Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103432**

ID профиля: **804197**

Вариант 23

Вариант 23 — Чистовик — Математика, 11 класс

№1

$a_{10} = a + 9b$
$a_{11} = a + 10b$
$a_{15} = a + 14b$
$a_{16} = a + 15b$

$$S_6 = \frac{(a_1 + a_6)\cdot 6}{2} = 6a + 15b$$

Пусть $a = a_1$; b — разность данной прогрессии.

$$\begin{cases} a_{10}\cdot a_{16} > S + 39 \\ a_{11}\cdot a_{15} < S + 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+9b)(a+15b) > 6a+15b+39 \\ (a+10b)(a+14b) < 6a+15b+55 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 24ab + 135b^2 > 6a + 15b + 39 \\ a^2 + 24b + 140b^2 < 6a + 15b + 55 \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{a^2+24ab+135b^2+6a+15b+55>6a+15b+39}$$

Сложив оба неравенства получим:

$$\cancel{a^2} + \cancel{24ab} + 135b^2 + \cancel{6a} + \cancel{15b} + 55 > \cancel{6a} + \cancel{15b} + 39 + \cancel{a^2} + \cancel{24b} + 140b^2$$

$$16 > 5b^2$$

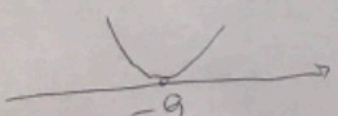
$$4 > 3{,}2 = \frac{16}{5} > b^2$$

$$2 > \sqrt{3{,}2} > b > -\sqrt{3{,}2} > -2$$

a_1 — целое число; все остальные члены ар. прогрессии тоже целые числа $\Rightarrow$ разность этой прогрессии тоже целое число. Итак $2 > b > 0 \Rightarrow b = 1$
Прогрессия возрастает $\Rightarrow b > 0$.

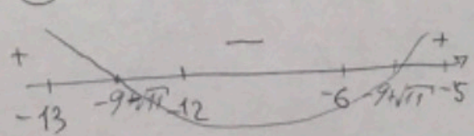
$$\begin{cases} (a+9)(a+15) > 6+15+39 \\ (a+10)(a+14) < 6+15+55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+18a+81>0 & \text{① условие} \\ a^2+18a+70<0 & \text{② условие} \end{cases}$$

① $a = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4\cdot 81}}{2} = -9$



$a \neq -9$

② $a = -9 \pm \sqrt{11}$



$a = -12; -11; -10; -9; -8; -7; -6.$

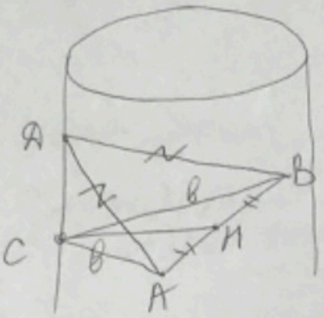
Оба условия должны выполняться $\Rightarrow$

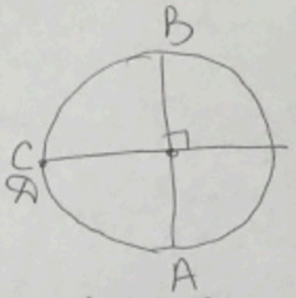
$\Rightarrow$ **Ответ:** $a \in \{-12\} \cup \{-11\} \cup \{-10\} \cup \{-8\} \cup \{-7\} \cup \{-6\}.$

Вариант 23 — №2 — Математика, 11 класс

Чистовик

$AB = 4$
$AC = CB = 6$
$AД = ДB = 7$





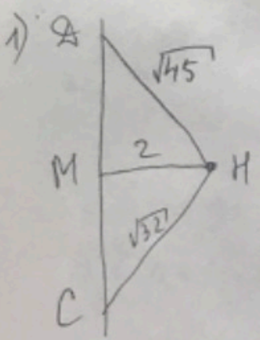
Вид сверху цилиндра

$\triangle ACB$ и $\triangle AДB$ – р/б $\Rightarrow ДH \perp AB$ и $CH \perp AB \Rightarrow$ $\Rightarrow AB \perp (CДH) \Rightarrow AB \perp CД \Rightarrow AB \parallel$ плоскости основания цилиндра, т.к. $CД$ ей $\perp$.

Значит, радиус основания минимален, когда AB – диаметр осн. цилиндра, т.е. $R = 2$.

В пл-ти $CДH$ возможны варианты:

1)

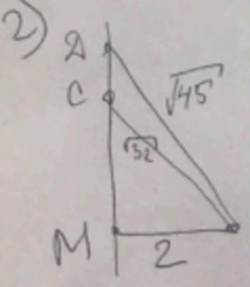


$ДH = \sqrt{7^2 - 2^2} = \sqrt{45}$

$CH = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32}$

$ДC = ДM + CM = \sqrt{45-4} + \sqrt{32-4} = \sqrt{41} + \sqrt{28} =$
$= \sqrt{41} + 2\sqrt{7}$

2)



$ДC = ДM - CM = \sqrt{41} - \sqrt{28} = \sqrt{41} - 2\sqrt{7}.$

Ответ: $CД$ может быть равна

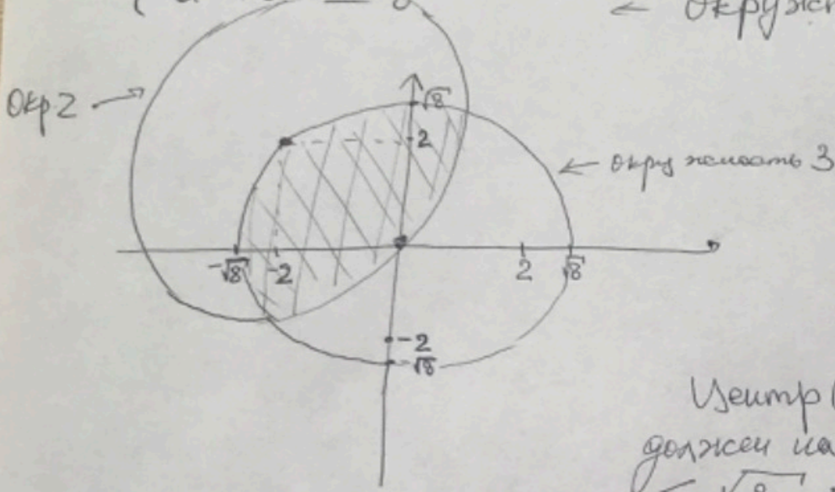
$$\sqrt{41} \pm 2\sqrt{7}.$$

Вариант 23 — Чистовик — Математика, 11 класс

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le \min(-4a+4b;\ b)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le -4a+4b\\ a^2+b^2\le 8\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8 & \leftarrow \text{окр. 1}\\ (a+2)^2+(b-2)^2\le 8 & \leftarrow \text{окр. 2}\\ a^2+b^2\le 8 & \leftarrow \text{окружность 3}\end{cases}$$

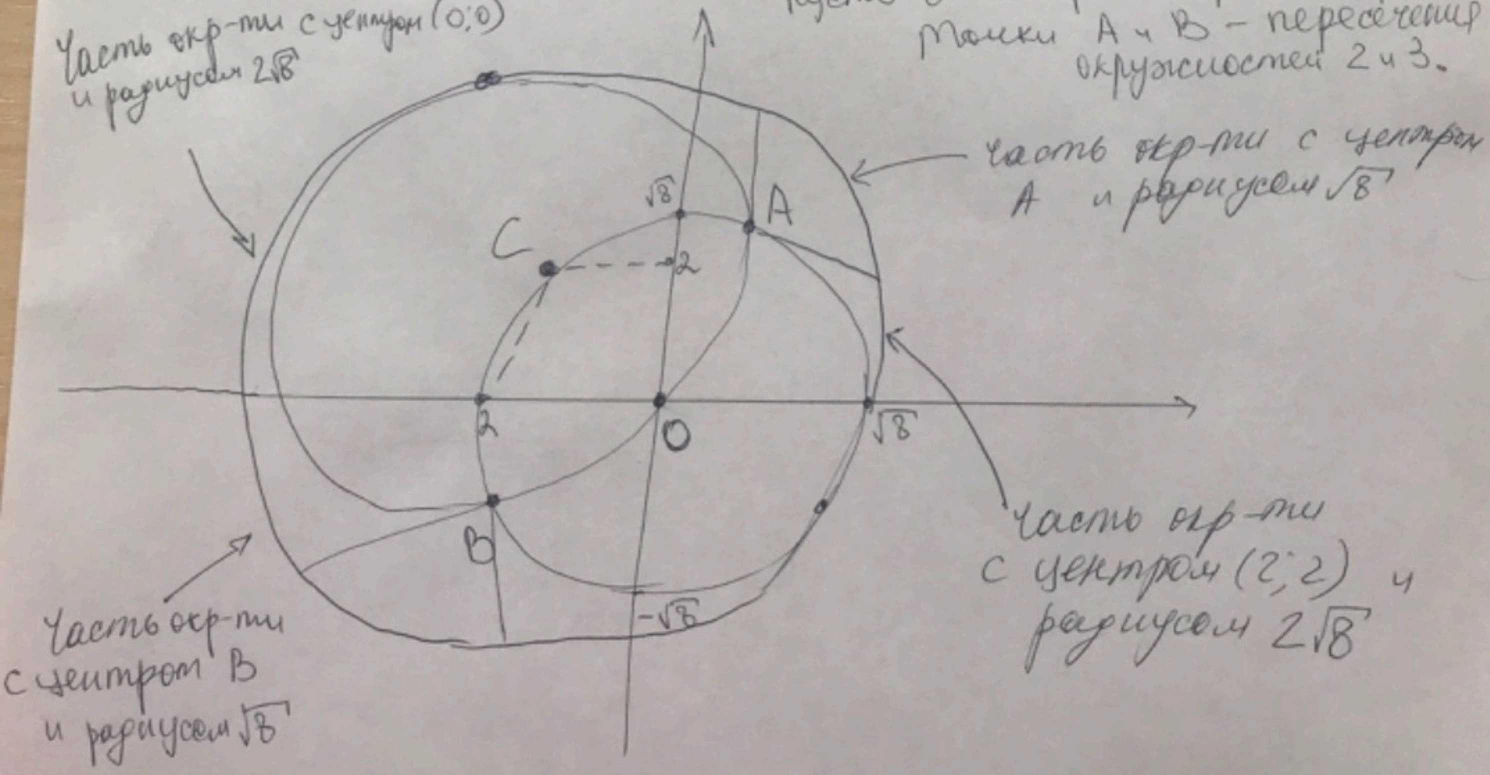


Центр $(x;y)$ первой окружности должен находиться на расстоянии $\le \sqrt{8}$ от заштрихованной области (пересечение окр. 1 и окр. 2)

Пусть C – центр второй окр-ти.

Пусть O – центр третьей окр-ти.

Точки A и B – пересечения окружностей 2 и 3.



Вариант 23 Чистовик Математика, 11 класс

№3. Продолжение

Найдём площадь фигуры: $\triangle BCO$ и $\triangle ACO$ — правильные треугольники со стороной $\sqrt{8}$.

Площадь маленьких секторов с центрами A и B — это вместе площадь $\frac{1}{3}$ круга с радиусом $\sqrt{8}$.

Так как площадь круга равна πR^2, то площадь этих секторов $= \frac{8\pi}{3}$.

Площадь остальной части — площадь двух секторов по 120° окружностей с радиусом $2\sqrt{8}$ минус площадь ромба ACBO

$$\frac{2}{3}(2\sqrt{8})^2\pi - (\sqrt{8})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{64\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

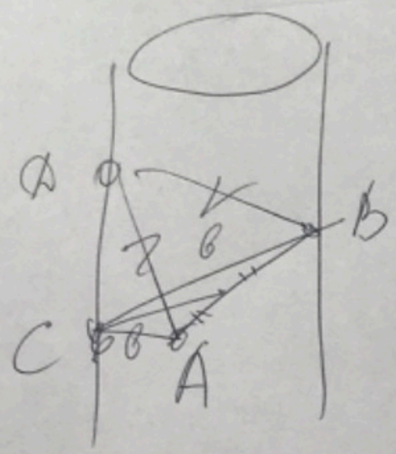
Итог сумма площадей: $\frac{8}{3}\pi + \frac{64\pi}{3} - 4\sqrt{3} =$

$= 24\pi - 4\sqrt{3}$

Ответ: $S_M = 24\pi - 4\sqrt{3}$.

Черновик №2. СD - ?

AB = 4
AC = CB = 6
AD = DB = 7



21103432 (U804197 M1303950)

Черновик

Найдём площадь фигуры $\triangle BCO$ и $\triangle ACO$ – правильные со стороной $\sqrt{8}$

– Площадь маленьких секторов с ц. A и B – это вместе площадь $\frac{1}{3}$ круга с рад. $\sqrt{8}$

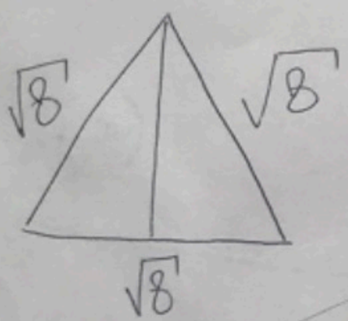
$$\frac{8\pi}{3}$$

Площадь остальной части – это площадь двух секторов по $120°$ окружностей рад. $2\sqrt{8}$ минус площадь ромба ACBO

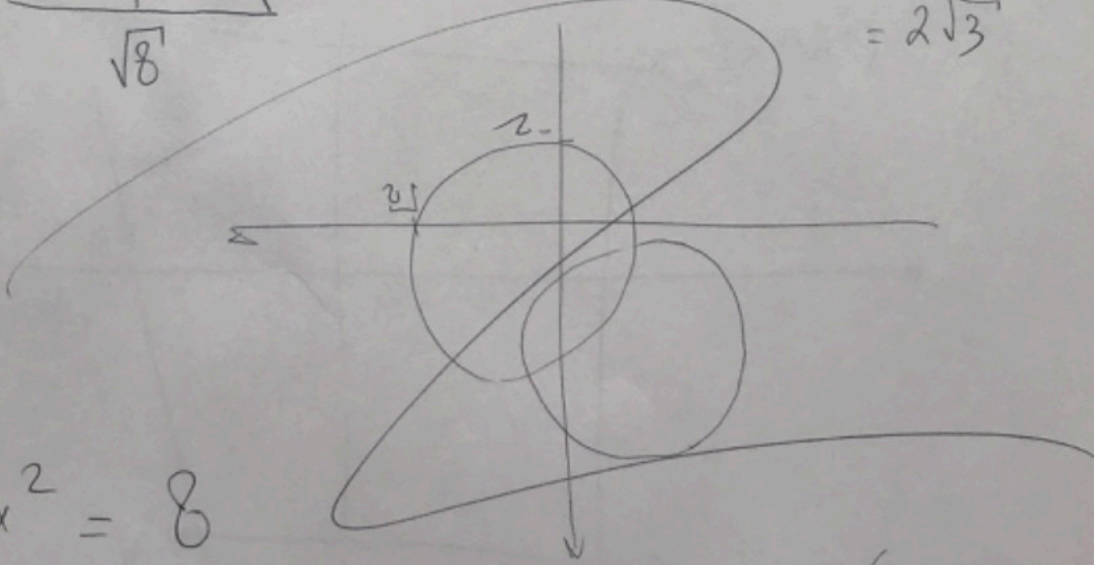
$$\frac{2}{3}(2\sqrt{8})^2\pi - (\sqrt{8})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{64\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

$$\frac{8\pi}{3} + \frac{64\pi}{3} - 4\sqrt{3} = \boxed{24\pi - 4\sqrt{3}}$$

Ответ.



$$S = \cancel{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{8} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{48}}{\cancel{2}} = \frac{\sqrt{12}}{\cancel{2}} = 2\sqrt{3}$$



$$\left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2 + x^2 = 8$$

$$\frac{8}{4} + x^2 = 8$$

$$x^2 = 6$$

$$x = \sqrt{6}$$

№3

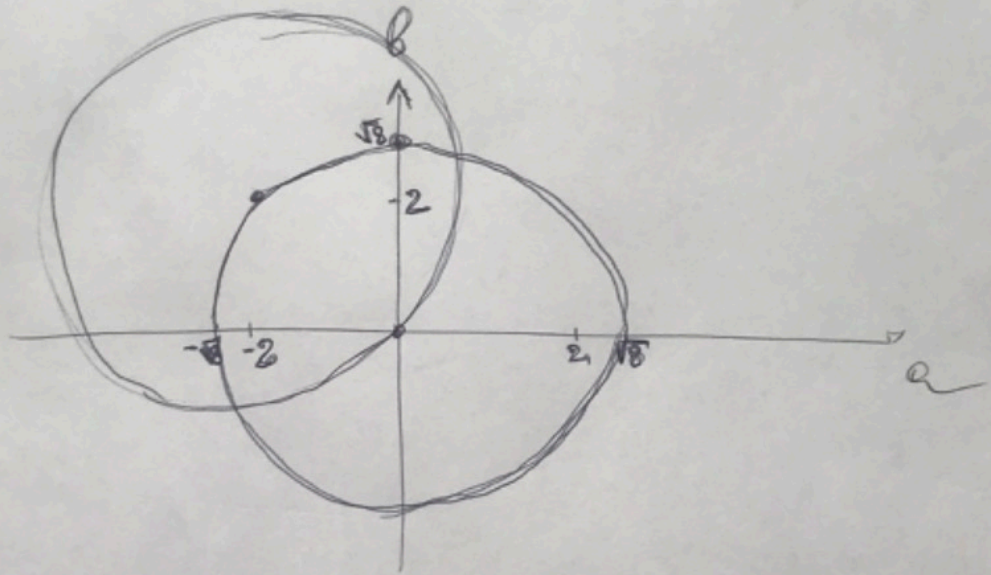
ЧЕРНОВИК

S_M - ?

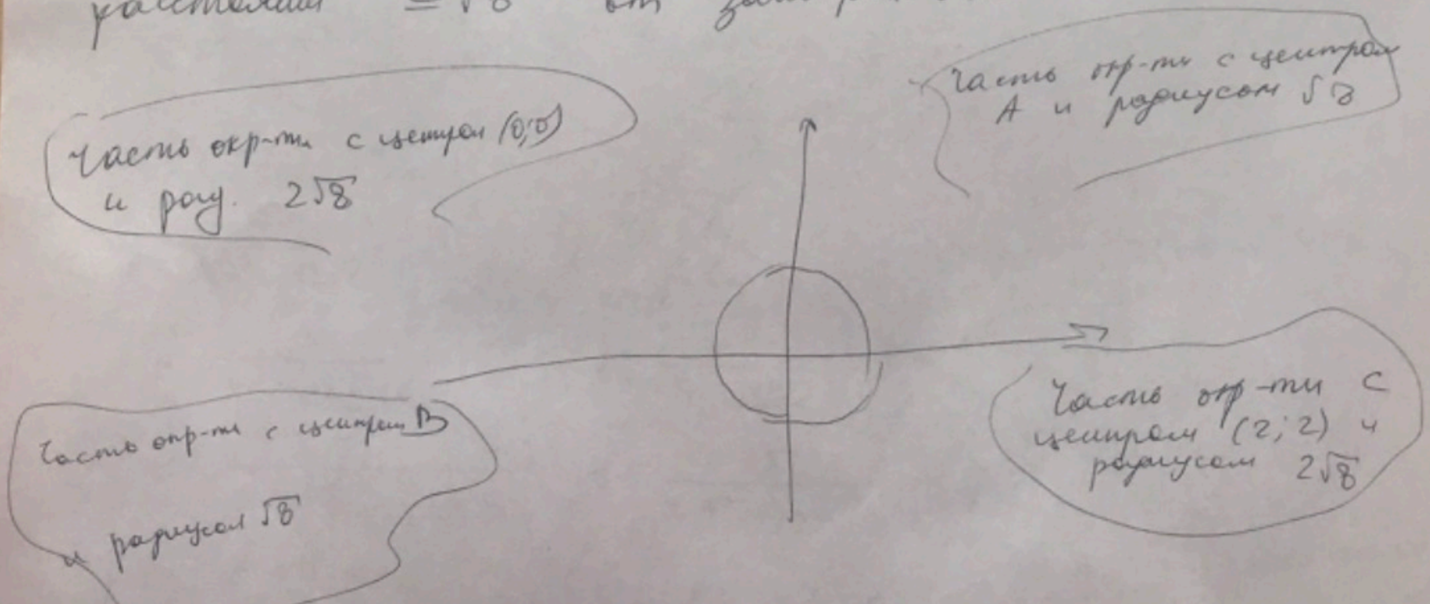
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b,\ 8) \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le -4a+4b \\ a^2+b^2 \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 & \text{- окр 1} \\ (a+2)^2+(b-2)^2 \le 8 & \text{окр 2} \\ a^2+b^2 \le 8 & \text{окр 3} \end{cases}$$



Центр $(x;y)$ первой окр-ти должен находиться на расстоянии $\le \sqrt{8}$ от заштрих. области



21103432 (U804197 M1303950)

a $\quad a+b \quad a+2b \quad$ **№ 1** $\quad a+3b \quad a+4b \quad a+5b$

Черновик

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6$

$a_6 \quad a_5 \quad a_4 \quad a_3 \quad a_2 \quad a_1$

$a_{10} = a + 9b$
$a_{11} = a + 10b$
$a_{15} = a + 14b$
$a_{16} = a + 15b$

$$S_6 = \frac{(a_1 + a_6) \cdot 6}{2} = (a + a + 5b)3 = 6a + 15b$$

$a_1 - ?$

$a_{10} \cdot a_{16} > S + 39$
$a_{11} \cdot a_{15} < S + 55$

$$\begin{cases} (a+9b)(a+15b) > 6a + 15b + 39 \\ (a+10b)(a+14b) < S + 55 \end{cases}$$

$9(10+5) = 90 + 45 = 135$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a^2 + 24ab + 135b^2 > 6a + 15b + 39 \\ a^2 + 24ab + 140b^2 < 6a + 15b + 55 \end{cases}$$

1) $\cancel{a^2} + \cancel{24ab} + 135b^2 + \cancel{6a} + \cancel{15b} + 55 > \cancel{a^2} + \cancel{24ab} + 140b^2 + \cancel{6a} + \cancel{15b} + 39$

$\cancel{135}$ $\quad 55 - 39 > 5b^2$
$16 > 5b^2$

$3,2 = 3\frac{1}{5} = \frac{16}{5} > b^2$

$2 > 1,\dots = \sqrt{3,2} > b > -\sqrt{3,2} < -1,\dots > -2$

$\cancel{b}$ b может быть $= 1, 0, -1$

$\begin{array}{r} 135 \\ -\ 54 \\ \hline 81 \end{array}$

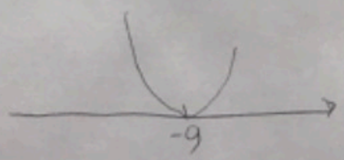
① $b = 1$ $\quad$ 1) $(a+9)(a+15) > 6a + 15 + 39$

$a^2 + 24a + 135 > 6a + 54$

$a^2 + 18a + 81 > 0$

$\begin{array}{r} \times 18 \\ 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$ $\quad 18 = 9 \cdot 2$

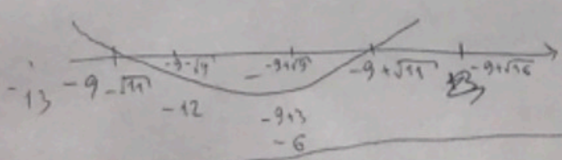
$$a = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 81}}{2} = \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 324}}{2} = -9$$



$a \neq -9$

2) $(a+10)(a+14) < 6a + 15 + 55$
$a^2 + 14a + 10a + 140 < 6a + 70$
$a^2 + 18a + 70 < 0$

$$a = \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 280}}{2} = \frac{-18 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -9 \pm \sqrt{11}$$



$a = -12;\ -11;\ -10;\ -8;\ -7;\ -6$

21103432 (U804197 M1303950)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103432**

ID профиля: **804197**

Вариант 23

Вариант 23 Чистовик. Математика, 11 класс

4. $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 22 = 2^1 \cdot 11^1 \\ НОК(a;b;c) = 2^{16} \cdot 11^{19} \end{cases}$

НОД(a;b;c) и НОК(a;b;c) раскладывается единственным образом только на 2 простых множителя: 2 и 11 ⇒

⇒ числа a; b; c тоже будут раскладываться только на простые множители 2 и 11 (2 и 11 могут быть не только в первой степени).

У НОК степень двойки = 16 ⇒ у одного из чисел точно должна быть такая же степень при двойке.

У НОК степень одиннадцати = 19 ⇒ у одного из чисел точно должна быть такая же степень при одиннадцати.

У НОД степень двойки = 1 ⇒ у одного из чисел точно должна быть такая же степень при двойке.

У НОД степень одиннадцати = 1 ⇒ у одного из чисел точно должна быть такая же степень при одиннадцати.

Способов выбрать из 3 чисел два, у одного из которых при 2-ке будет степень 1, а у другого – 16, всего 3.

Способов выбрать из 3 чисел два, у одного из которых при 11-ти будет степень 1, а у другого – 19, всего 3.

Способов выбрать степень двойки третьего числа = 16

Способов выбрать степень одиннадцати третьего (оставшегося) числа = 19.

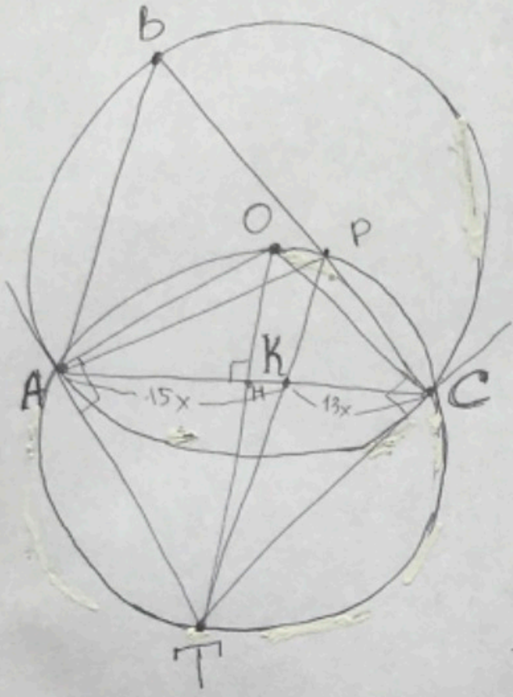
Тогда количество троек натуральных чисел (a;b;c), удовлетворяющих данной системе ур-ний будет $3 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 19 =$
$= 2736$

Ответ: 2736.

21103432 (U804197 M1303951)

Вариант 23 Чистовик Математика, 11 класс

6.



$S_{(APK)} = 15$

$S_{(CPK)} = 13$

а) $S_{(ABC)}$ – ?

1) OT – сер. пер. к AC;
$\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow$ OT диаметр второй окружности
(OT – сер. пер. к AC, т.к. $\triangle AOT = \triangle COT \Rightarrow \triangle AOK = \triangle COK$)

2) Дуги AT и CT равны $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AOT = \angle TOC = \angle APT = \angle TPC$
(опираются на равные дуги).
И все они равны углу ABC, т.к. $\angle AOC$ – центральный, а $\angle ABC$ – соотв. впис.

3) $\dfrac{AK}{KC} = \dfrac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle KPC}} = \dfrac{15}{13}$

4) $\triangle KPC \sim \triangle ABC$ по двум углам ($\angle P = \angle B$; $\angle C$ – общий)

5) $\dfrac{S(ABC)}{S(KPC)} = \underset{\text{коэфф. подобия}}{k^2} = \left(\dfrac{28x}{13x}\right)^2 = \dfrac{28^2}{13^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{(ABC)} = \dfrac{28^2}{13^2} S_{\triangle KPC} = \dfrac{28^2}{13^2} \cdot 13 = \dfrac{784}{13}$

Ответ: А) $S_{(ABC)} = \dfrac{784}{13}$

21103432 (U804197 M1303951)