$

$D=$

черновик

$d>1$

$S = \frac{a_1 + a_1 + 5d}{2} \cdot 6 =$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$a_{16} = a_1 + 15d$

$= 6a_1 + 15d$

$a_1^2 + 15 \cdot 9 d^2 + (9+15) a_1 d = a_1^2 + 24 a_1 d + 135 d^2$

$a_1^2 + 24 a_1 d + 140 d^2$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{15} = a_1 + 14d$

$a_1^2 + (10+14) a_1 d + 140 d^2$

$S + 39 < 135 d^2$

$\cancel{135d^2} \cancel{>} S + 39$

$140 d^2 < S + 55$

$a_2 = a_1 + d$

$15 \cdot 9 d = 90 + 45 = 135 d^2$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24 a_1 d + 135 d^2 > 6a_1 + 15d + 39 \\ \cancel{6a_1 + 15d + 39 < a_1^2 + 24 a_1 d + 135 d^2} \\ \cancel{a_1^2 + 24 a_1 d} + 140 d^2 < \cancel{6a_1 + 15d} + 55 \end{cases}$$

$\begin{array}{r} 55 \\ -39 \\ \hline 6 \end{array}$

$5d^2 + 39 < 55$

$55 - 39 = 25 - 9 = 20 - 4 = 16$

$\begin{array}{r} \times\ 9 \\ 15 \\ \hline 45 \\ 90 \\ \hline 135 \end{array}$

$5d^2 < 16$

$d^2 < 3{,}2$

$\frac{16}{5} = 3{,}2$

$0 < d^2 < 3{,}2$

$d = 1$

$$\begin{cases} \cancel{a_1^2 + 24 a_1 d} + 135 d^2 > \cancel{S} + 39 \\ S + 55 > \cancel{a_1^2 + 24 a_1 d} + 140 d^2 \end{cases}$$

21103506 (U323589 M1298719)

$55 + 135 d^2 > 140 d^2 + 39$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103506**

ID профиля: **323589**

Вариант 23

Чистовик лист 2/2

№4(2)

(11) Таким же образом — одно $\vdots 11$, второе $\vdots 11^{19}$ (не больше не меньше), а третье содержит от 11^1 до 11^{19} (19 вар.)

Если $11, 11, 11^{19}$ или $11, 11^{19}, 11^{19}$ то 3

В других случаях по 6.

$3 \cdot 2 + 6 \cdot 17 = 6 \cdot 18 = \underline{108}$ ~~Ответ: 108~~

Итого всего $90 \cdot 108 = \underline{9720}$

Ответ: 9720

Чистовик лист 1/2

№4 (1)

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 2\cdot 11 & (1) \\ НОК(a;b;c) = 2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

Числа a, b, c имеют вид: $2^k \cdot 11^t$

Рассмотрим каждый множитель по отдельности

2) Исходя из (1) хотя бы одно кратно только и только 2.

Исходя из (2) хотя бы одно кратно 2^{16} (не больше и не меньше)

Третье же число содержит в себе степень двойки от 2^1 до 2^{16}. Рассчитаем число вариантов.

Если $2, 2, 2^{16}$ или $2, 2^{16}, 2^{16}$ то 3 варианта

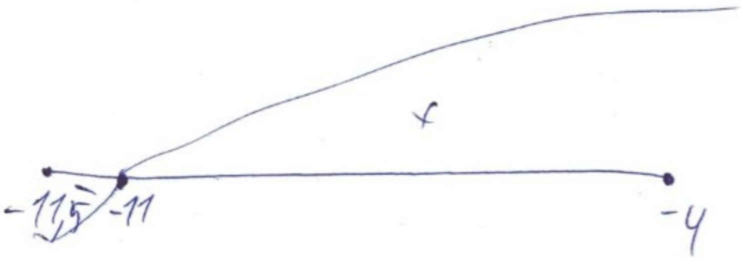
В других случаях $3! = 6$.

Итого: $3\cdot 2 + 6\cdot 14 = 6\cdot 15 = \underline{90}$

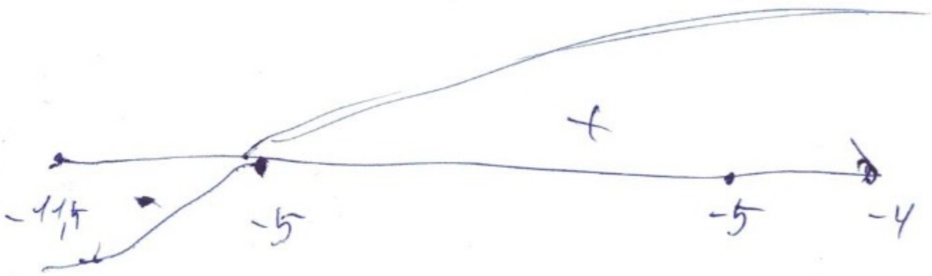
21103506 (U323589 M1298720)

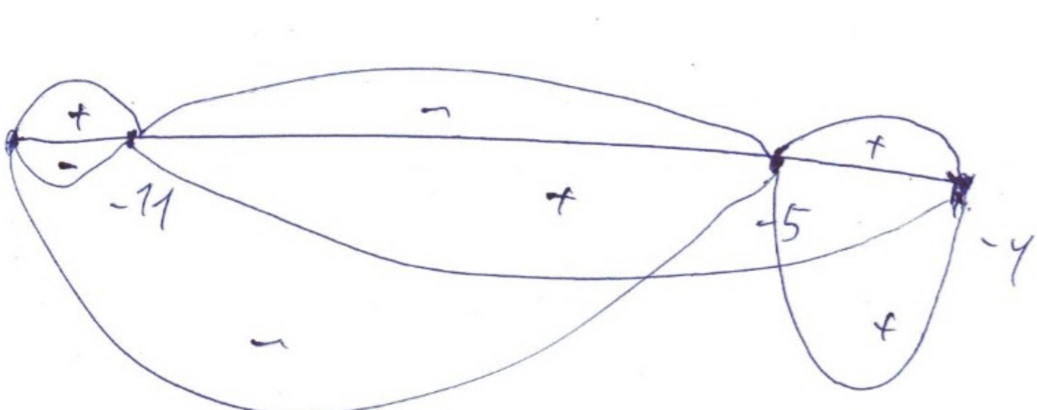
Черновик

$\log_{x+34} 2x+23$ $\qquad \frac{2x+22}{x+33} \geq 0$



$\log_{-x-4} (x+34)$ $\qquad \frac{x+33}{x+5} < 0$





черновик

$$2\log_{2x+23}(-x-4) =$$

$$\frac{1}{2}\log_{-x-4}(x+34) = 2\log_{x+34}(2x+23) \qquad = 2\log_{x+34}(2x+23)+1$$

$$\log_{-x-4}\sqrt{x+34} = \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$$

$$\frac{\ln(-x-4)}{\ln(2x+23)} = \frac{\ln(2x+23)}{\ln(x+34)} + \frac{1}{2}$$

$$\ln(-x-4) = a$$

$$\ln(2x+23) = b$$

$$\ln(x+34) = c$$

$$\frac{a}{2b} = \frac{c}{2a} + 1$$

$$a^2 = bc + 2ab$$

$$(-x-4)^k = \sqrt{x+34}$$

$$\left(\sqrt{x+34}\right)^k = 2x+23$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}c^2 = ab \\ ac = b^2 + \frac{1}{2}bc \\ a^2 = bc + 2ab \end{cases}$$

21103506 (U323589 M1298720)

$$\frac{a}{2b} \qquad \frac{b}{\frac{1}{2}c} \qquad \frac{c}{2a}$$

(1) (2) (3)

$a^2 = bc$

$\frac{a}{2b} + 1 = \frac{2b}{c}$; $ac + 2bc = 4b^2$

$\frac{c}{2a} + 1 = \frac{2b}{c}$; $c^2 + 2ac = 4ab$

$b = \frac{a^2}{c}$

$c^3 + 2ac^2 = 4a^3$

$ac = 2b(2b - c)$

$c(a+c) + 2c(a+b) = 4b(a+b)$

$c^2 = 2a(2b - c)$

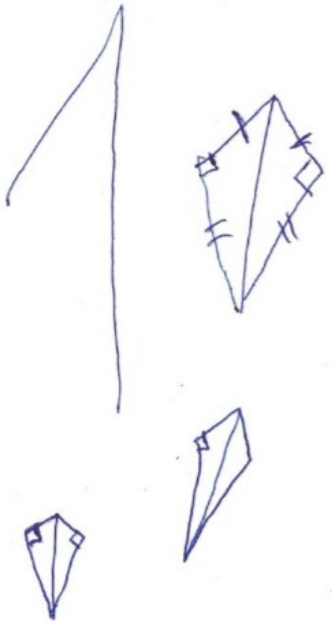
$c(a+c) = (a+b)(4b - 2c)$

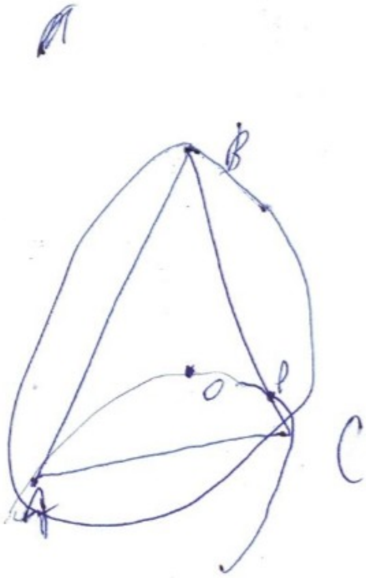
$$\begin{cases} ac + 2a^2 = 4b^2 \\ c^2 + 2ac = 4ab \end{cases} \qquad \begin{cases} ac + 2a^2 = 4 \cdot \frac{a^4}{c^2} \\ c^2 + 2ac = \frac{4a^3}{c} \end{cases}$$

21103506 (U323589 M1298720)

$\{ c^2 + 2ac = 4\frac{a^3}{c}$

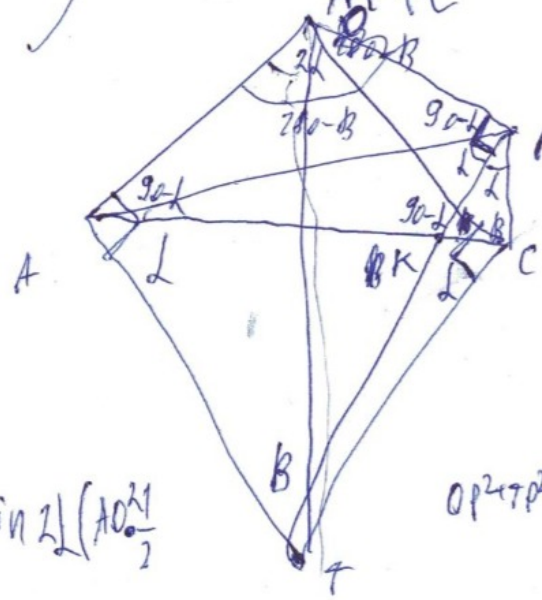
Черновик





$180-2\alpha=$

$$\frac{R^2}{AP\cdot PC}$$



$S_{APK} = \sin\alpha \cdot AP\cdot KP\cdot\frac{1}{2}$

$S_{CPK} = \sin\alpha\cdot PC\cdot KP\cdot\frac{1}{2}$

$\frac{15}{13} = \frac{AP}{PC}$

$AO\cdot AT = \sin 2\alpha (AO^2\cdot\frac{1}{2}$

$OP^2+TP^2 = R^2+TC$

$AK = KC\cdot\frac{15}{13}$

$\frac{AP}{PC} = \frac{15}{13}$

$\frac{AO\cdot OP}{AC\cdot PC} = KC\cdot PC = KT\cdot AT$

$AP = PC\cdot\frac{15}{13}$

$\frac{AT\cdot KT}{KC\cdot PC} = \frac{13^2}{15}$

$\frac{AP\cdot AK}{TK\cdot TC} = \frac{15}{S_1}$

$(KC\cdot PC) = (KT\cdot AT)$

$\frac{KC\cdot PC}{KT\cdot AT} = \frac{\frac{13^2}{15^2}\cdot 15}{S_1} = \frac{13^2}{15 S_1}$

Черновик

№4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 22 = 2\cdot 11 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

Заметили что a, b, c взаимозаменяемы

Каждое из чисел $\vdots\ 2\cdot 11$

Среди чисел a, b, c обязательно есть число $\vdots\ 2^{16}$ и число $\vdots\ 11^{19}$

6.

$36\cdot 3 = 90+18 = 108$

$$\begin{array}{r} \times\ 108 \\ 9 \\ \hline 72 \\ 900 \\ \hline 972 \end{array}$$

Черновик

НОД $(a, b, c) = 2 \cdot 11$

НОК $(a; b; c) = 2^{16} \cdot 11^{19}$

$2 \log_{2x+23} (-x-4)$

$a = 22k$

$b = 22g$

$c = 22t$

Наим. общее кратное

$a = 2^{k_1} \cdot 11^{k_2}$

$b = 2^{k_3} \cdot 11^{k_4}$

$c = 2^{k_5} \cdot 11^{k_6}$

$-x-4 > 0$

$x < -4$

$x > -\frac{23}{2} = -11{,}5$

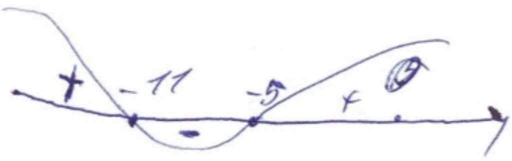
$2 \log_{x+34} (2x+23) = \frac{1}{2} \log_{-x-4} (-x+34)$

$x \in (-11{,}5 ; -4)$

$2^1 \quad 2^2 \quad 2^{16}$

6

$2 \log_{2x+23} (-x-4) > 0$



$\log_{2x+23} (-x-4) > \log_{2x+23} 1$

$\frac{-x-4-1}{2x+23-1} > 0$

$-x-5$

21103506 (U323589 M1298720)