Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

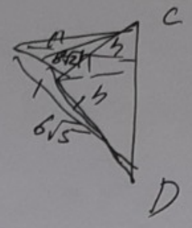
Шифр: **21103311**

ID профиля: **316243**

Вариант 23

$\sin(\alpha) = 2\cos(\frac{\alpha}{2}) \cdot \sin(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\sqrt{15}}{8}$

$\cos(\alpha) = 2 \cdot \cos^2(\frac{\alpha}{2}) - 1 = 2 \cdot \frac{7}{16} - 1 = -\frac{7}{8}$



7 7 4 9

~~18~~

$S = \sqrt{9 \cdot 2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{45} = 6\sqrt{5}$

$8\sqrt{2}$ $6\sqrt{5}$ CD

$\cancel{R' = \frac{169 - t * - t + 1}{}}$ $\cancel{170 - 2t}$

$R = \frac{h^2}{\sqrt{4h^2 - AB^2}}$

$R' = \frac{2h\sqrt{4h^2 - AB^2} - \frac{4h^3 t}{2\sqrt{4h^2 - AB^2}}}{4h^2 - AB^2} =$

$= \frac{8h^3 - 2hAB^2 - 4h^3}{(4h^2 - AB^2)\sqrt{4h^2 - AB^2}}$

$4h^2 - 2AB^2 = 0$ $h = \frac{AB}{\sqrt{2}}$

$\begin{array}{r} 162 \\ \times\ 162 \\ \hline 324 \\ +\ 972 \\ 162\ \ \\ \hline 26244 \\ -\ \ 676 \\ \hline 25568 \end{array}$

$\begin{array}{r} 169 \\ \times\ \ 4 \\ \hline 676 \end{array}$

$\cancel{1}81 - \sqrt{6392}$

$\begin{array}{l} 25568 \mid 4 \\ -24 \quad\ \ 6392 \\ \ \ 15 \\ -12 \\ \ \ \ 36 \\ -36 \\ \ \ \ \ \ 8 \\ \ \ \ -8 \end{array}$

1

$\sqrt{6392} < 80$

$6392 < 6400$

$6392 > (81 - 13)^2$

$81 + \sqrt{6392}$ 73^2

$\sqrt{\ }$

21103311 (U316243 M1298803)

$a_{11} a_{15} = a_{10} a_{16} + 5n^2$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ + 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$50 > a_1^2 + 18a_1 + 120 > 39$

$\begin{cases} a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \\ a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0 \end{cases}$

$s + 39 < a_{10} a_{16} < s + 55 - 5n^2$

$D = 324 - 4 \cdot 81 = 0$

$t > s + 39$ $\quad t - s > 39$

$t + 5n^2 < s + 55$ $\quad t - s < 55 - 5n^2$

$n = 1$ $\quad (a_1 + 9)^2 > 0$

$\cancel{a_{10} a_{16} = 6}$

$\cancel{a_1 = -9}$

$a_1 \neq -9$

$50 > (a_1 + 9)(a_1 + 15) - 6a_1 - 15 > 39$

$\cancel{50 > a_1^2 + 18a_1}$

$D = 324 - 280 = 44$ $\quad \sqrt{D} = 2\sqrt{11}$

$4 > \sqrt{11} > 3$

$a_1 = \frac{-18 - 2\sqrt{11}}{2} = -9 - \sqrt{11}$

$a_2 = \frac{-18 + 2\sqrt{11}}{2} = -9 + \sqrt{11}$

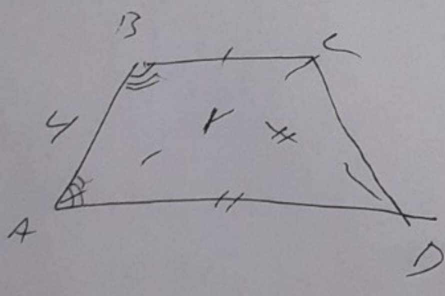
0, 1, 2, 3

$a_1 = -12; -11; -10, -8, -7, -6$

$\cancel{144 - 216 + 70 < 0}$

№2

ABCD $\quad AB = 4 \quad AC = CB = 6 \quad AD = DB = 7$



CD и BA не могут быть основаниями

AD ∥ BC

21103311 (U316243 M1298803)

№1

$S = \frac{a_1+a_6}{2}\cdot 6 = 3(a_1+a_6) = 3(a_1+a_1+5n) = 3(2a_1+5n) =$

a_1 - целое $\quad n$ - целое $\qquad = 6a_1+15n$

$(a_1+9n)(a_1+15n) > S+39$ $\qquad D = 144-4\cdot 81 =$

$(a_1+10n)(a_1+14n) < S+55$ $\qquad = 144-324 < 0$

$n=1$

$a_1^2+24a_1n+135n^2 > 6a_1+15n+39$ $\qquad 135 \mid \frac{15}{9}$

$a_1^2+24a_1n+140n^2 < S+55$

$S+39 < a_1^2+24a_1n+135n^2 < S+55-5n^2$

$a_{16} = a_1+15n =$

$39 < 55-5n^2 \qquad 5n^2 < 16 \qquad = S-5a_1$

$n^2 < 3,2 \qquad n = \pm 1$

$n=1$

$a_1^2+24a_1+135-6a_1-15 > 39$

$a_1^2+12a_1+120-39 > 0$ $\qquad \cancel{a_{10} = a_1+15n-6n =}$

$a_1^2+12a_1+81 > 0$ $\qquad \cancel{= a_{16}-6n = S-(5a_1+6n)}$

$a_1^2+24a_1+140-6a_1-15-55 < 0$

$a_1^2+12a_1+70 < 0$

$a_1^2+12a_1+70 \not< 0 \qquad D = 144-4\cdot 70 < 0$

$S = 6a_1+15n$

$6a_1+15n$

$(a_1+9n)(a_1+15n) > 6(a_1+2,5n)+39$

$(a_1+9n)(a_1+15n) > a_1+15n+5a_1+39$

$\cancel{(a_1+9n-1)(a_1+15n) > 5a_1+39}$

21103311 (U316243 M1298803)

№3

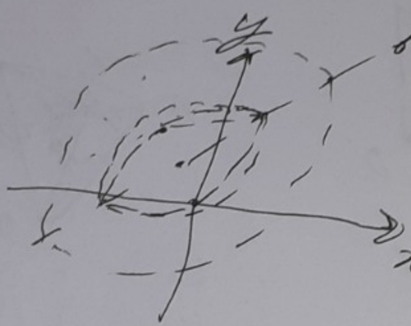
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8) \end{cases}$$

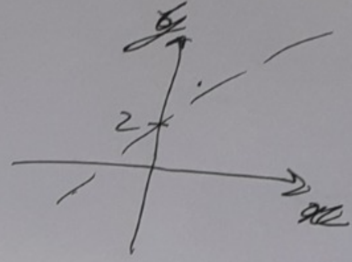
$a^2+b^2 \le 8$ $\qquad -4a+4b > 8$ $\qquad b > 2+a$

$a^2+4a+b^2-4b \le 0$

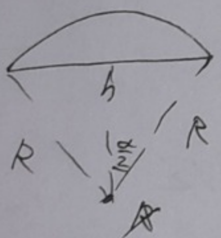
$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$

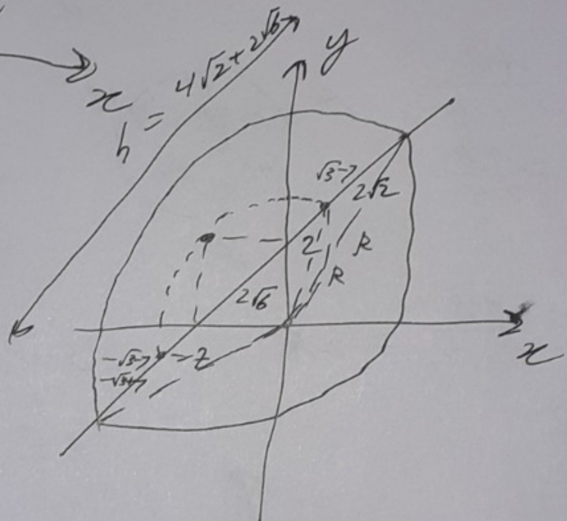
$b < 2+a$





$4\sqrt{2}+2\sqrt{6}=h$





πR^2 $\qquad h = R\,2\sin(\frac{\alpha}{2})$

$x^2+y^2=8$

$x^2+2x-2=0$

$y=x+2$

$D=4-4\cdot(-2)=12$

$x^2+x^2+4x+4=8$

$\sqrt{D}=2\sqrt{3}$

$2x^2+4x=4$

$\sqrt{3}-1-(-\sqrt{3}-1)=$

$x_1=\frac{-2+2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}-1$

$=2\sqrt{3}$

$x_2=\frac{-2-2\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}-1$

$\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1$

$2\sqrt{3}$

$y=\sqrt{3}+1$

$\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

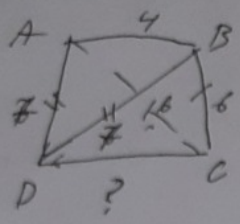
$y=-\sqrt{3}+1$

21103311 (U316243 M1298803)

№2

h(CD)

$$h = \frac{2S}{CD} = \frac{2\sqrt{\frac{13+CD}{2}\cdot\frac{13-CD}{2}\cdot\frac{7+CD}{2}\cdot\frac{CD-7}{2}}}{CD} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{(13^2-CD^2)(CD^2-7)}}{CD}$$

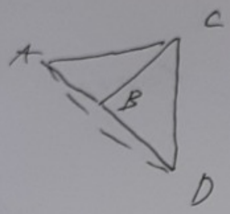


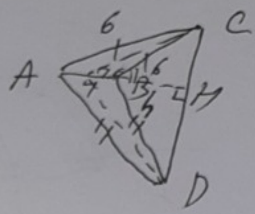
$$h = \frac{\sqrt{(13^2-CD^2)(CD^2-7)}}{2CD}$$

r-min

CD=?

$7 < CD < 13$

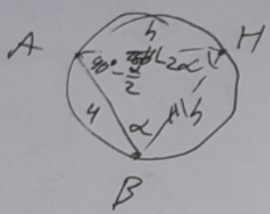


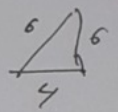


r(CD)=?

$$h = \frac{AB}{2\cos(\alpha)}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{AB}{2h}$$





$$\frac{h}{\sin(\alpha)} = \frac{AB}{\sin(2\alpha)} = 2R$$

$$S = \sqrt{8\cdot 2^2\cdot 4} = 8\sqrt{2}$$

$$h = \frac{2S}{4} = \frac{16\sqrt{2}}{4} = 4\sqrt{2}$$

$$\sin(\alpha) = \sin(\gamma)\cdot\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{BC}{AB} \qquad \sin(\gamma) = \frac{BC}{BD}$$

$$\sin(\Delta) = \frac{AB}{BD}$$

$$\frac{AB}{\frac{AB}{h}\sqrt{1-\frac{AB^2}{4h^2}}} = 2R$$

$$\sin(\alpha)\cdot\sin(\Delta) = \sin(\gamma)$$

$$\frac{h}{\sqrt{1-\frac{AB^2}{4h^2}}} = 2R$$

$$R = \frac{h^2}{\sqrt{4h^2-AB^2}} = \frac{(13^2-CD^2)(CD^2-7)}{4CD^2\sqrt{(13^2-CD^2)(CD^2-7)-AB^2}}$$

$$R = \frac{(169-t)(t-7)}{4t\sqrt{(169-t)(t-7)-AB^2}}$$

Чистовик 6

Ответ: $CD = \sqrt{87+\sqrt{8392}}$

$CD = \sqrt{87-\sqrt{8392}}$

Чистовик (3)

Мы нашли зависимость радиуса цилиндра от сторон AH и HB

найдем производную функции $R(h)$

$$R'(h) = \frac{(h^2)'\sqrt{4h^2-AB^2} - (\sqrt{4h^2-AB^2})'h^2}{4h^2-AB^2} =$$

$$= \frac{2h\sqrt{4h^2-AB^2} - \frac{4h\cdot h^2}{2\sqrt{4h^2-AB^2}}}{4h^2-AB^2} = \frac{8h^3-2hAB^2-4h^3}{(4h^2-AB^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$R'(h)=0$ при $h=0$ и $4h^2-2AB^2=0$

$$h = \frac{AB}{\sqrt{2}}$$

R минимален при $h=\frac{AB}{\sqrt{2}}$

$$\frac{\sqrt{(13^2-CD^2)(CD^2-1)}}{CD} = \frac{AB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$(169-CD^2)(CD^2-1) = CD^2 8$ пусть $CD^2=t$

$(169-t)(t-1)=8t$

$170t-t^2-169=8t \Rightarrow t^2-162t+169=0$

$D=162^2-4\cdot169=25568$

$$t_1=\frac{162+\sqrt{25568}}{2} \qquad t_2=\frac{162-\sqrt{25568}}{2}$$

~~$t_1=\frac{162+\sqrt{25568}}{2} > 13^2 \Rightarrow$ этот ответ не подходит~~

~~$t_2 = 81-\sqrt{8392} > 1$ и $t_2 = 81-\sqrt{8392} < 13^2$~~

~~Ответ:~~

21103311 (U316243 M1298803)

Чистовик

4

$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{15}}{8}$ $S_M = R_0^2(\alpha - \sin(\alpha))$

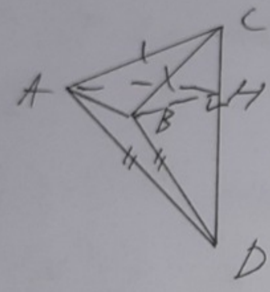
$R_0 = 4\sqrt{2}$ $\alpha = \pi - \arcsin(\frac{\sqrt{15}}{8})$

$S_M = 32(\pi - \arcsin(\frac{\sqrt{15}}{8}) - \frac{\sqrt{15}}{8})$

Ответ: $S_M = 32(\pi - \arcsin(\frac{\sqrt{15}}{8}) - \frac{\sqrt{15}}{8})$

~~Чист~~

N2



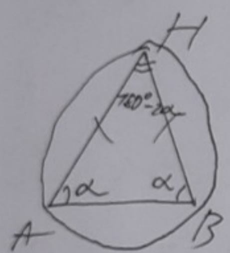
Пусть BH и AH – высоты на ребра CD

они совпадают т. к.

$\triangle ACD = \triangle BCD$ ($AC = BC$, $AD = BD$ и CD общее)

Рассм. ~~так~~ плоскость AHB

По теореме синусов



$\frac{AB}{\sin(2\alpha)} = 2R$

$AH = HB = \frac{2S_{CBD}}{CD}$

по формуле Герона S_{CBD} $p = \frac{7+6+CD}{2}$

$S_{CBD} = \sqrt{\frac{13+CD}{2} \cdot \frac{13-CD}{2} \cdot \frac{7+CD}{2} \cdot \frac{CD-7}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{(169 - CD^2)(CD^2 - 1)}$

$h = AH = HB = \frac{\sqrt{(169-CD^2)(CD^2-1)}}{CD}$

$\frac{h}{\sin(\alpha)} = \frac{AB}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$ $\cos(\alpha) = \frac{AB}{2h}$

$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{AB^2}{4h^2}}$ т. к. $\alpha < 90°$

$\frac{AB}{\frac{AB}{h}\sqrt{1 - \frac{AB^2}{4h^2}}} = 2R$ $R = \frac{h}{\sqrt{4 - \frac{AB^2}{h^2}}} = \frac{h^2}{\sqrt{4h^2 - AB^2}}$

Чистовик (3)

симметричем 2-му относительно прямой $y=x+2$) получим площадь фигуры М.

узнаем координаты точки В.

$R_0 = 4\sqrt{2}$ т.к. окр., образующая границы $(a;b)$ имеет радиус $2\sqrt{2}$, а радиус окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=8$ $2\sqrt{2}$. Граница фигуры М возможно достичь, если ~~точка~~ центр $(a;b)$ отдалена от $(0;0)$ на $2\sqrt{2}$ и $(x;y)$ отдалена от $(a;b)$ на $2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \smile ACB$ описывает система

$$\begin{cases} x^2+y^2=32 \\ y \geq x+2 \end{cases}$$

$y=x+2$

$x^2+x^2+4x+4=32$

$2x^2+4x-28=0$

$x^2+2x-14=0$

$D=4-4\cdot(-14)=4+56=60$

$\sqrt{D}=2\sqrt{15}$

$x_1=-1-\sqrt{15}$ $\quad x_2=-1+\sqrt{15}$ $\quad B(-1+\sqrt{85};\ 1+\sqrt{15})$

$y_1=1-\sqrt{15}$ $\quad y_2=\cancel{3}1+\sqrt{15}$

$AB^2=(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2=120$ $\quad AB=2\sqrt{30}$

$AB=2R_0\sin\frac{\alpha}{2}$ $\quad \alpha=\angle BOA$

$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{30}}{8\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{\frac{15}{16}}$ $\quad \pi R_0^2\cdot\frac{\alpha}{2\pi}=\frac{\alpha}{2}R_0^2$

$S_{ACB}=\frac{\alpha}{2}R_0^2-\frac{1}{2}R_0^2\sin(\alpha)$ $\Rightarrow S_M=\alpha R_0^2-R_0^2\sin(\alpha)=R_0^2(\alpha-\sin(\alpha))$

$\cos(\frac{\alpha}{2})=\frac{1}{4}$ по осн. тригоном. тождеству и из рисунка видно, что $\alpha<180°$

№1 Чистовик

т. к. S – сумма первых 6 членов арифметической прогрессии, то

$S = \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = 3(a_1 + a_6)$ где $a_1, m \in \mathbb{Z}$

пусть $a_n = a_1 + (n-1) \cdot m$ $\Rightarrow$

7

$\Rightarrow S = 6a_1 + 15m$

По условию

$a_{10} a_{16} > S + 39 \Rightarrow a_1^2 + 24a_1 m + 135m^2 > S + 39$

$a_{11} a_{15} < S + 55 \Rightarrow a_1^2 + 24a_1 m + 140m^2 < S + 39$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow S + 39 < S + 39 - 5m^2 \Rightarrow m^2 < 3,2$

т. к. прогрессия возрастающая, то $m = 1$

$\Rightarrow a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 15m + 39 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0$

и $a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0$

$\begin{cases} a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \\ a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0 \end{cases}$ решим систему

$a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \Rightarrow (a_1 + 9)^2 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 \neq -9$

$a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0$ $D = 324 - 280 = 44$

$a_1 = -9 - \sqrt{11}$ $a_2 = -9 + \sqrt{11}$

$a_1 \in (-9 - \sqrt{11}; -9 + \sqrt{11}) \Rightarrow \cancel{a_1 =}$ т. к. $\sqrt{11} \gtrsim 3$, то

$a_1 \in \{-12; -11; -10; -9; -8; -7; -6\}$, но $a_1 \neq -9 \Rightarrow$

Ответ:

$a_1 \in \{-12; -11; -10; -8; -7; -6\}$

21103311 (U316243 M1298803)

№3 Чистовик

2

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8)\end{cases}$$

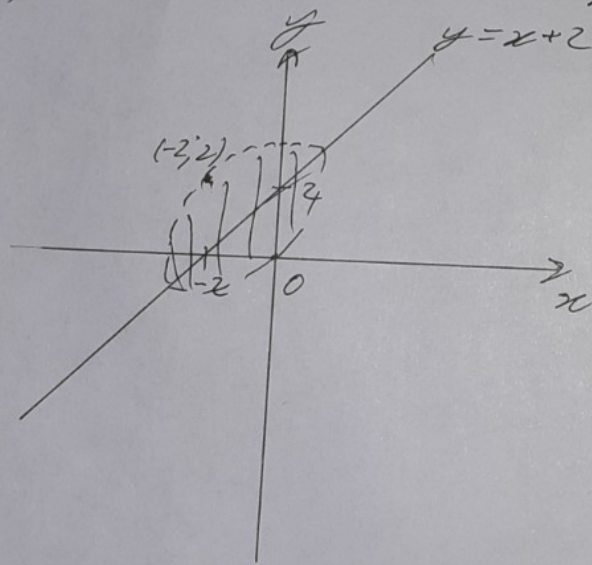
$(a; b)$ – координаты центра окружности, которая является графиком ур-ния $(x-a)^2+(y-b)^2=8$
при $-4a+4b>8$ или $b>a+2$, то

$a^2+b^2 \le 8$

и при $-4a+4b<8$ или $b<a+2$, то

$a^2+4a+b^2-4b \le 0 \Rightarrow (a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$

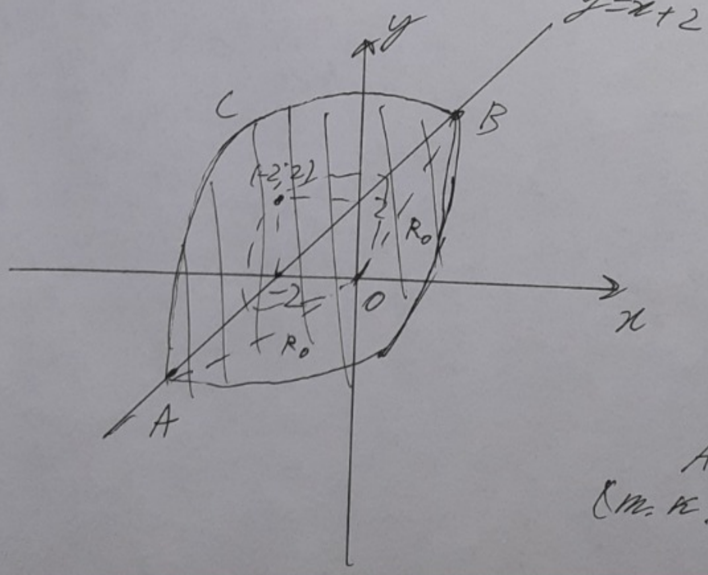
нарисуем на плоскости oxy места где может находится центр окружности $(a; b)$



пунктиром я отметил границы зоны, где находится центр окр.

$(x-a)^2+(y-b)^2=8 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ мы можем отметить зоны $(x; y)$ при котором $\exists$ существует пара (a, b) На 2-м рисунке я заштриховал зону.



дуга ACB, часть окр. с центром $(0;0)$ и радиусом R_0

найдём площадь сегмента ACB и умножив на 2 (т.к. этих сегмента два

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103311**

ID профиля: **316243**

Вариант 23

№4 Черновик

(a, b, c) $НОД(a; b; c) = 22$

$НОК(a; b; c) = 2^{16} \cdot 11^{19}$

~~$a = n \cdot 22$~~ b

$a = a_0 \cdot 22$ $b = b_0 \cdot 22$ $c = c_0 \cdot 22$

$НОД(a_0, b_0, c_0) = 1$

$НОК(a, b) = c$

$НОК(a_0, b_0, c_0) = 2^{15} \cdot 11^{18}$

$НОК(a, b) = \frac{ab}{НОД(a,b)}$

a_0, b_0, c_0

$НОД(a; b) = n$

$НОК(2^{a_1} \cdot 11^{a_2}; 2^{b_1} \cdot 11^{b_2}; 2^{c_1} \cdot 11^{c_2}) = 2^{15} \cdot 11^{18}$ $НОК(a_0, b_0) = a_0 b_0 =$

$0 \le a_1, b_1, c_1 \le 15$ $= \frac{\cancel{ab}}{} \frac{ab}{n}$

$0 \le a_2, b_2, c_2 \le 18$ ~~НОК~~

если $a_1 = 0$

$a_1, b_1, c_1 = 15$

$a_2, b_2, c_2 = 18$

если $a_1 = 0$ ~~11^{a_2}~~ ~~3 ва~~ 9 вариантов

$a_2 = 0$

$9 \times 2 \times 2 \cdot 16 \cdot 19$

$36 \times 16 = 276 + 36 = 576$

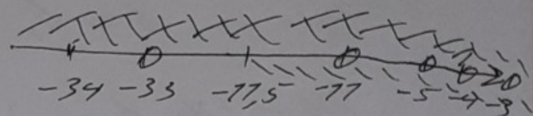
$576 \times 19 = 5184 + 576 = 10944$

21103311 (U316243 M1298804)

№5 Черновик

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, $\log_{(x+4)^2}(x+34)$, $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$$\begin{cases} x+34>0 \\ x+34\neq 1 \\ 2x+23>0 \\ 2x+23\neq 1 \\ (x+4)^2>0 \\ (x+4)^2\neq 1 \\ -x-4>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>-34 \\ x\neq -33 \\ x>-11{,}5 \\ x\neq -11 \\ x\neq -4 \\ x\neq -3 \\ x\neq -5 \\ x<-4 \end{cases}$$



ОДЗ

$x\in(-11{,}5;-4)$

$x\neq -11$

$x\neq -5$

1) $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=\log_{(x+4)^2}(x+34)$

$\cancel{\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23}$ $\cancel{\log_{(x+4)^2}(x+34)+1=\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)}$

$\cancel{\frac{1}{2}\log_{-x-4}(x+34)+1=2\log_{2x+23}(-x-4)}$

$2\log_{x+34}(2x+23)=\frac{1}{2}\log_{-x-4}(x+34)$

$$4\,\frac{\ln(2x+23)}{\ln(x+34)}=\frac{\ln(x+34)}{\ln(-x-4)}$$

$4\ln(2x+23)\ln(-x-4)=\ln^2(x+34)$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$1=\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)\,\log_{\sqrt{2x+23}}(x+34)$

$\sqrt{2x+23}=(x+34)^{\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)}$

$$2\frac{\ln(2x+23)}{\ln(x+34)},\quad \frac{1}{2}\frac{\ln(x+34)}{\ln(-x-4)},\quad 2\frac{\ln(-x-4)}{\ln(2x+23)}$$

$\quad\ \ \overset{\shortparallel}{a} \qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{b} \qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{c}$

Черновик

$\cancel{b\cdot c = a}$ $\qquad b\cdot c = \frac{1}{2a}$

$\cancel{abc=2 \qquad a=b \qquad c=a+1}$

$23 \times 4 = 92$

1) a $\qquad b=c \qquad a=b+1=c+1$

23×23: 69, 46, 529

$(b+1)b^2=2 \qquad b^3+b-2=0$

если a $\quad b=c=1$

$b=1$

$a=2$

$b^3-b^2+b^2-b+2b-2=0$

$b^2(b-1)+b(b-1)+2(b-1)=0$

$(b^2+b+2)(b-1)=0$

$\cancel{D=1}$

91×91: 91, 819, 8281

$2x+23=x+34$

$x=11$

$8281-7920=361$

495×16: 2970, 495, 7920

$529-34=495$

если b $\qquad a=c \qquad b=a+1=c+1$

$b=2$

$a=c=1$

$$\frac{\ln(x+34)}{\ln(-x-4)}=4$$

19×19: 171, 19, 361

$x+34=(x+4)^4$

если $c=2$ $\qquad -x-4=2x+23 \qquad 3x=-27 \qquad \underline{x=-9}$

$$\begin{cases}(2x+23)^2=x+34\\(x+4)^2=2x+23\end{cases}\qquad \begin{cases}4x^2+92x+529=x+34\\x^2+8x+16=2x+23\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x^2+91x+\overset{495}{\cancel{490}}=0\\x^2+6x-7=0\end{cases}$$

$D=91^2-4\cdot 4\cdot 495=$

$=8281-7920=361$

$x^2+7x-x-7=0$

$\sqrt{D}=\sqrt{361}=19$

$x_1 = \frac{-97-19}{8} = -\frac{110}{8} = -\frac{55}{4}$ Черновик $\begin{array}{r} 97 \\ -19 \\ \hline 72 \end{array}$

$x_2 = \frac{-97+19}{8} = -\frac{72}{8} = -9$

$\frac{BC}{CP} = \frac{AC}{CK}$

$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2r$ $\quad \cancel{\frac{AC}{\sin(2\alpha)} = 2R}$

$AC = r\sqrt{2-2\cos}$

$AC = 2r\sin(\alpha)$ $\quad B \quad \frac{AC}{\sin(2\alpha)} = 2R = \quad S_{APK} = 15$

$= \sqrt{r^2 + TC^2)} \quad S_{CPK} = 13$

а) $S_{ABC\,\mp} = ?$

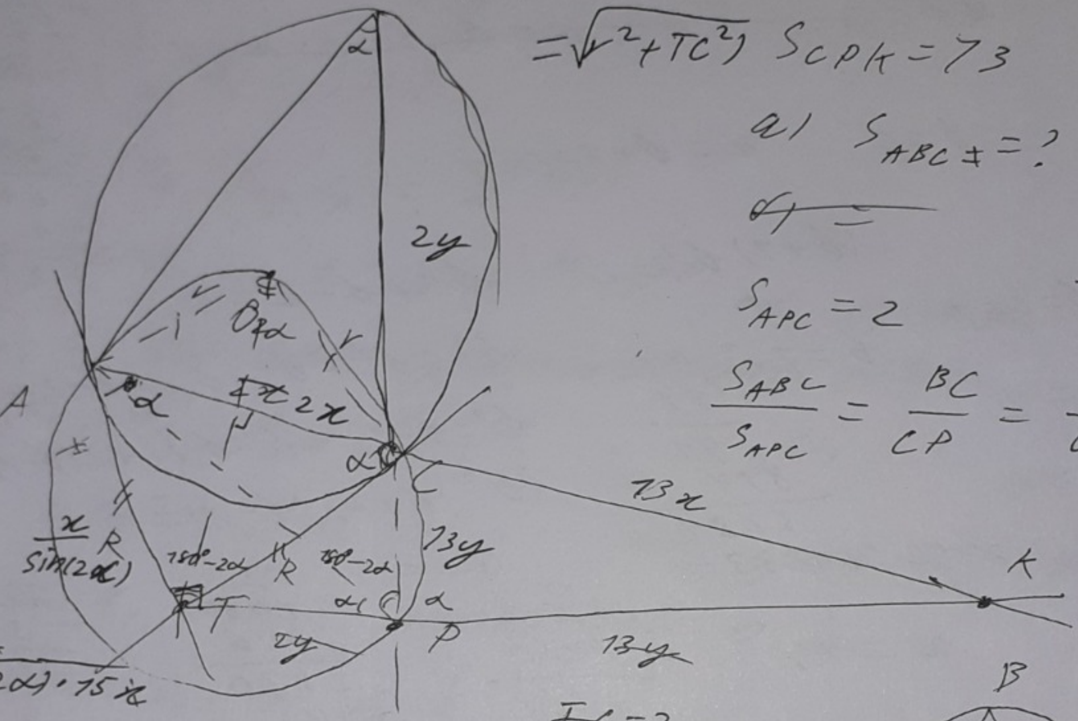
$\cancel{\alpha) =}$

$\frac{AK}{CK} = \frac{15}{13}$

$S_{APC} = 2$

$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{BC}{CP} = \frac{BP}{CP} - 1 = $

$= \frac{AP}{CP} - 1$



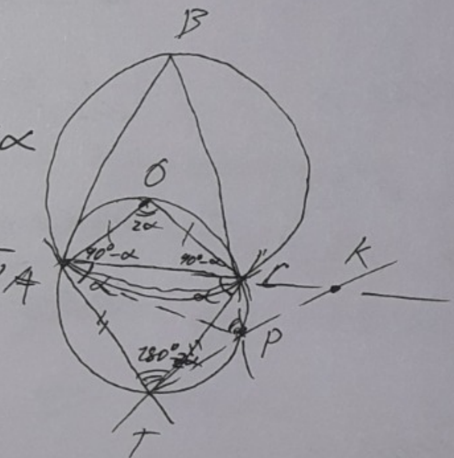
$\cos(\alpha) = \frac{x}{\sin(2\alpha)\cdot 15x}$

$\cancel{TC = 2}$

$AC = 2TC\cos\alpha$

T лежит на окр. w_2

$TC = \frac{AC}{2\cos(\alpha)}$



$\frac{2x}{\sin(\alpha)} = 2r$ $\quad \frac{AC}{2\sin(\alpha)}$

$r = \frac{x}{\sin(\alpha)}$

$S_{TCP} = 2$ $\quad \frac{2x}{\sin(2\alpha)} = 2R$ $\quad R = \frac{x}{\sin(2\alpha)}$

$S_{ACPT} = -$ $\quad AT = \frac{x}{\sin(2\alpha)}$ $\quad \frac{AT}{CP} = \frac{15}{13}$ $\quad S_{KAT} = \left(\frac{15}{13}\right)^2 S_{CPK} =$

$= \frac{15}{13}^2 \cdot$

$S_{ATC} = \frac{30}{13}$

$S_{ATP} = \frac{15}{13}^2 - 15 = 15\left(\frac{2}{13}\right) = \frac{30}{13}$

$AP = BP$ $\quad \frac{AP}{CP}$

Чистовик

1

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=22 \\ НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

Пусть $a=a_0\cdot 22$ $b=b_0\cdot 22$ $c=c_0\cdot 22$, тогда

$$\begin{cases} НОД(a_0;b_0;c_0)=1 \\ НОК(a_0;b_0;c_0)=2^{15}\cdot 11^{18} \end{cases}$$

т. к. $НОК(a_0;b_0;c_0)=2^{15}\cdot 11^{18}$, то числа a_0, b_0, c_0 можно представить как $a_0=2^{a_1}\cdot 11^{a_2}$ $b_0=2^{b_1}\cdot 11^{b_2}$ $c_0=2^{c_1}\cdot 11^{c_2}$ где $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ целые числа

т. к. $НОД(a_0;b_0;c_0)=1$, то один ~~из~~ из чисел a_1, b_1, c_1 равняется 0 и один из чисел a_2, b_2, c_2 равняется 0.

Для этого условия существует 9 вариантов, каких из этих чисел будут равняться 0

т. к. $НОК(a_0;b_0;c_0)=2^{15}\cdot 11^{18}$, то один из чисел a_1, b_1, c_1 равняется 15 и один из чисел a_2, b_2, c_2 равняется 18. Для выполнения 2-х прошлых условий возможен 36 вариантов, ~~значений~~ ~~3-й~~, 3-е последнее число из a_1, b_1, c_1 может принимать значение от 0 до 15 т.е. 16 значений.

~~3-е~~ Последнее число из a_2, b_2, c_2 принимает значение от 0 до 18 т.е. 19 значений.

всего вариантов $(a_0, b_0, c_0) = 36\cdot 16\cdot 19$

21103311 (U316243 M1298804)

Чистовик

2

$36 \cdot 16 \cdot 19 = 10944$

Ответ: 10944

№5

Дано: $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, $\log_{(x+4)^2}(x+34)$, $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

Найдём ОДЗ

$$\begin{cases} x+34>0 \\ x+34\neq 1 \\ 2x+23>0 \\ 2x+23\neq 1 \\ (x+4)^2>0 \\ (x+4)^2\neq 1 \\ -x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-34 \\ x\neq -33 \\ x>-11{,}5 \\ x\neq -11 \\ x\neq -4 \\ x\neq -3 \\ x\neq -5 \\ x<-4 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-11{,}5;-11)\cup(-11;-5)\cup(-5;-4)$$

$$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \frac{\ln(2x+23)}{\ln(x+34)}\cdot 2 = a$$

$$\log_{(x+4)^2}(x+34) = \frac{\ln(x+34)}{\ln(-x-4)}\cdot\frac{2}{2} = b \quad \Rightarrow$$

$$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = \frac{\ln(-x-4)}{\ln(2x+23)}\,2 = c$$

$\Rightarrow a\cdot b\cdot c = 2$ пусть $a=c$ и $b=a+1=c+1$, тогда

$a^2(a+1)=2$ $\quad a^3+a-2=0$ при $a=1$

$(a-1)a^2+a(a-1)+2(a-1)=0$

$(a-1)(a^2+a+2)=0$ $\Rightarrow$ что если $a=c$ и $b=a+1=c+1$, то

$a=c=1$

$b=2$

21103311 (U316243 M1298804)

Чистовик

3

~~Пусть~~ Тогда
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=2\\b=1\\c=1\end{cases}\\ \begin{cases}b=2\\a=1\\c=1\end{cases}\\ \begin{cases}c=2\\a=1\\b=1\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим систему

$$\begin{cases}a=2\\b=1\\c=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ln(2x+23)=\ln(x+34)\\ \ln(x+34)=2\ln(-x-4)\\ 2\cdot\ln(-x-4)=\ln(2x+23)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2x+23=x+34\\ x+34=(x+4)^2\\ (x+4)^2=2x+23\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x=11\\ x+34=(x+4)^2\\ (x+4)^2=2x+23\end{cases}$$

$x=11$ не входит в ОДЗ

Решим систему

$$\begin{cases}b=2\\a=1\\c=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ln(x+34)=4\cdot\ln(-x-4)\\ 2\cdot\ln(2x+23)=\ln(x+34)\\ 2\cdot\ln(-x-4)=\ln(2x+23)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x+34=(x+4)^4\\ (2x+23)^2=x+34\\ (x+4)^2=2x+23\end{cases}$$

Решим ур-ние

$4x^2+92x+529=x+34$

$4x^2+91x+495=0$

$D=91^2-4\cdot4\cdot495=19^2$

$x_1=\frac{-91-19}{8}=-\frac{55}{4}$ $x_2=\frac{-91+19}{8}=-9$

Решим ур-ние

$x^2+8x+16=2x+23$

$x^2+6x-7=0$

$(x+7)(x-1)=0$

$x=-7$ $x=1$

$\Rightarrow$ Система не имеет решений

21103311 (U316243 M1298804)

Решим систему Чистовик 4

$$\begin{cases} c=2 \\ a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(-x-4)=\ln(2x+23) \\ 2\cdot\ln(2x+23)=\ln(x+34) \\ 2\cdot\ln(x+34)=2\cdot\ln(-x-4) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x-4=2x+23 \\ (2x+23)^2=(x+34 \\ x+34=(x+4)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-9 \\ (2x+23)^2=x+34 \\ x+34=(x+4)^2 \end{cases}$$

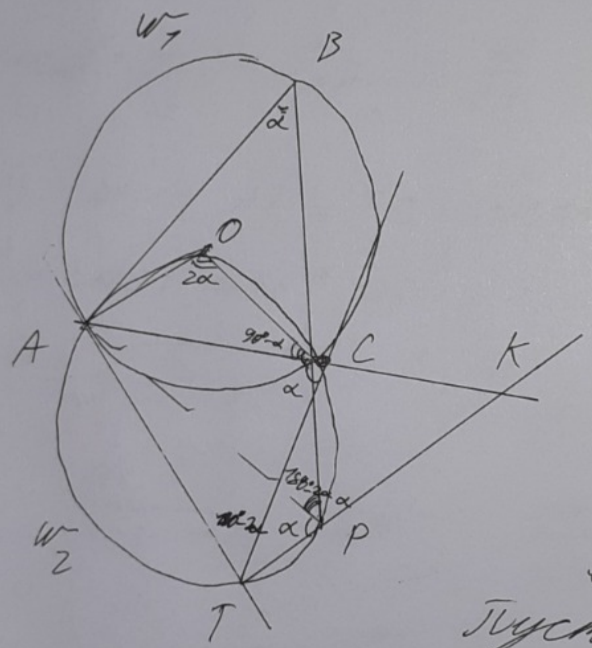
Подставим $x=-9$ в оставшиеся два ур-ния

$(-18+23)^2=25=5^{-2}$

$25=(-5)^2$

Ответ: $x=-9$

№6



Дано: w_1 описан около $\triangle ABC$ ц. в т. O A, O и $C \in w_2$

$BC \cap w_1 = O$

AT и CT касательные к w_1 $AC \cap TP = K$

$S_{APK}=15$ $S_{CPK}=13$

Найти: S_{ABC}

Решение:

Пусть $\angle ABC=\alpha$, тогда $\angle AOC=2\alpha$ центральный угол т. к. $AO=OC$, то $\angle OCA=90°-\alpha$ т. к. CT касательная, то $\angle ACT=\alpha$ т. к. $\angle ACT$ и $\angle APT$ вписанные и опираются на $\smile AT$, то $\angle APT=\alpha$ т. к. $AOCP$ вписан в окр, то $\angle APC=180°-\angle AOC=180°-2\alpha$

Чистовик

5

$\angle KPC = 180^\circ - \angle APC - \angle APT =$

$= 180^\circ - 180^\circ + 2\alpha - \alpha = \alpha \Rightarrow \angle KPC = \angle ABC$

$\angle ACB = \angle PCK$ т. к. они вертикальны $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CPK \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{BC}{CP} = \frac{AC}{CK} = k$

т. к. $\frac{AK}{CK} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{15}{13} \Rightarrow \cancel{k = \frac{15}{13}}$

$AK = AC + CK$ $\cancel{k = \frac{AK}{CK} - \frac{AC+}{}}$

$k = \frac{AC}{CK} = \frac{AK - CK}{CK} = \frac{AK}{CK} - 1 = \frac{2}{13}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CPK}} = \left(\frac{2}{13}\right)^2$ $S_{ABC} = 13 \cdot \frac{4}{13^2} = \frac{4}{13}$

Ответ: $S_{ABC} = \frac{4}{13}$

б) т.к. AT и TC – касательные, то $AT = TC$

т.к. $\angle OCT = 90^\circ \Rightarrow OT = 2R = \frac{AC}{\sin(2\alpha)}$ т. к. $\angle ATC = 180^\circ - 2\alpha$

$OT = \sqrt{OC^2 + CT^2}$ т. к. $AT = CT$, то $TC = \frac{AC}{2\sin(90^\circ - \alpha)} =$

$= \frac{AC}{2\cos(\alpha)}$ $2OC = \frac{AC}{\sin(\alpha)}$

$\cancel{\left(\frac{AC}{\sin(2\alpha)}\right)^2 = \frac{AC}{4\sin^2(\alpha)}}$