Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103333**

ID профиля: **874284**

Вариант 23

Чистовик.

1

Задача № 1

Назовём разность арифметической прогрессии – p; $p>0$; $p, a \in \mathbb{Z}$

$\to S = 6a_1 + 5p$; $a_{10} \cdot a_{16} = (a_1+9p)(a_1+15p)$; $a_{11} a_{15} = (a_1+10p)(a_1+14p)$

$$\begin{cases} (a_1+9p)(a_1+15p) > 6a_1+5p+39 \\ (a_1+10p)(a_1+14p) < 6a_1+5p+55 \end{cases} \to \begin{cases} a_1^2 + 24a_1p + 9\cdot15p > 6a_1+5p+39 \\ a_1^2 + 24a_1p + 10\cdot14p < 6a_1+5p+55 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} a_1^2 + 24a_1p > 6a_1+5p+39-15\cdot9p \\ a_1^2+24a_1p < 6a_1+5p+55-10\cdot14p \end{cases} \to 6a_1+5p+55-10\cdot14p^2 > 6a_1+5p+39-15\cdot9p^2 \to$$

$\to (10\cdot14 - 15\cdot9)p^2 < 55-39 = 16 \to$

$\to 5p^2 < 16$; $p \in \mathbb{Z}$; $p>0 \to p = 1$

Тогда:
$$\begin{cases} (a_1+9)(a_1+15) > 6a_1+5+39 \\ (a_1+10)(a_1+14) < 6a_1+5+55 \end{cases} \to \begin{cases} a_1^2 + 18a_1 + 91 > 0 \to \text{всегда верно, так как это } (a_1+9)^2+10>0 \\ a_1^2 + 18a_1 + 80 < 0 \end{cases}$$

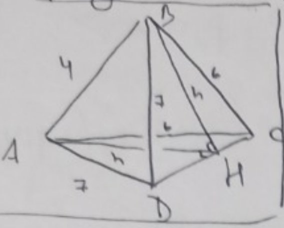
$\to (a_1+9)^2 - 1 < 0$; $a \in \mathbb{Z} \to a_1 = -9$

Ответ: -9

21103333 (U874284 M1296987)

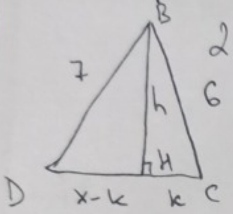
Чистовик Задача №2 2

Нарисуем тетраэдр и заметим, что $\triangle BDC = \triangle ADC$



Если мы опустим из A и B высоты на CD - они равны и лежат в плоскости, перпендикулярной плоскости цилиндра. → В этой плоскости и лежат радиусы.

Рассмотрим треугольник BDC; $CD = x$; $HC = x$; $DH = x - C$

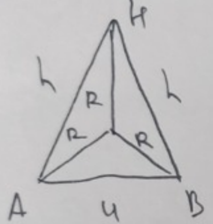


2 Теоремы Пифагора: $49 - (x-k)^2 = 36 - k^2$

$49 - x^2 - k^2 + 2xk = 36 - k^2 \to k = \frac{x^2-13}{x} \to DH = x - \frac{x^2-13}{x} = \frac{13}{x}$

$BH^2 = h^2 = 49 - \frac{13^2}{x^2}$

Рассмотрим треугольник ABH, лежащий в плоскости с радиусами



$S_{HAB} = \frac{4\cdot h\cdot h}{4R} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{h^2-4} \to R = \frac{h^2}{2\sqrt{h^2-4}} =$

$= \frac{\frac{49x^2-13}{x^2}}{\frac{2\sqrt{45x^2-13}}{x}} = \frac{49x^2-13}{2x\sqrt{45x^2-13}} = R(x)$

$R'(x) = \frac{(49x^2-13)\left(2x\sqrt{45x^2-13}\right)' - \left(2x\sqrt{45x^2-13}\right)(98x)}{4x^2(45x^2-13)} = 0$ - даст минимальный R

$\Rightarrow R'(x) = \frac{(49x^2-13)\left(2\sqrt{45x^2-13} + \frac{90x^2}{\sqrt{45x^2-13}}\right) - \left(2x\sqrt{45x^2-13}\right)(98x)}{4x^2(45x^2-13)} = 0 \Rightarrow$

$(49x^2-13)\left(2\cancel{\sqrt{45x^2-13}} + 90x^2\right) - 2x\cdot 98x\cdot(45x^2-13) = 0$

$(49x^2-13)(180x^2-26) - \left(196x^2(45x^2-13)\right) = 0$

$49\cdot 180x^4 - 13\cdot 180x^2 - 26\cdot 49x^2 + 13\cdot 26 - 196\cdot 45x^4 + 13\cdot 196x^2 = 0$

$16\cdot 13x^2 - 26\cdot 49x^2 + 8820x^4 - 8820x^4 + 13\cdot 26 = 0$

$-13(98-16)x^2 + 13\cdot 26 = 0 \to (98-16)x^2 = 26 \to x^2 = \frac{26}{82} = \frac{13}{41} \to x = \sqrt{\frac{13}{41}}$

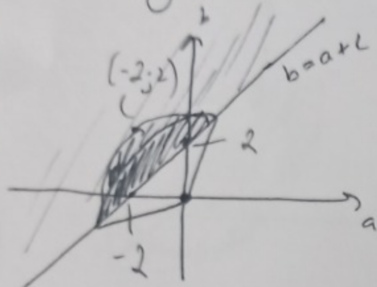
Ответ: $\sqrt{\frac{13}{41}}$

21103333 (U874284 M1296987)

Чистовик Задача № 3 (3)

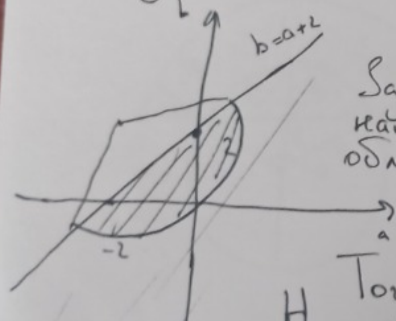
1) Рассмотрим первое уравнение системы
$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8$. Если мы изобразим на плоскость (координатной) точки x, y, a и b, мы заметим что перед нами теорема Пифагора. Тогда, если мы найдём все подходящие точки a, b, то ~~тогда~~ фигура M - все точки (a;b), подходящие под условие и ещё все точки на расстоянии не более $\sqrt{8}$ от них.

2) Допустим $-4a+4b \ge 8 \to \begin{cases} a^2+b^2 \le 8 \\ -4a+4b \ge 8 \end{cases} \to \begin{cases} a^2+b^2 \le 8 \\ b \ge a+2 \end{cases}$



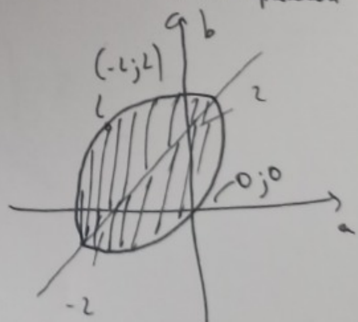
Здесь черная заштрихованная (сильно) область - нужная нам. Заметим, что она проходит через (-2;2)

Допустим $-4a+4b \le 8 \to \begin{cases} a^2+b \le -4a+4b \\ -4a+4b \le 8 \end{cases} \to \begin{cases} (a+2)^2+(b-2)^2 \le 8 \\ b \le a+2 \end{cases}$

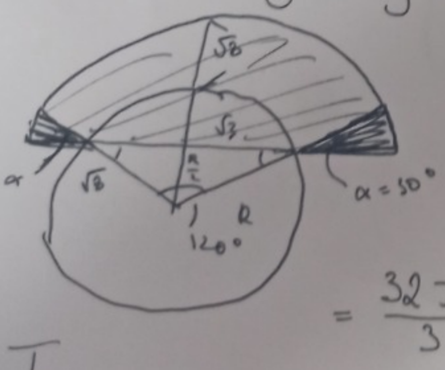


Здесь сильно заштрихованная черная область - нужная нам. Заметим, что она проходит через (0;0) и симметрична области, полученной из первого "допустим" относительно прямой $b=2a$.

Тогда общая фигура со всеми a, b:



Найдём площадь, которую одна половина дает для фигуры M:



$$S_{\frac{1}{2}M} = \underbrace{\frac{\pi(2\sqrt{8})^2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{8})^2}_{\text{слабо заштриховано}} + \underbrace{2\cdot\frac{1}{12}\cdot\pi(\sqrt{8})^2}_{\text{сильно закрашено}} =$$

$$= \frac{32\pi}{3} - 2\sqrt{3} + \frac{8}{6}\pi = \frac{(64+8)\pi}{6} - 2\sqrt{3} = \frac{72\pi - 12\sqrt{3}}{6}$$

Тогда полная площадь $= 2\cdot S_{\frac{1}{2}M} = \frac{72\pi - 12\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\frac{72\pi - 12\sqrt{3}}{3}$

1

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 8 \\ -4a+4b \ge 8 \end{cases} \to \begin{cases} a^2+b^2 \le 8 \\ b \ge 2+a \end{cases}$$

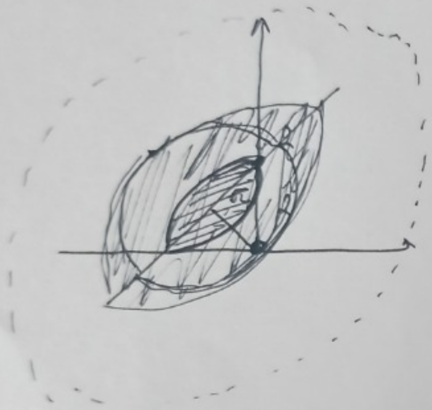
$$\begin{cases} a^2+b^2 \le -4a+4b \\ -4a+4b \le 8 \end{cases} \to \begin{cases} a^2+b^2 \le -4a+4b \\ b \le 2+a \end{cases}$$

Черновик

4

$$a^2+4a+4+b^2-4b+4-8 \le 0$$

$$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$$



$$(a+2)^2+a^2=8$$

$$2a^2+4a+4=8$$

$$2a^2+4a-4=0$$

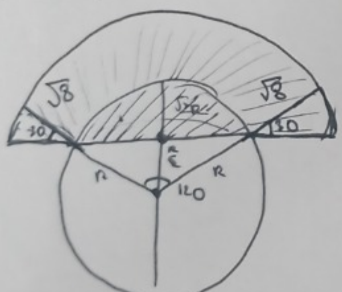
$$a^2+2a-2=0$$

$$(a+1)^2-3=0$$

$$(a+1)^2=3$$

$$a+1=\pm\sqrt{3}$$

$$a=\pm\sqrt{3}-1$$



$$\frac{\pi R^2}{3}-\frac{\sqrt{3}R^2}{4}=$$

$$\left(\frac{\pi(R+\sqrt{8})^2}{3}-\frac{\sqrt{3}R^2}{4}+2\cdot\frac{1}{12}\pi\cdot 8\right)\cdot 2 \quad ; R=\sqrt{8}$$

$$\left(\frac{\pi\cdot(2\sqrt{8})^2}{3}-\frac{\sqrt{3}\cdot 8}{4}+\frac{8}{6}\pi\right)\cdot 2 =$$

$$\left(\frac{\pi\cdot 4\cdot 8\cdot 2}{6}+\frac{\pi\cdot 8}{6}-2\sqrt{3}\right)2=\left(\frac{9\cdot 8\pi}{6}-2\sqrt{3}\right)\cdot 2=$$

$$\frac{56\pi-12\sqrt{3}}{3}$$

Черновик 5

$$(49x^2-13)\left(2(45x^2-13)+90x^2\right)-\left(2x\cdot 98x\cdot(45x^2-13)\right)=$$

$$(49x^2-13)(180x^2-26)-\left(196x^2(45x^2-13)\right)=0$$

$$x^2=t\geq 0$$

$$(49t-13)(180t-26)-\left(196t(45t-13)\right)=0$$

$$49\cdot 180t^2-\cancel{13\cdot 180t}-26\cdot 49t-196\cdot 45t^2+\cancel{13\cdot 196t}=0$$
$$+13\cdot 26$$

$$16\cdot 13t-\underset{13}{26}\cdot\underset{98}{49}t+\cancel{8820t^2}-\cancel{8820t^2}+13\cdot 26=0$$

$$\begin{array}{r} 180\\ \times\ 49\\ \hline 1620\\ 72\ \ \\ \hline 8820 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 196\\ \times\ 45\\ \hline 980\\ 784\ \ \\ \hline 8820 \end{array}$$

$$-\cancel{13}(98-16)t+\cancel{13}\cdot 26=0$$

$$-(98-16)t+26=0$$

$$(98-16)t=26$$

$$72t=26$$

$$t=\frac{26}{72}=\frac{13}{36}\rightarrow x=\frac{\sqrt{13}}{6}$$

21103333 (U874284 M1296987)

$r' =$

Черновик Б

$b = a + 2$

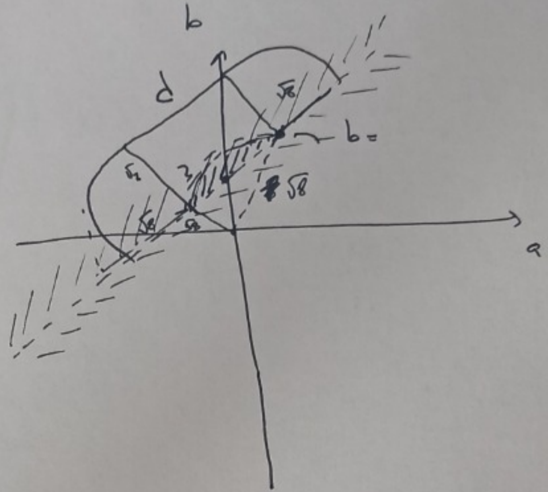
$\left(2x\sqrt{45x^2-13}\right)' = 2\sqrt{45x^2-13} + 2x\,($ $\qquad a^2 + (a+2)^2 = 8$

$f(g(x))' =$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \le 8 \\ -4a + 4b \ge 8 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 \le -4a + 4b$$

$-a + b \ge 2$

$a^2 + b^2 - 2ab \ge 4$



$\cancel{ab} =$

$2ab + 4 \le a^2 + b^2 \le 8$

$2ab + 4 \le 8$

$ab \le 2$

$b - a \ge 2$

$b \ge 2 + a$

$a^2 + b^2 \le -4a + 4b$

$-4a + 4b \le 8$

$-a + b \le 2$

$$2\sqrt{45x^2-13} + 2x \cdot \frac{\cancel{\sqrt{45x^2-13}}\ 90x}{} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(45x^2-13\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$2\sqrt{45x^2-13} + \frac{90x^2}{\sqrt{45x^2-13}}$$

$$r' = \frac{(49x^2-13)\left(2\sqrt{45x^2-13} + \frac{90x^2}{\sqrt{45x^2-13}}\right) - \left(2x\sqrt{45x^2-13}\right)(98x)}{} = 0$$

$\ldots$

$x \ne 0;\ x \ne \pm\sqrt{\frac{13}{45}}$

$$\frac{(49x^2-13)\left(2\cdot(45x^2-13) + 90x^2\right)}{\sqrt{45x^2-13}} - 2x \cdot 98x \cdot \sqrt{45x^2-13} =$$

21103333 (U874284 M1296987)

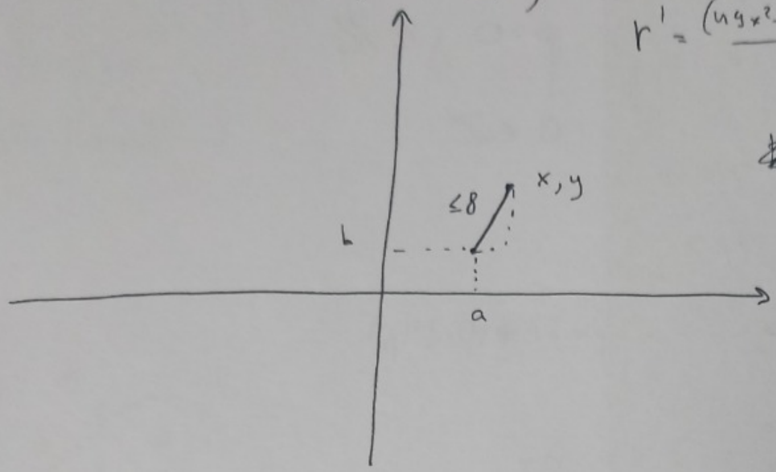
③ Черновик ~~8~~ 7

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8)\end{cases}$$

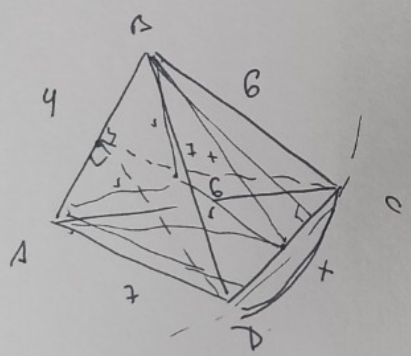
$$r = \frac{\frac{49x^2-13}{x^2}}{\frac{2\sqrt{45x^2-13}}{x}} = \frac{49x^2-13}{2x\sqrt{45x^2-13}}$$

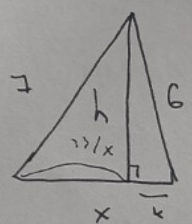
$$r' = \frac{(49x^2-13)(2x\sqrt{45x^2-13})' - (2x\sqrt{45x^2-13})(98x)}{4x^2(45x^2-13)} = 0$$

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \frac{g'(x)\cdot f(x) - g'(x)f(x)}{(f(x))^2}$$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2 \le 8 \\ -4a+4b \ge 8\end{cases} \rightarrow (b-a) \ge 2 \rightarrow b^2+a^2-2ab \ge 4 \rightarrow 8 \ge 4+2ab \quad 4 \ge 2ab \quad ab \le 2 \\ \begin{cases}a^2+b^2 \le -4a+4b \\ -4a+4b \le 8\end{cases}\end{array}\right.$$





$36 - \cancel{k^2} = 49 - x^2 - \cancel{k^2} + 2kx$

$2kx = x^2 - 13$

$k = \frac{x^2-13}{x}$

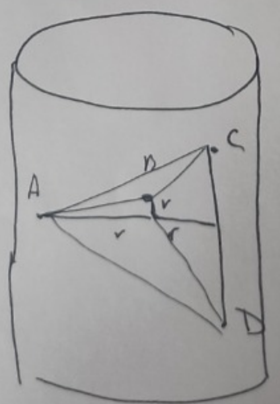
$S = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot \sqrt{h^2-4}$

$$r = \frac{49 - \frac{13^2}{x^2}}{2\sqrt{49-\frac{13^2}{x^2}-4}} =$$

$x - \frac{x^2-13}{x} =$

$\frac{13}{x}$

$$\frac{49-\frac{13^2}{x^2}}{2\sqrt{45-\frac{13^2}{x^2}}}$$



$r = \min$

$\sqrt{49 - \frac{13^2}{x^2}} = h$

$\frac{4h^2}{4r} = \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot \sqrt{h^2-4}$

$r = \frac{h^2}{2\sqrt{h^2-4}}$

Черновик. ~~10~~ 8

1 $S = 6a_1 + 5p$

$$\begin{cases} (a_1+9p)(a_1+15p) > 6a_1+5p+39 \\ (a_1+10p)(a_1+14p) < 6a_1+5p+55 \end{cases}$$

$p > 0$; $\in \mathbb{Z}$

$a \in \mathbb{Z}$

$a_1^2 + 24a_1p + 15\cdot 9p_1^2 > 6a_1 + 5p + 39$

$a_1^2 + 24a_1p + 10\cdot 14p_1^2 < 6a_1 + 5p + 55$

$\cancel{6a_1 + 5p} + 39 - 15\cdot 9p_1^2 < \cancel{6a_1 + 5p} + 55 - 10\cdot 14p_1^2$

$(10\cdot 14 - 15\cdot 9)p^2 < \underbrace{55-39}_{16}$

$(140-135)p^2 < 16$

$5p^2 < 16$

$p^2 < \frac{16}{5} \to \boxed{p = 1}$

$$\begin{array}{r} 135 \\ -\ 44 \\ \hline 91 \end{array}$$

$(a_1+9)(a_1+15) > 6a_1 + 44$

$a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 44$

$a_1^2 + 18a_1 + 91 > 0$

$(a_1+9)^2 + 10 > 0 \to$ всегда

$(a_1+10)(a_1+14) < 6a_1 + 60$

$a_1^2 + 18a_1 + 140 - 60 < 0$

$a_1^2 + 18a_1 + 81 - 1 < 0$

$(a_1+9)^2 - 1 < 0$

$(a_1+9)^2 < 1$

$a_1 = -9$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103333**

ID профиля: **874284**

Вариант 23

Чистовик (1)

Задача № 4

Заметим, что так как числа a, b, c имеют НОК $2^{16} \cdot 11^{19}$, то они состоят только из степеней двойки и одиннадцати. А так как они состоят только из них, то у каких-то чисел обязательно будут множители 2^{16} и 11^{19}, иначе НОК станет другим. Также, у каких-то чисел будут множители 2^1 и 11^1, иначе НОД изменится. Получается, что у одного из трёх чисел будет степень 1 у двойки, у второго - 16, а у третьего - любая от одного до 16. Так и с степенями у 11, только вместо 16 там 19.

Таким образом имеем:

Способы расставить степени двойки: $(3 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 16)$

Способы расставить степени одиннадцати: $(3 \cdot 1)(2 \cdot 1)(1 \cdot 19)$

+ Каждая тройка повторяется 3! раз (перестановки)

$\rightarrow N = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 16 \cdot 19}{3 \cdot 2} = 6 \cdot 16 \cdot 19 = 1824$ тройки чисел.

Ответ: 1824 тройки.

21103333 (U874284 M1296988)

Чистовик

2

Задача № 5

1) Область определения: $\begin{cases} \sqrt{x+34}>0;\neq 1 \\ 2x+33>0;\neq 1 \\ x\neq -4 \\ x+34>0 \\ -x-4>0 \end{cases} \to \begin{cases} x>-34;\neq -33 \\ x>-\frac{33}{2};\neq -\frac{32}{2}=-16 \\ x\neq -4 \\ -x-4>0 \to x<-4 \end{cases}$

2) Заметим, что немного преобразовав и перемножив эти числа, получаем следующее:

$$\cancel{2}\log_{\cancel{x+34}}(2x+23)\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\log_{|(x+4)|}(\cancel{x+34})\cdot\log_{\cancel{2x+23}}(-x-4)^2=2$$

Тогда, если одно из чисел равно другому (равно, например, a), то третье число $=a+1$ и их перемножение даёт $a^3+a^2=2\to$

$a^3+a^2-2=0\to(a-1)\left((a-1)^2+1\right)=0$

$a=1$

не даёт корней

Значит, два из чисел равны $a=1$, а другое $=2$

Значит, нам достаточно рассмотреть, когда ~~два из~~ какие-то равны единице и найти пересечение.

1) $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=1 \Leftrightarrow x+34=4x^2+92x+529\to(4x+55)(x+9)=0$

не подходит по одз

подходит

2) $\log_{(x+4)^2}(x+34)=1\to x^2+8x+16=x+34\to x^2+7x-18=0\to(x+9)(x-2)=0$

не подходит по одз

3) $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=1\to 2x+23=x^2+8x+16\to x^2+6x-7=0\to(x+7)(x-1)=0$

нет совпадений с первыми двумя $\to$ $\to$ корней здесь нет.

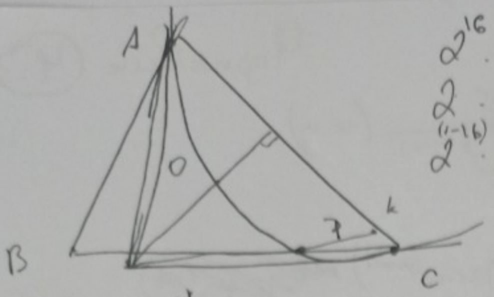
Получается единственный корень $x=-9$, который при подстановке даёт $\log_{\sqrt{25}}5=1$; $\log_{(5)^2}25=1$; $\log_{\sqrt{5}}5=2$

Ответ: -9

21103333 (U874284 M1296988)

Черновик (5)

Черновик (3)



$2^{16} \cdot 11$

$2 \cdot 11^{19} \to 22$

$2^{(1-16)} \cdot 11^{(1-19)}$

2^{x}

2^{2}

2^{m} 11^{n}

$\begin{array}{r} 32 \\ \times 19 \\ \hline 288 \\ 32 \\ \hline 608 \end{array}$

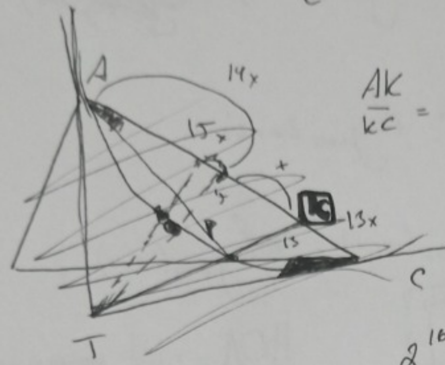
$\boxed{573}$

$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 16 \cdot 19$

$2^{15} \cdot 11$

$2 \cdot 11^{4}$

$2^{16} \cdot 2^{19}$



$\frac{AK}{KC} = \frac{15}{13}$

$\begin{array}{r} 6 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ \times 19 \\ \hline 1864 \\ 48 \\ \hline 1824 \end{array}$

одно число:

разные

$2^{16} \cdot 11^{19}$

$2^{(1-16)} \cdot 11^{(1-19)}$

$2^{(1-16)} \cdot 11^{19}$

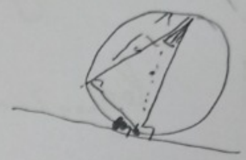
$2^{16} \cdot 11^{(1-19)}$

$16 \cdot 19 +$ $16 \cdot 19 - 19 - 16 =$

$2 \cdot 16 \cdot 19 - (16 + 19)$

$2 \cdot 11$

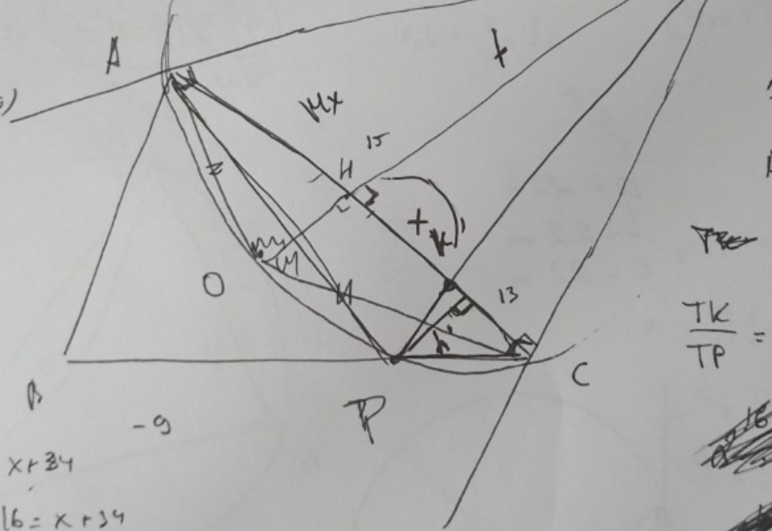
$2^{(1-16)} \cdot 11^{19}$



$2 \cdot 11$

$2^{(1-16)} \cdot 11^{19}$

$2^{(1-16)} \cdot 11^{(1-19)}$



$\cancel{3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}$

$3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 19$

$12 \cdot 16 \cdot 19$

$\frac{AK}{KC} = \frac{15}{13}$

$AK \cdot KC = TK \cdot TP$

$6 \cdot 16 \cdot 19$

$\frac{TK}{TP} = \frac{TH}{h'}$

$\begin{array}{r} 16 \\ \times 19 \\ \hline 144 \\ 16 \\ \hline 304 \end{array}$

-9

$(x+4)^2 = x + 34$

$x^2 + 8x + 16 = x + 34$

$x^2 + 7x - 18$

$\sqrt{2x+23} = -x-4$

$2x + 23 = x^2 + 8x + 16$

$x^2 + 6x - 7$

$(x+7)(x-1) = 0$

$2 \cdot 11^{19}$

$2 \cdot 11$

$2^{16} \cdot 11$

НОД$(a, b, c) = 22$

$2 \cdot 11$

$2 \cdot 11 \cdot \ldots\ldots$

$2 \cdot 11 \cdot \ldots\ldots$

$2^{16} \cdot 11$

$2^{1} \cdot 11^{19}$

$2^{13} \cdot 11^{19}$

$\sqrt{5}^{\,5}$

$\sqrt{x+34}^{\,2} = 2x + 23$

$x + 34 = 2x + 23$

$x = 11 \to \varnothing$

5^{5} $5^{2^{25}}$

2.

Черновик 4

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$ $\log_{(x+4)^2}(x+34)$ $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$2\log_{x+34}(2x+23)$; $\frac{1}{2}\log_{(x+4)}(x+34)$; $2\log_{2x+23}(x+4)$

$\log_{x+4}(x+34)\cdot\log_{x+34}(2x+23)=\log_{x+4}2x+23$

$\log_{x+4}2x+23\cdot 2\log_{2x+23}(-x-4)=\log_{x+4}(-x-4)^2=$

$\boxed{2.}$

НОД = nod

$x+34>0$; $\neq 1$
$2x+23>0$; $\neq 1$
$x\neq 4$
$-x-4>0$
$-x>4$
$x<-4$
$x>-34$
$x>-\frac{23}{4}$

KARL

$a^3+a^2=2$

$a^3+a^2-0\cdot a-2=0$

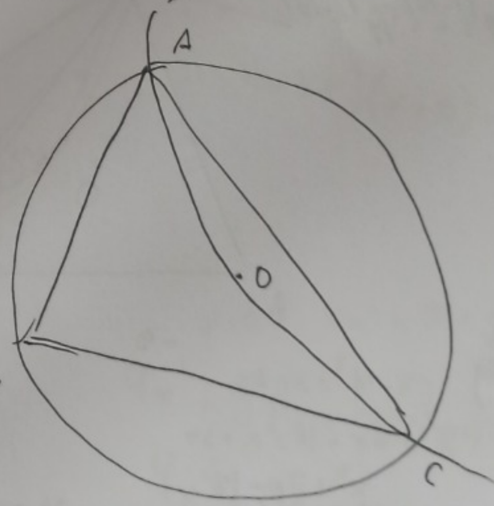
$(a-1)(a^2-2a+2)=0$

$a^3-a^2+2c^2$

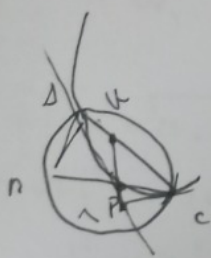
$(a-1)((a-1)^2+1)=0$

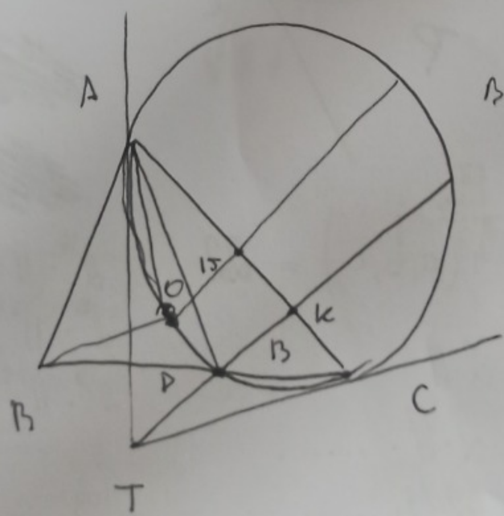
$a=1$

$a=22k$
$b=22m$
$c=22n$



$S_{ABC}-?$





21103333 (U874284 M1296988)

Черновик 5

$x+34$

$-\frac{55}{4}\cdot 2 = -\frac{55}{2}\ \cancel{x}-23$

$2x+23=x^2+8x+16$

x^2+6x-7

$(x+7)(x-1)$

$\sqrt{27}$

$4x^2+36x+55x+495$

$(4x+55)(x+9)=0.$

$x+34=4x^2+92x+23^2$

$4x^2+91x+529-34=0$

$4x^2+91x+495=0$

$4x^2+9x+82x+495$

$\sqrt{2x+23}^2=-x-4$

$2x+23=-x-4$

$3x=-27$

$x=-9$

$((x+4)^2)^2=x+34$

$(x^2+8x+16)^2=x+34$

$x^4+64x^2+16^2+16x^3+16^2x+32x^2=x+34$