Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103505**

ID профиля: **53627**

Вариант 23

Чистовик.

№1. все a_1 - ?

Пусть r - разность прогрессии.

$a_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow r>0;\ r\in\mathbb{Z} \Rightarrow r\in\mathbb{N};\ a_1\in\mathbb{Z}.$

$S=a_1+a_2+\ldots+a_6=6a_1+r+2r+\ldots+5r=6a_1+15r$

$\begin{cases} a_{10}\cdot a_{16}\geq S+39 \\ a_{11}\cdot a_{15}\leq S+55 \end{cases}$ $\quad (a_1+9r)(a_1+15r)=a_1^2+24a_1r+135r^2>S+39$

$(a_1+10r)(a_1+14r)=a_1^2+24a_1r+140r^2<S+55$

Сложим с прав. знаками:

$a_1^2+24a_1r+135r^2+S+55>S+39+a_1^2+24a_1r+140r^2$

$16>5r^2$

$r=1$; при $r\geq 2: 5r^2\geq 5\cdot 4>16$ $\Downarrow$ не м. б.

$16>5$ (V)

Вернемся к системе и подставим S:

$\begin{cases} a_1^2+24a_1+135>6a_1+15+39 \\ a_1^2+24a_1+140<6a_1+15+55 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+18a_1+81>0 \\ a_1^2+18a_1+70<0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} (a_1+9)^2>0 \Rightarrow a_1\neq -9 \\ a_1\in(-9-\sqrt{11};-9+\sqrt{11}) \end{cases}$

$a_1^2+18a_1+70<0$

$D/4=81-70=11$

$a_1=-9\pm\sqrt{11}$

$3<\sqrt{11}<4$

$\Downarrow$

Для $a_1\in(-9-\sqrt{11};-9+\sqrt{11})$

$\underbrace{-9+3}_{-6}<-9+\sqrt{11}<-9+4$

$-9-4<-9-\sqrt{11}<\underbrace{-9-3}_{-12}$

Если $a_1\in\mathbb{Z}$: $a_1\in\{\underbrace{-12}_{-9-3};-11;-10;-9;-8;-7;\underbrace{-6}_{-9+3}\}$

Для системы еще $a_1\neq -9$:

$\Downarrow$

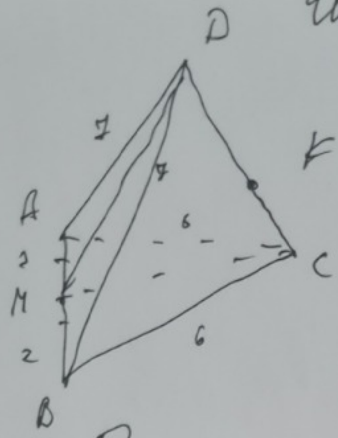
$a_1\in\{-12;-11;-10;-8;-7;-6\}$

Ответ: $-12;-11;-10;-8;-7;-6$.

1

21103505 (U53627 M1303206)

Чистовик №2.



Дано:

$AB=4$; $AC=CB=6$

$AD=DB=7$

$CD \parallel$ оси цилиндра

$r_{цил}$ - мин.

CD - ?

Решение:

1) Пусть M - сер AB

2) $\triangle ADB$ - р/б $\Rightarrow MD \perp AB$ аналогично $MC \perp AB \Rightarrow$ по пр-ку $(CDM) \perp AB$; т.к. $MD \cap MC \neq \varnothing \Rightarrow CD \perp AB$.

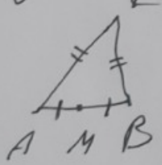
3) Пусть ~~окруж~~ $\parallel$: пл-ть $\parallel$ пл-ти оси через AB перес. CD в K ($AB \perp$ оси цил. ; CD прямая)

4) $MC = \sqrt{36-4} = 4\sqrt{2}$

$MD = \sqrt{49-4} = 3\sqrt{5}$

5) $\triangle ACD = \triangle BCD$ (3 стор) $\Rightarrow \angle DCB = \angle DCA \Rightarrow \triangle AKC = \triangle BKC$ (2 стор и угол) $\Rightarrow AK = BK$

6) По обобщенной т-ме синусов:



$r_{оп} = \dfrac{AB}{2 \cdot \sin\angle AKB}$, т.к. r_{min}, то $\sin\angle AKB = 1$

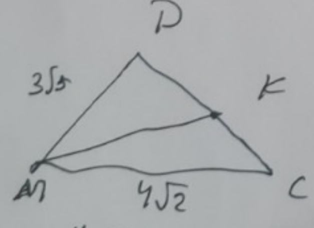
$\Downarrow$

$\angle AKB = 90^\circ \Rightarrow \triangle AKB$ - прям и р/б

$\Downarrow$

$r = \dfrac{AB}{2} = 2 = MK$

7)



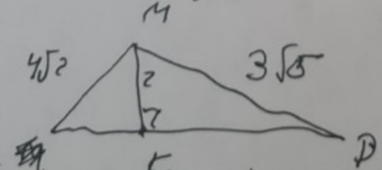
$\angle M$ может быть любым, при MK = любом меньше быть не может, т.к. $MK = \rho(M; CD)$

CD_{max} (не достиг.) при разв $\angle$

$\Downarrow$

$CD_{max} = 3\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$

CD_{min}:



$CK = \sqrt{28}$

$KD = \sqrt{41}$

$CD_{min} = \sqrt{28} + \sqrt{41}$

При увеличении CD будет меньше $\rho \Rightarrow$ точка K точно найдется

$CD \in [\sqrt{28} + \sqrt{41}; 3\sqrt{5} + 4\sqrt{2})$.

2

Ответ: $CD \in [\sqrt{28} + \sqrt{41}; 3\sqrt{5} + 4\sqrt{2})$.

Чистовик

№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(-4a+4b);8) & (2)\end{cases}$$

$(a+2)^2+a^2=8$

$2a^2+4a+4=8$

$a^2+2a-2=0$

$D/4=1+2=3$

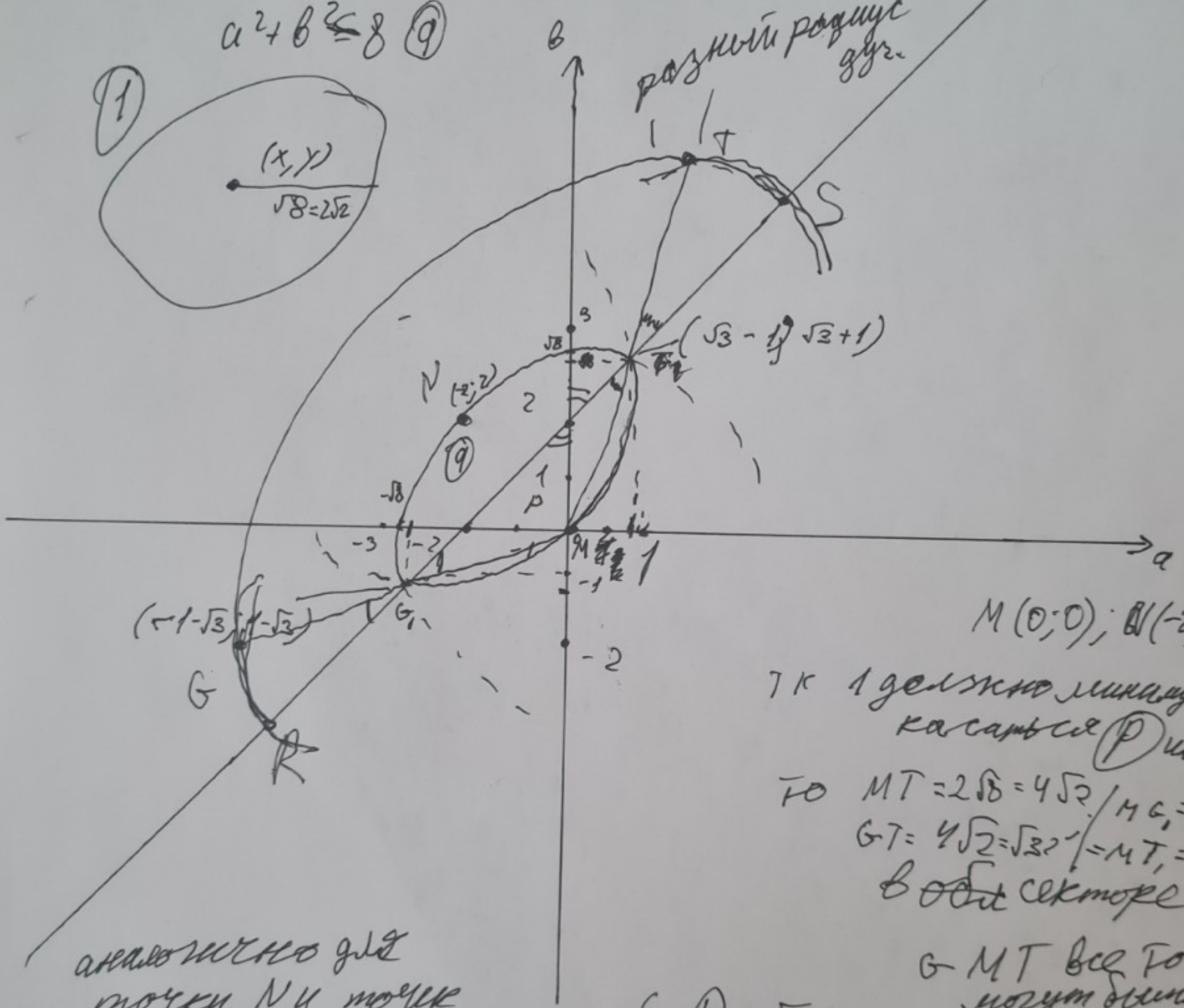
$a=-1\pm\sqrt3$

При $b-a\le 2$:

(2) $(a+2)^2+(b-2)^2\le 8$ (p)

Иначе:

$a^2+b^2\le 8$ (q)



$M(0;0)$; $N(-2;2)$

Т.к. 1 должно минимум касаться (p) или (q), то $MT=2\sqrt8=4\sqrt2$ / $MG_1=2\sqrt2=$

$GT=4\sqrt2=\sqrt{32}$ / $=MT_1=\sqrt8$

в ~~обл~~ секторе

G MT все точки могут быть x, y;

аналогично для точки N и точек ниже $a+2=b$

$G, R=T, S$;

сек GG_1R : TT_1S тоже удовлетворяют

3

№3 (продолжение)

$S_{GMT} = (\pi \cdot MT^2) \cdot \frac{\angle GMT}{360^\circ} = \frac{1}{3} \cdot \pi (MT)^2$

$\overrightarrow{MG} = 2\{-1-\sqrt{3}; 1-\sqrt{3}\}$

$\overrightarrow{MT} = 2\{\sqrt{3}-1; \sqrt{3}+1\}$

$\cos \angle GMT = \frac{\cancel{4} \cdot \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MT}}{\underbrace{(4\sqrt{2})^2}_{32}} =$

$\overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{MG} = \overset{4}{(}\cancel{1}-\sqrt{3}+\cancel{1}-3+1+\sqrt{3}+\sqrt{3}-3+1-\sqrt{3}) = \cancel{-2 \cdot 4} - 4 \cdot 4 = -16$

$= \frac{-16}{32} = -\frac{1}{2}$

$\angle GMT = 120^\circ$

$\angle TT_1S = \angle G_1T_1M$
$\angle GG_1R = \angle T_1G_1M$ $\Rightarrow \angle TT_1S + \angle GG_1R = 180^\circ - \angle GMT = 60^\circ$

$S_{GG_1R} + S_{TT_1S} = \pi \cdot (T_1S)^2 \cdot \left(\frac{\angle TT_1S + \angle GG_1R}{360^\circ}\right) = \frac{\pi \cdot (T_1S)^2}{6}$

$S_{GMT} = \frac{\pi \cdot (4\sqrt{2})^2}{3} = \frac{\pi \cdot 32}{3}$

$S_{GG_1R} + S_{TT_1S} = \frac{\pi \cdot (\sqrt{8})^2}{6} = \frac{\pi \cdot 8}{6} = \frac{4\pi}{3}$

$S_{полов.} = \frac{32\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{36\pi}{3}$

$S_{общ} = 2 S_{полов.} = \frac{72\pi}{3}$, но $\triangle G_1MT_1$ и $\triangle G_1NT_1$ учитываются дважды

~~Ответ: $\frac{72\pi}{3}$~~

$S_{G_1MT_1} + S_{G_1NT_1} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 120^\circ \cdot G_1M \cdot MT_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8 = 4\sqrt{3}$

$S_{итоговая} = \frac{72\pi}{3} - 4\sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{72\pi}{3} - 4\sqrt{3}$.

4

21103505 (U53627 M1303206)

Черновик

№1

r - раз. прог.

$a_1 \in \mathbb{Z}$; $r \in \mathbb{N}$, т.к. возр. посл

все a_1 - .

$$\begin{array}{r} 15 \\ 9 \\ \hline 135 \end{array}$$

$S = a_1 + \ldots + a_6 = 6a_1 + \frac{5 \cdot 6}{2} r = 6a_1 + 15r.$

$$\begin{cases} a_{10} \cdot a_{16} > S + 39 \\ a_{11} \cdot a_{15} < S + 55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 9r)(a_1 + 15r) = a_1^2 + 24ra_1 + 135r^2 > S + 39 \\ (a_1 + 10r)(a_1 + 14r) = a_1^2 + 24ra_1 + 140r^2 < S + 55 \end{cases}$$

Сложим:

$a_1^2 + 24ra_1 + 135r^2 + S + 55 > a^2 + 24ra_1 + 140r^2 + S + 39$

$16 > 5r^2$

При $r \geq 2$: $5r^2 \geq 5 \cdot 4 = 20$

$\Downarrow$

$r = 1$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 15 + 39 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a + 15 + 55 \end{cases}$$

$a_1^2 + 18a_1 + 70 = 0$

$D/4 = 81 - 70 = 11$

$a_1 = -9 \pm \sqrt{11}$

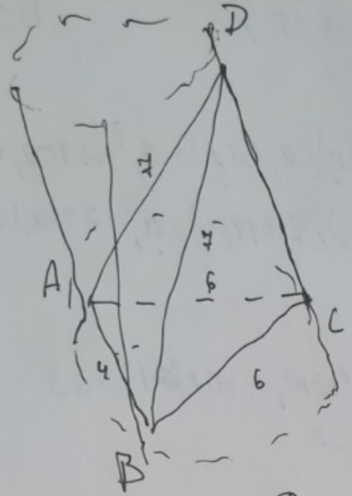
$$\begin{array}{r} 140 \\ -\ 70 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \\ -\ 54 \\ \hline 81 \end{array}$$

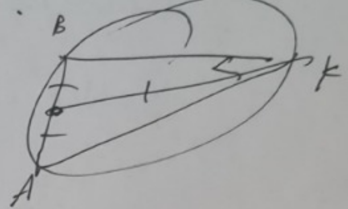
21103505 (U53627 M1303206)

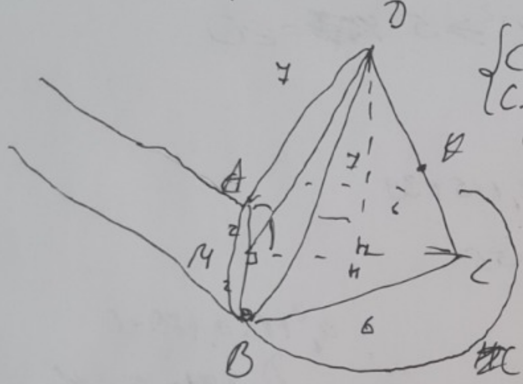
Черновик
№7

$AB = 4;\ AC = CB = 6$
$AD = DB = 7$



CD // оси цил.
$r_{цил}$ - min
CD - ?





$\begin{cases} CM \perp CB \\ CM \perp MD \end{cases}$ в р/б Δ-х $\Rightarrow (CDM) \perp CB \Rightarrow CD \perp CB$

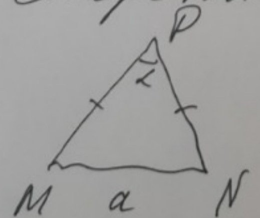
$CB \perp CD \Rightarrow CB \perp$ оси цилиндра

Окр. с BC - пересекает где-то ~~прямую~~ CD, пусть в точке K, ~~причем ∠CBK~~

$MC = \sqrt{36-4} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
$MD = \sqrt{49-4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

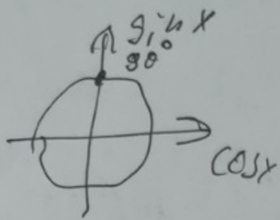
$\Delta ACD = \Delta BCD$ (3 стор) $\Rightarrow \angle DCB = \angle DCA \Rightarrow \Delta AKC = \Delta BKC \Rightarrow AK = BK$

По обоб. т-ме синусов для Δ с равными сторонами: $r_{оп} = \frac{a}{2\cdot\sin\alpha} \Rightarrow$
$r_{min} \Leftrightarrow \alpha = 90°$



$\cancel{BK^2 + AK^2 = AB^2}$ $BK = 2\sqrt{2}$
$\cancel{BK = \frac{AB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}}$
ΔAKB - прямоуг $\Rightarrow MK = r_{оп} = \frac{AB}{2} = 2$

Черновик



$$\begin{cases} (\underbrace{x-a}_{a-x})^2+(\underbrace{y-b}_{b-y})^2 \le 8 \quad (1) \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b;\ 8) \quad (2) \end{cases}$$

При $-4a+4b \le 8$:

$b-a \le 2$

(2) $a^2+b^2+4a-4b \le 0$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$

M - фиг. на Oxy, такая, что есть a, b, что м/б.

Иначе

$a^2+b^2 \le 8$

$\frac{a}{\ldots} = 2\sin\alpha$

р/б

$a+2=b$

$b=a+2$

$(a+2)^2+a^2$

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

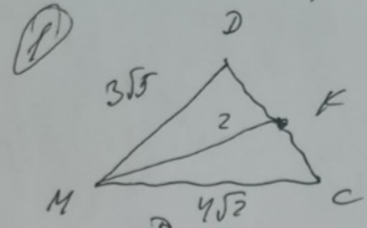
$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

$\sin 120 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

21103505 (U53627 M1303206)

Черновик $\sqrt{2}$

1



$3\sqrt{5} > 2 \Rightarrow$ ~~∠D~~

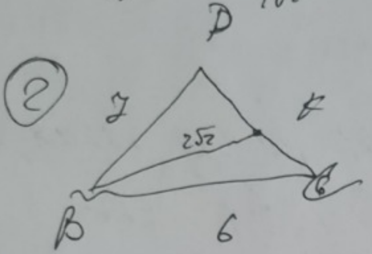
~~∠DKM > ∠MDK~~

~~∠MKC > ∠KCM~~

~~180°~~

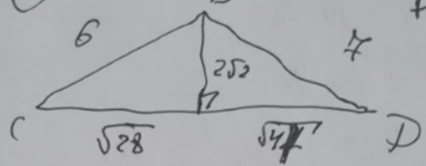
$(2\sqrt{2})^2 = 8$

2



$2\sqrt{2} < 6 < 7$

2 DC - min ~~max~~

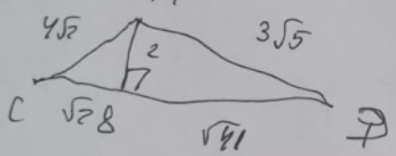


DC - min $= \sqrt{28} + \sqrt{41}$

CD max $= 6 + 7 = 13$

1

CD max $= 3\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$



CD min $= \sqrt{28} + \sqrt{41}$

$6 + 6$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103505**

ID профиля: **53627**

Вариант 23

Чистовик.

Б4.

$$\begin{cases} НОД(a, b, c) = 22 = 2^1 \cdot 11^1 \\ НОК(a, b, c) = 2^{16} \cdot 11^{19} \end{cases}$$

Пусть $a = 2^{x_a} \cdot 11^{y_a}$; $b = 2^{x_b} \cdot 11^{y_b}$; $c = 2^{x_c} \cdot 11^{y_c}$

$\Downarrow$

$max(x_a; x_b; x_c) = 16$

$max(y_a; y_b; y_c) = 19$

$min(x_a; y_a; y_b) = 1$

$min(y_a; y_b; y_c) = 1$

Пусть $t \in N$; $t \in [1; 16]$; $q \in N$; $q \in [1; 19]$

$\Downarrow$

$$кол\text{-}во(a, b, c) = \underbrace{кол\text{-}во(1; t; 16)}_{\text{с перестановками, но различных}} \cdot кол\text{-}во(1; q; 19)$$

Кол-во $(1; t; 16)$:

Если $t \in [2; 15]$, то 6 разл. перест., т.к. все числа разл. $\Rightarrow$

Всего таких $14 \cdot 6$ t

Если $t = 1$ или 16, то 3 разл. перест $\Rightarrow$ таких: 6

$\Downarrow$

кол-во $(1; t; 16)$: $15 \cdot 6 = 90$

Кол-во $(1; q; 19)$:

Если $q \neq 1; 16$: $6 \cdot 17$

Если $q = 1$ или 16: 6

кол-во $(1; q; 19)$: $18 \cdot 6 = 108$

$$\begin{array}{r} 108 \\ 90 \\ \hline 9720 \end{array}$$

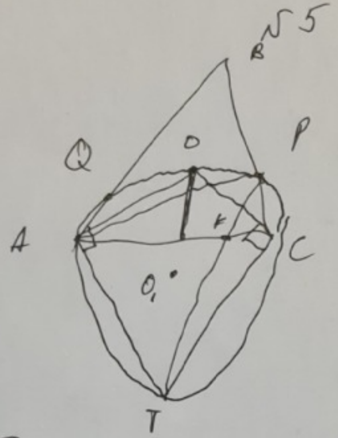
Всего: кол-во $(1; t; 16) \cdot$ кол-во $(1; q; 19) = 108 \cdot 90 = 9720$

Ответ: 9720.

1

Чистовик

②



Дано
$S_{APK}=15$
$S_{CPK}=13$
а) S_{ABC} - ?
б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{4}{7}$
AC - ?

Решение:

1) $T \in$ окр, т.к. $\angle T = 360° - 180° - \angle AOC$

2) $\angle AOC = 2\angle ABC = \angle APC$

3) $\angle PB = \frac{\smile AC - \smile PQ}{2}$

$\smile AC = \cancel{4B} = 2\angle APC = 4\angle B$

$\Downarrow$

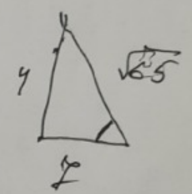
$\smile PQ = 2\angle B \Rightarrow \angle QAP = \angle B \Rightarrow AP = BP$

$\Downarrow$

$\frac{BP}{PC} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{15}{13}$

$\Downarrow$

$S_{ABC} = \left(\frac{28}{13}\right)^2 \cdot S_{KPC} = \frac{28^2}{13}$



Ответ: а) $\frac{28^2}{13}$.

$\cos 2B = 2\cdot\cos^2 B - 1 = \frac{98}{65} - 1 = \frac{33}{65}$

4) $AO = \frac{AC}{2\cdot\sin\angle B} = \frac{AC}{\frac{8}{\sqrt{65}}}$

$\cos B = \frac{7}{\sqrt{65}}$; $\sin B = \frac{4}{\sqrt{65}}$

~~$AC^2 = \frac{64}{65}AC^2 \cdot 2 - 2\cdot\frac{33}{65}AC^2$~~

~~Чистовик~~ Черновик.

№5.

ОДЗ: $\begin{cases} 2x+23>0 \\ x+34>0 \\ -x-4>0 \\ -x-4\neq 1 \\ x+34\neq 1 \\ 2x+23\neq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x>-11,5 \\ x>-34 \\ x<-4 \\ x\neq -5 \\ x\neq -33 \\ x\neq -11 \end{cases} \Rightarrow x\in(-11,5;-4) / \{-11;-5\}.$

① $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$

② $\log_{(x+4)^2}(x+34)$

③ $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

Пусть ① = ②

$\log_{(x+4)^2}(x+34)=\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$

$\frac{1}{2}\log_{(-x-4)}(x+34)=2\log_{(x+34)}(2x+23)$

$4\log_{(x+34)}(2x+23)=\frac{1}{\log_{(x+34)}(-x-4)}$

$4\log_{(x+34)}(2x+23)\cdot\log_{(x+34)}(-x-4)=1=\log_{(x+34)}(x+34)$

$\log_{(x+4)^2}(x+34)=2\log_{(x+34)}(2x+23)$

$\log_{(x+4)^2}(x+34)\cdot(x+4)^2=2\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

При $x=-11,5$:

~~$\log_{\sqrt{22,5}}$~~

При $x=-12$

② $\log_{(16^2)}(46)$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)\to+\infty$

$-15,5$

При $x\to-11,5$

①

$2\log_{x-34}(2x+23)^2 > \log_{x-34}\frac{1}{x-34}$

-1

$(2x+23)^2 > \frac{1}{x-34}$

$(4x^2+92x+23^2)(\cancel{\ldots}) - \frac{1}{x-34}$

всегда неотр.

$\sqrt{x+34} > \sqrt{2x+23}$

$x+34 > 2x+23$

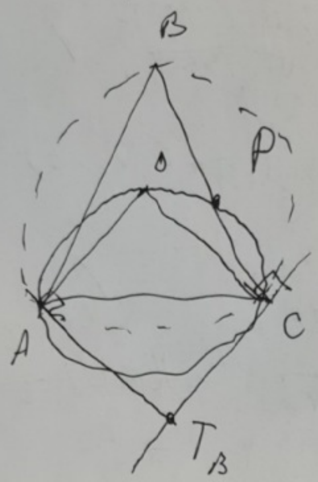
$\cancel{311 > x}$

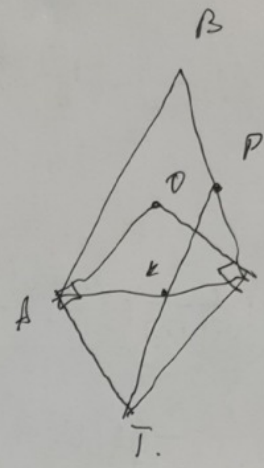
$\cancel{2x+23 > -4-x}$

$\cancel{3x > -27}$

$\cancel{x > -9}$

Черновик.





ТР/ПЛ

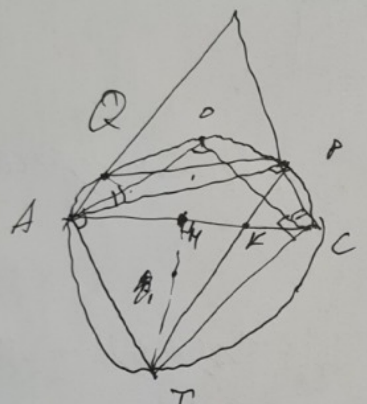
$S_{APK} = 15$

$S_{CPK} = 13$

а) S_{ABC} - ?

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{4}{7}$

AC - ?



$$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{15}{13} = \frac{AK}{CK}$$

$$\frac{\log_a b}{\log_c a} = \log_a b \cdot \log_a c$$

$\smile AC =$

$$\angle B = \frac{\smile AC - \smile PQ}{2}$$

$T \in$ окр, т.к. $\angle O + \angle T = 180^\circ \Rightarrow PK \cdot KT = AK \cdot CK$

$$OC = \frac{AC}{2 \cdot \sin B}$$

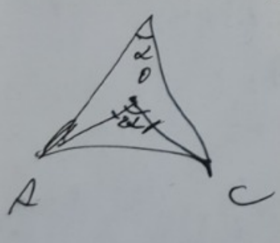
r

$$\angle ABC = \frac{\smile AC - \smile PQ}{2}$$

$r_1 =$

$$S_{AKT} = \left(\frac{AK}{KC}\right)^2 \cdot S_{PKC}$$

B $\angle KPC = \frac{\smile CT}{2}$



QA

$$\angle QP = \frac{\smile QP}{2}$$

$$\angle AOC = \frac{\smile AC}{2}$$

$$\angle ABC = \angle AOC - \underbrace{\angle QAP}_{\angle A - \angle PAC} = \frac{\angle AOC + \angle PAC - \angle A}{\angle APC}$$

$\angle APC = 2\angle B$

$49 + 16 = 65$

$\mathcal{N}$ 5 (' Черновик.

$$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) - \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = 1$$

$$2\log_{(2x+23)}(-x-4) + \log_{(2x+34)} \sqrt{x+34} = 1$$

На огр: л.ч. ↓ ПЧ ↑↑

~~На ОДЗ~~

-9

$$x^2 - 8x + 16 = \sqrt{x+34}$$

При $x = -12$:

$144 + 12 \cdot 8 + 6 > \sqrt{22}$

При $x = -4$:

$16 + 32 + 16 > \sqrt{30}$

$\Rightarrow$ нет корней

$x+34$ ①

② $2x+23$

③ $-x-4$

	$x \in (-11{,}5; -11)$	$x \in (-11; -5)$	$x \in (-5; -4)$
①	> 1	> 1	> 1
②	< 1	> 1	> 1
③	> 1	> 1	< 1

$\log$ ② > 0

①, ③ < 0

⇓

① > -1

③ > -1

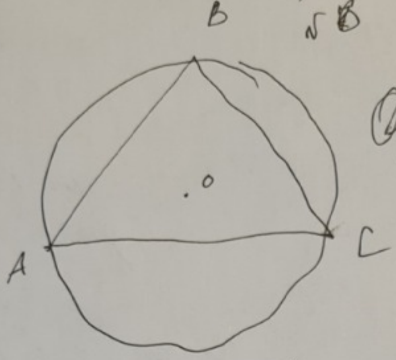
все +

① > 0

②, ③ < 0

Черновик.

№8



ОДЗ: $x\in(-11{,}5;-4)\setminus\{-11;-5\}$

$$\begin{cases} x>-11{,}5 \\ x\geq-34 \\ x<-4 \\ x\neq-5 \\ x\neq-33 \\ x\neq-11 \end{cases}$$

№5

① $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$

② $\log_{(x+4)^2}(x+34)$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$$\begin{cases} 2x+23>0 \\ x+34>0 \\ -x-4>0 \\ -x-4\neq1 \\ x+34\neq1 \\ 2x+23\neq1 \end{cases}$$

$\log_{x+34}(2x+23)=\log_{2x+23}(-x-4)$

Пусть ①=②:

$\log_5 7\cdot\log_5 8$

$\log_{(x+4)^2}(x+34)=\log_{\sqrt{34+x}}(2x+23)=$

$2x+23=2$

$\cancel{x=10{,}5}$

$\frac{1}{2}\log_{(-x-4)}(x+34)=2\log_{(x+34)}(2x+23)=2\log_{2x+23}(-x-4)$

$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

$b=a^{\frac{1}{\log_b a}}$

$\log_a$

$\cancel{\frac{\log_{(-x-4)}(x+34)}{\log_{(x+34)}(2x}}$ $\cancel{\frac{1}{4}=\frac{\log_{(x+34)}(2x+23)}{\log_{(-x-4)}(x+34)}}$

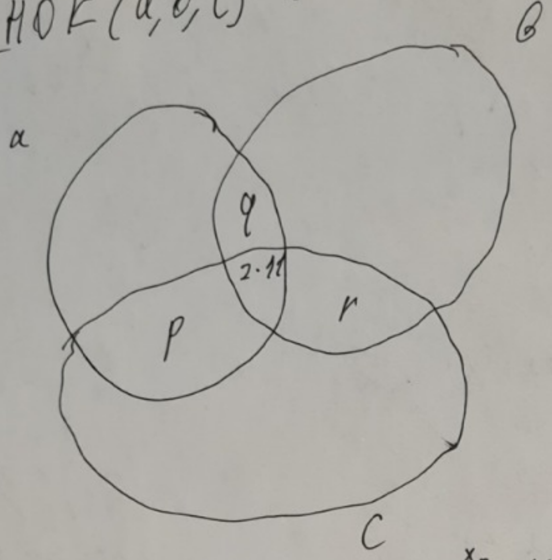
$4\log_{(x+34)}(2x+23)-\log_{(x+34)}(-x-4)=0$

$(2x+23)^4=-x-4$ не х огр; ПЧ: ↑↑ ЛЧ: ↓↓ ⇒ 1 корень

③ $\log_{\sqrt{2x+23}}(2x+23)^4=8$

Черновик. №4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=22=2\cdot 11 \\ НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$



– делители пр.

Среди a, b c числа делятся ~~на~~ только на 2 и 11 (среди пр)

~~ab~~c

Пусть: $a=2^{x_a}\cdot 11^{y_a}$

$b=2^{x_b}\cdot 11^{y_b}$

$c=2^{x_c}\cdot 11^{y_c}$

$\Downarrow$

$\max(x_a;x_b;x_c)=16$

$\max(y_a;y_b;y_c)=19$

$\min(y_a;y_b;y_c)=1$

$\min(x_a;x_b;x_c)=1$

18

6

10 8

$\log_a b=\cancel{\log_a c}\,\frac{1}{\log_a c}$

$\log_a b\cdot\log_a c$

$\log_b a\cdot\log_c a$