Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103306**

ID профиля: **221021**

Вариант 23

$\boxed{\text{Чистовик}}$ № 1 (начало)

последовательность состоит из целых чисел $\Rightarrow a_1 \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, k − разность данной прогрессии. $k > 0 \Rightarrow k \in \mathbb{N}$

$$S = a_1 + (a_1 + k) + (a_1 + 2k) + (a_1 + 3k) + (a_1 + 4k) + (a_1 + 5k) = 6a_1 + 15k$$

$a_{10} = a_1 + 9k$
$a_{16} = a_1 + 15k$
$\Rightarrow a_{10} \cdot a_{16} = (a_1 + 9k)(a_1 + 15k) = a_1^2 + 24a_1k + 135k^2$

$a_{11} = a_1 + 10k$
$a_{15} = a_1 + 14k$
$\Rightarrow a_{11} \cdot a_{15} = (a_1 + 10k) \cdot (a_1 + 14k) = a_1^2 + 24a_1k + \cancel{135k^2}\ 140k^2$

$\left.\begin{array}{l} \underset{\in \mathbb{Z}}{a_{10} \cdot a_{16}} > \underset{\in \mathbb{Z}}{S} + \underset{\in \mathbb{Z}}{39} \Rightarrow a_{10} \cdot a_{16} \geq S + 40 \end{array}\right\} \Rightarrow$

аналог. $a_{11} \cdot a_{15} \leq S + 54$

$\Rightarrow a_{11} \cdot a_{15} - a_{10} \cdot a_{16} \leq 14 \Rightarrow a_1^2 + 24ka_1 + 140k^2 - a_1^2 - 24ka_1 - 135k^2 \leq 14$

$\Rightarrow 5k^2 \leq 14$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k^2 \in \mathbb{Z}$ $|k| \geq 2$ $k^2 \geq 4 \Rightarrow 5 \cdot k^2 \geq 5 \cdot 4$

$\Rightarrow 5k^2 \geq 20$, но $5k^2 \leq 14 \Rightarrow |k| < 2 \Rightarrow k = \cancel{-1;\ 0;\ 1}$ ~~−1 или 0 или~~ 1

1

$k = -1$

$a_{11} \cdot a_{15} = a_1^2 - 24 + 140 < 6a_1 - 15 + 55$

$a_1^2 - 24 + 140 - 6a_1 - 40 < 0$

$a_1^2 - 6a_1 + 76 < 0$ $\Rightarrow$ корней нет, графи пар. ветви вверх $\Rightarrow$ не сущ. таких a_1

$D = 36 - 4 \cdot 76 < 0$

$k = 0$

$\begin{cases} a_1^2 \geq 6a_1 + \cancel{39}\ 40 \\ a_1^2 \leq 6a_1 + \cancel{54}\ 55 \end{cases}$

$a_1^2 - 6a_1 - 40 \geq 0$
$D = 36 + 40 \cdot 4 = 4 \cdot 49$ $\sqrt{D} = 14$
$a_{1,2} = \frac{6 \pm 14}{2} = 10;\ -4$ $a_1 \in (-\infty; -4] \cup [10; +\infty)$

$a_1^2 - 6a_1 - 55 \leq 0$
$D = 36 + 55 \cdot 4 = 4 \cdot 64$ $\sqrt{D} = 8 \cdot 2 = 16$
$a_1 = \frac{6 \pm 16}{2} = 11;\ -5$ $\Rightarrow a_1 \in (-5; 11)$

$\begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z} \\ a_1 \in (-\infty; -4] \cup [10; +\infty) \\ a_1 \in (-5; 11) \end{cases}$

при $k = 0$ $a_1 = -4$ или $a_1 = 10$

чистовик

№1 (продолжение)

$a_{11} \cdot a_{15} = a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 70$

$\cancel{a_{11}} \cdot a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0$

$D = 18 \cdot 18 - 70 \cdot 4 = 4(81 - 70) \Rightarrow \sqrt{D} = 2\sqrt{11}$

$a_{1,2} = \dfrac{-18 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -9 \pm \sqrt{11} \Rightarrow a_1 \in (-9 - \sqrt{11}; -9 + \sqrt{11})$

$a_{10} \cdot a_{16} = a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 15 + 39$

$a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0$

$D = 18 \cdot 18 - 81 \cdot 4 = 4 \cdot (81 - 81) = 0$

$a_1 = \dfrac{-18 + 0}{2} = -9 \Rightarrow a_1 \in (-\infty; -9) \cup (-9; +\infty)$

$3 < \sqrt{11} < 4$

$\Downarrow$

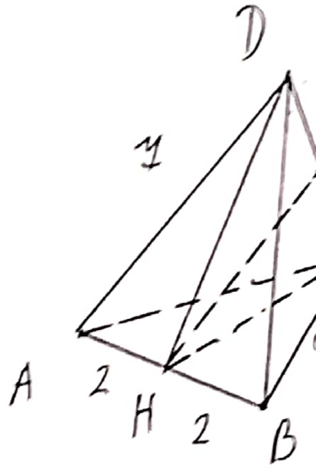
$$\begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z} \\ a_1 \in (-9 - \sqrt{11}; -9 + \sqrt{11}) \\ \cancel{a_1 \in (-\infty; -9)} \left[\begin{array}{l} a_1 \in (-\infty; -9) \\ a_1 \in (-9; +\infty) \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow a_1 = -9-3; -9-2; -9-1; -9+1; -9+2; -9+3$$

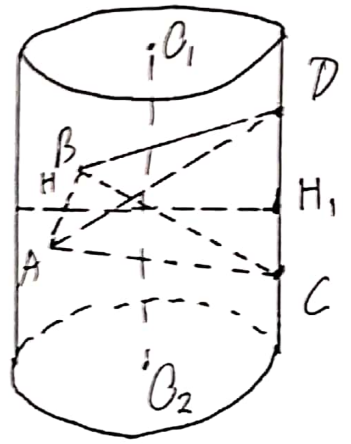
a_1 может быть равно $-12; -11; -10; -8; -7; -6$

Ответ: $-12; -11; -10; -8; -7; -6$.

2

№2 (начало) Черновик





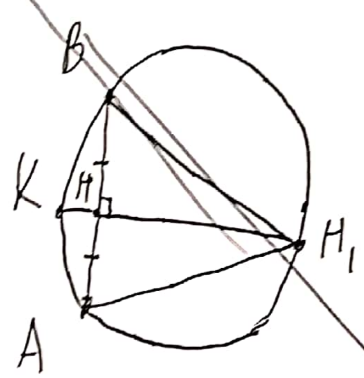
1) H − середина AB т.к AD = DB и CA = CB ⇒ DH ⊥ AB; CH ⊥ AB

2) DH ⊥ AB CH ⊥ AB ⇒ ~~пл-ть CDH ⊥ AB~~ ⇒ AB ⊥ CDH ⇒ AB ⊥ CD

3) проведем ~~HH₁, H₁ − середина~~ H₁H ⊥ CD т.к. H₁H ~~CA~~ CDCH

⇒ HH₁ ⊥ AB H − середина AB ⇒ ~~H₁H часть диаметра~~; BA ⊥ CD

⇒ ~~BA ⊥~~ CD ∥ O₁O₂ ⇒ BA ⊥ O₁O₂ ~~CD~~ ⇒ H₁H − часть диаметра окружности



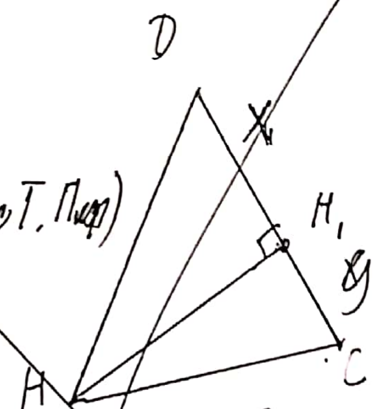
4) ~~достроим диаметр~~ до диаметра H₁K ⊥ AB ~~и~~ ~~делит~~ ее пополам т.к AB = 4 − const ⇒ HK − const

⇒ ~~d~~ диаметр наименьш. при ~~CD~~ H₁H − наим. ⇒

⇒ радиус наим. при H₁H наим.

3

5) Рас-им ~~пл-ть~~ △ DHC



DH^2 из △ ~~ABD~~ ADH $= AD^2 - AH^2 = 49 - 4 = 45$ (по Т. Пиф)

CH^2 из △ CBH $= BC^2 - AH^2 = 36 - 4 = 32$

$HH_1 \perp CD \Rightarrow HH_1 = DH^2 - x^2$

$HH_1 = CH^2 - y^2$

~~DH~~ $45 - x^2 = 32 - y^2$

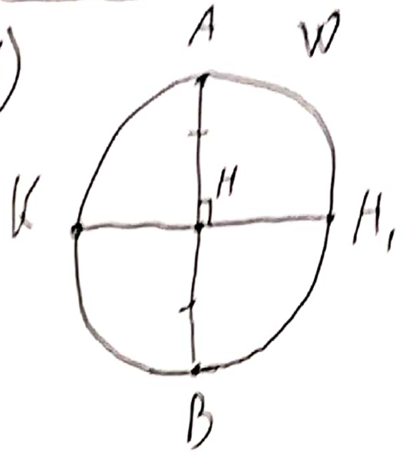
$x^2 - y^2$

⇒ мин ради

Заметим что чем больше CD тем меньше HH₁ ⇒ радиус окружности зависит от AB

Чистовик

№2 (продолжение)

4) 

~~Заметим что $AB \perp H_1K$ радиусу $\Rightarrow$ при A и делится им пополам $\Rightarrow H_1K$ диаметр, при~~ если AB, ~~так же~~ $AB = 4 \Rightarrow$ ~~d~~ $d_w \geq 4$

$A \in$ окр

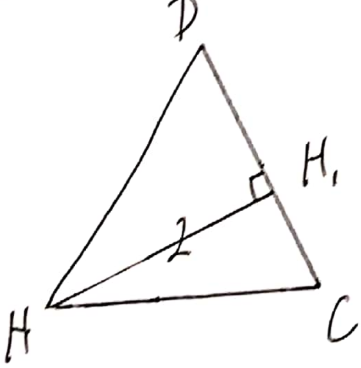
$B \in$ окр

5) т.к $AB \perp O_1O_2$; $H_1H \perp CD$ $H_1H - CD \parallel O_1O_2 \Rightarrow H_1H \perp O_1O_2 \Rightarrow$ пл-ть ABH_1 $\perp O_1O_2 \Rightarrow R \, d_w = d$ цилиндра $\Rightarrow d_w$ наименьший $\Rightarrow d_w = 4$

6) H_1K делит ~~AB~~ BA (хорду) пополам и $H_1K \perp AB \Rightarrow H_1K$ - диаметр $\Rightarrow H_1K = 4$

AB - диаметр $\Rightarrow H_1H = HK = \frac{H_1K}{2} = 2$

7) Рассм-им $\triangle DHC$:



По т. Пиф. из $\triangle ADH$ ~~из~~ $\angle H = 90°$ $AH = \frac{AB}{2} = 2$ $AD = 7$

$\Rightarrow DH^2 = DA^2 - AH^2 = 49 - 4 = 45$

2) из $\triangle CBH$ ~~CH^2~~ $\angle H = 90°$ $BH = \frac{AB}{2} = 2$ $CB = 6$

$\Rightarrow CH^2 = \cancel{36} \; CB^2 - BH^2 = 36 - 4 = 32$

3) $HH_1 \perp CD \Rightarrow$ По т Пиф из $\triangle DHH_1$

$DH_1^2 = DH^2 - HH_1^2 = 45 - 4 = 41$

из $\triangle CHH_1$ $CH_1^2 = CH^2 - HH_1^2 = 32 - 4 = 28$

8) $CD = CH_1 + H_1D = \sqrt{CH_1^2} + \sqrt{DH_1^2} = \sqrt{28} + \sqrt{41}$

ответ: $CD = 2\sqrt{7} + \sqrt{41}$

4

$\boxed{\text{черновик}}$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = S$ k - разность

$a_6 = a_1 + 5k$ $\boxed{S = 6a_1 + 15k}$

$a_{10} = a_1 + 9k$

$a_{16} = a_1 + 15k$

$a_{10} \cdot a_{16} = (a_1 + 9k)(a_1 + 15k) = a_1^2 + 9ka_1 + 15ka_1 + 135k^2$ $\cancel{9 \cdot 15k^2} > S + 39$

$a_{11} = a_1 + 10k$

$a_{15} = a_1 + 14k$

$(a_1 + 14k)(a_1 + 10k) = a_1^2 + 24ka_1 + 140k^2$

$k = -1$

$S = 6a_1 - 15$

$+135k^2 > S + 139$

$+140k^2 < S + 55$

$\cancel{(a_1 - 9)}$

$a_{10} \cdot a_{16} > S + 139 \Rightarrow a_{10} \cdot a_{16} \geq S + 40 \Rightarrow$

$40 + 5k^2 < 55$

$a_{10} \cdot a_{16} = a_1^2 - 24 + 135$

$a_{10} \cdot a_{16} + 5k^2 < S + 55 \Rightarrow a_{10} + a_{16} + 5k \leq S + 54$

$a_1^2 + 111 \, 6a_1 \, 40$

$a_1^2 - 6a + 74 \, 0$

$D < 0$

$39 - 11 = 28$

$5k^2 \leq 14$

$k^2 \leq \sqrt{\frac{14}{5}}$ $k \in \mathbb{Z}$

$k^2 = 1$ $1 \leq \sqrt{\frac{14}{5}}$

$4 \vee \sqrt{\frac{14}{5}}$

$k = -1$ $k = 0$ $k = 1$

$\cancel{16} \vee \frac{14}{5}$

$k = 0$ $S = 6a_1$

$a_{10} \cdot a_{16} = a_1^2 > 6a_1 + 39$

$a^2 < 6a_1 + 55$

$a^2 - 6a_1 - 39 > 0$

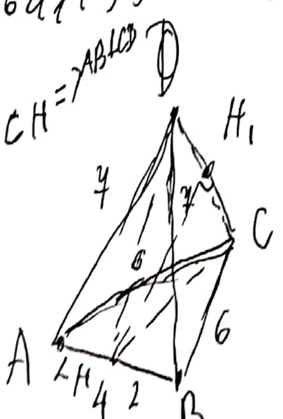
$a_2 - 6a_1 - 55 < 0$

$\rho(AB; CD)$

$DCH = AB \perp CD$

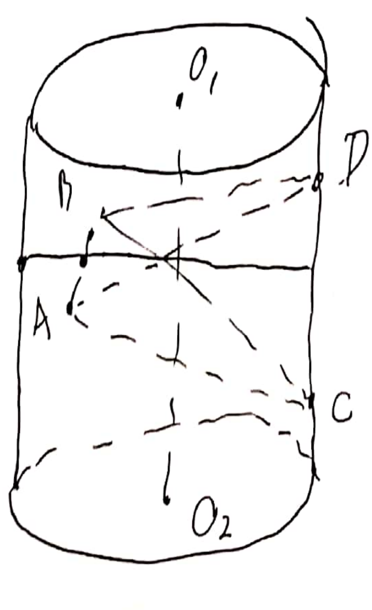
$AB \perp DH \Rightarrow AB \perp$

$AB \perp CH$



$36 - 4 = 32$

$49 -$



Сканировано с CamScanner

Черновик

D H C

$a_{11} \cdot a_{15} = a_1$ 9 ~~15~~ =

45 + 90 = 135

$a_1 + 24a + 135k^2_2 > 5439$

$a_1 + 24a_1k + 140k^2 < 5455$

120 − 39

81

$(a_1 + 10 \cdot a_1 + 14) =$

~~5+20~~

69

6

18

+18

144

18

224

44 28

71

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103306**

ID профиля: **221021**

Вариант 23

$\boxed{\text{Шестовик}}$ №5 (начало) $x \in (-11\frac{1}{2}; -4) / -5; -11$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=a$, ~~x>-34~~ $x>-34$ $x\neq-33$ $\Rightarrow$

$\log_{(x+4)^2}(x+34)=b$, $x\neq-4$ $x\neq-5$ $x\neq-2$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=c$ $-x-4>0 \Rightarrow x<-4$, $x\neq-11$, $x > -\frac{23}{2}$

I $-x-4=\left(\sqrt{2x+23}\right)^c$

$x+4=-\left(\sqrt{2x+23}\right)^c$

II $(x+4)^{2b}=x+34$ $\Rightarrow \cancel{\left(\sqrt{2x+23}\right)^{2bc}=x+34}$

$\left(-\left(\sqrt{2x+23}\right)^c\right)^{2b}=x+34$ $(2x+23)^{bc}=x+34$

III $\left(\sqrt{x+34}\right)^a=2x+23$

$\left(\sqrt{(2x+23)^{bc}}\right)^a=2x+23$

$(2x+23)^{\frac{abc}{2}}=2x+23 \Rightarrow \frac{abc}{2}=1 \Rightarrow a\cdot b\cdot c=2$

Расс-им числа x, y, z такие что $x=y$; $z=x+1$, ~~x≠0~~

$x\cdot y\cdot z=2$ (1)

$x\cdot x\cdot(x+1)=2$, ~~x≠0~~ x^3+x^2 ~~возрастает убывает от~~

$x^3+x^2=2$ x^3 возраст от $(-\infty;+\infty)$ x^2 убыв от $(-\infty;0]$ ↗ $[0;+\infty)$

~~$x^2(x+1)=2$~~ x^3 убыв. ~~быстрее чем возраст~~ x^2

при $x=-1$ $-1+1=0<2$ при $x<-1$

при $x\in(-1;0)$ $x^2<1$ $x^3<0$ $\Rightarrow x>-1$

$\boxed{(x^3)'=3x^2\ (x^2)'=(2x) \\ 3x^2>2x \text{ при } x<-1}$

$x^2+x^3<0+1<2$

$x>0$ при $x>0$ x^3+x^2 ~~имеет только~~ возрастает $\Rightarrow$ имеет только

одно решение , (2 - ~~со~~ правая часть - const)

$x^3+x^2=2$, $x=1$ $(1)^3+(1)^2=2 \Rightarrow x=1$

$\Rightarrow$ два из чисел $a, b, c=1$, а одно из них $=1+1=2$

I вар [чистовик] №5 (продолжение)

$a=2 \quad b=c=1$

$(\sqrt{x+34})^2 = 2x+23$ $\qquad$ $x+34 = 2x+23$

$x = 11$, но $x \in (-11\frac{1}{2}; -4) \Rightarrow$ не подх

~~11+4~~

$(x+4)^2 = x+34$

$\sqrt{2x+23} = -x-4$

II вар $b=2 \quad a=c=1$

$(x+4)^4 = x+34$

$\sqrt{x+34} = 2x+23$

$\sqrt{2x+23} = -x-4 \quad |\wedge 2 \qquad 2x+23 = (-(x+4))^2 \quad , x < -4$

$2x+23 = x^2+8x+16$

$x^2+6x-7=0$

$x_{12} = -7; 1$ $\qquad$ $\cancel{x \ne 1}$, $x \in (-11\frac{1}{2}; -4) \Rightarrow x=-7$

$(-7+4)^4 \ne -7+34$

$(-3)^4 \ne 27$

$81 \ne 27$

2

III вар $c=2 \quad a=b=1$

$\begin{cases} (1)\ \sqrt{x+34} = 2x+23 \\ (2)\ (x+4)^2 = x+34 \\ (3)\ (\sqrt{2x+23})^2 = -x-4 \end{cases}$

(3) $2x+23 = -x-4$

$3x = -27$

$x = -9$

(1) $\sqrt{(-9+34)} = -18+23$

$\sqrt{25} = 5$

$\Downarrow$

(2) $(-9+4)^2 = -9+34$

$(-5)^2 = 25$

$\Rightarrow$ все условия выполн $\Rightarrow x=-9$

$\Uparrow$

$-9 \in (-11\frac{1}{2}; -4)$ $\qquad$ $-9 \ne -5$

$-9 \ne -11$

Ответ: $x=-9$

Сканировано с CamScanner

Чистовик

№4

$НОД(a,b,c) = 22$

$a = 22x$ $b = 22y$ $c = 22z$, где $x, y, z \in \mathbb{N}$

~~abc = 2~~ $НОК(a,b,c) = НОД(a,b,c) \cdot x \cdot y \cdot z = 22 \cdot xyz$ =

$2^{16} \cdot 11^{19}$

$22xyz = 2^{16} \cdot 11^{19}$

$x \cdot y \cdot z = 2^{15} \cdot 11^{18}$

~~кол-во способов выбрать тройки x, y,~~

кол-во троек (x, y, z) удовл. усл. $xyz = 2^{15} \cdot 11^{18}$ равно

кол-ву троек (a, b, c)

~~способов выбрать x 16 · 19 = 304~~

пусть $x = 2^{\alpha} \cdot 11^{\beta}$, тогда кол-во способов выбрать $(y, z) = (16-\alpha) \cdot (19-\beta)$, перебираем β от 18

$\alpha = 0$ кол-во выборов $(y, z) = 16 \cdot (1 + 2 + 3 \ldots + 19)$

$\alpha = 1$ кол-во выборов $(y, z) = 15 \cdot (1 + 2 + 3 \ldots + 19)$

$\vdots$

$\alpha = 15$ кол-во выборов $(y, z) = 1 \cdot (1 + 2 + 3 \ldots + 19)$

$\Downarrow$

общее кол-во ~~способов~~ троек равно $(1 + 2 + \ldots 16) \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots 19) =$

$= \frac{(1+16) \cdot 16}{2} \cdot \frac{(1+19) \cdot 19}{2} = \frac{16 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 20}{4} = 8 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 10 = 25840$

$17 \times 8 = 136$

136×19: 1224, 136, 2584

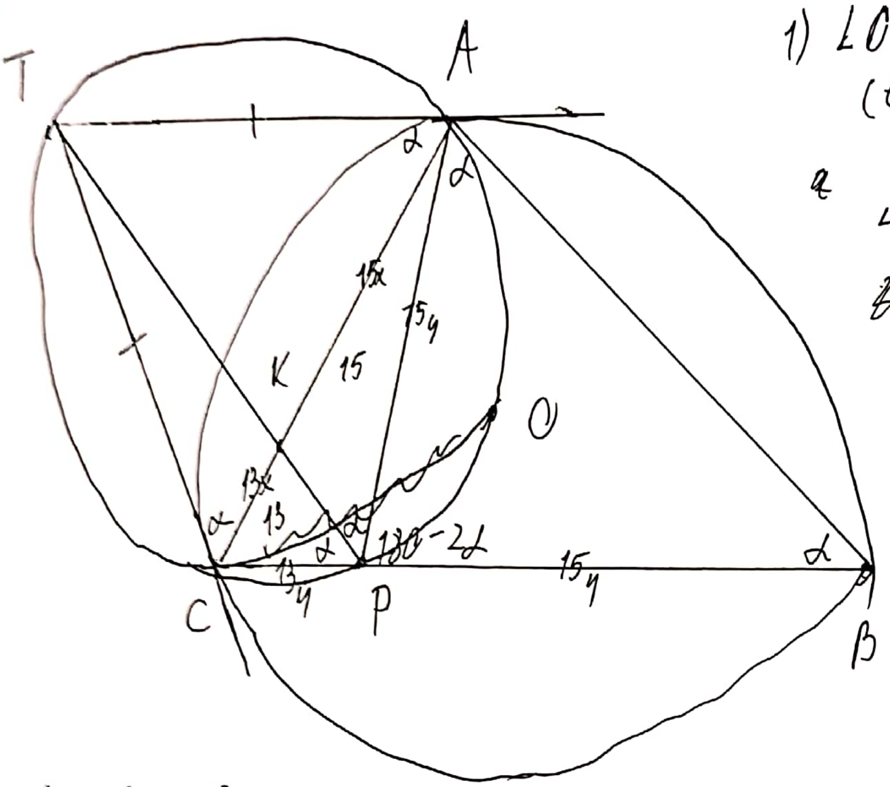
3

Ответ: 25840

черновик

№6

а)



1) $\angle OAT = 90^\circ = \angle OCT$

(~~ОА и~~ (TA и TC - кас)

$\Downarrow$

$\angle OAT + \angle OCT = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Downarrow$

OATC - ~~впис~~ $\Rightarrow$ окр вокр.

T лежит на OAC

2) $\dfrac{AK}{CK} = \dfrac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \dfrac{15}{13}$

3) ~~$\angle TPC = \angle$~~ $\angle TAC = \angle TPC = \angle TPA = \angle TCA$ т. к. опираются ~~(опир~~ на равн. хорды

4) PK - биссектрисса $\Rightarrow \dfrac{AP}{PC} = \dfrac{AK}{CK} = \dfrac{15}{13}$

5) $\angle APB = 180^\circ - \angle APC = 180^\circ - 2\alpha$

6) $\angle ABC = \angle CAT$ (~~угол~~ вписанный и угол м/ду кас. и хордой)

$\qquad\qquad\qquad \shortparallel$
$\qquad\qquad\qquad \alpha$

7) $\angle PAB = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - \alpha = \alpha \Rightarrow AP = PB$

8) $\dfrac{PB}{CP} = \dfrac{AP}{CP} = \dfrac{15}{13} \Rightarrow BP = \dfrac{15}{13} CP$

~~9) $\triangle AKP \sim \triangle TKC$ (по 2м угл) $\Rightarrow \dfrac{AK}{TK} = \dfrac{KP}{KC} = \dfrac{AP}{TC}$~~

~~$\triangle AKT \sim \triangle PKC$ (по 2м угл.) $= \dfrac{AK}{PK} = \dfrac{KT}{KC} = \dfrac{AT}{PC}$~~

~~$AT = TC$ $\dfrac{AT}{PC}$~~ $\dfrac{15x}{TK} = \dfrac{KP}{}$

~~$S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} AH \cdot PC$~~

10) $\left.\begin{array}{l} S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} AH \cdot PC \\ S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \end{array}\right\}$ ~~BC = BP + PC~~ $BC = BP + CP = \dfrac{15}{13} CP + CP = \dfrac{28}{13} CP$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot PC \cdot \dfrac{28}{13} = S_{\triangle APC} \cdot \dfrac{28}{13} = \dfrac{28 \cdot 28}{13} =$

Ответ: а) $\dfrac{784}{13} = 60\dfrac{4}{13}$

4

Черновик

$a = 22 \cdot x$
$b = 22 \cdot y$
$c = 22 \cdot z$

$2x + 23 \neq 1$
$x = -11$

$a \cdot b \cdot c = x \cdot y \cdot z \cdot 2^3 \cdot 11^3 = 2^{16} \cdot 11^{19}$
$xyz = 2^{13} \cdot 11^{16}$

19 × 8 = 152; 152 × 14 = 1064 + 152; 27 + 5 = 32; 258840

$\sqrt[a]{x+34} = 2x+23$

$\left(\sqrt[b]{\left((x+4)^2\right)^6}\right)^a = 2x+23$

$\left((x+4)^2\right)^b = x+34$

$\left(\sqrt{2x+23}\right)^c = -x-4$

$(x+34)^{ab} = 2x+23$
$(x+4)^{2b} = x+34$

19 + 16 = 114, 19, 304

$x+4=t$

$t^{ab} = 2x+23$
$t^{2b} = x+34$

$\left(-\sqrt{2x+23}\right)^{cab} = 2x+23$

16 + 20 = 320, 304

$a \in (0;15)$
$b \in (0;18]$

x^3

x

$x > 0$

15 · 18 вар

6
19 + 17 = 133, 19, 323 × 8 = 2584

$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{4}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot$

$-1+1=0$

$(x^3)' = 3x^2$

$(x^2)' = 2x$

x^2

1 1

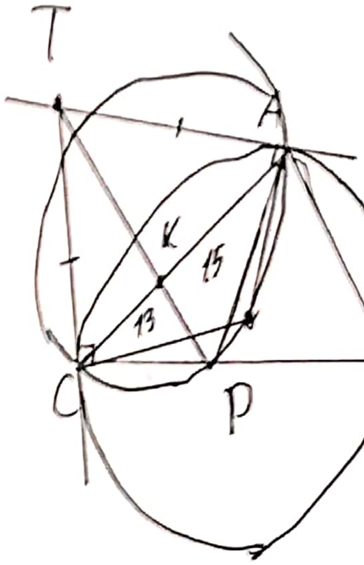
$(3)^4 = 81 \quad -7+34 = 27$
$\sqrt{27} = -14+23$
$3\sqrt{3} = 9$

$2^{\cancel{a}} = 1$

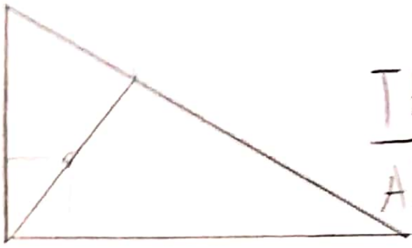
$2^{14} \cdot 11^{8}$

$= 15 \cdot 19$

черновик



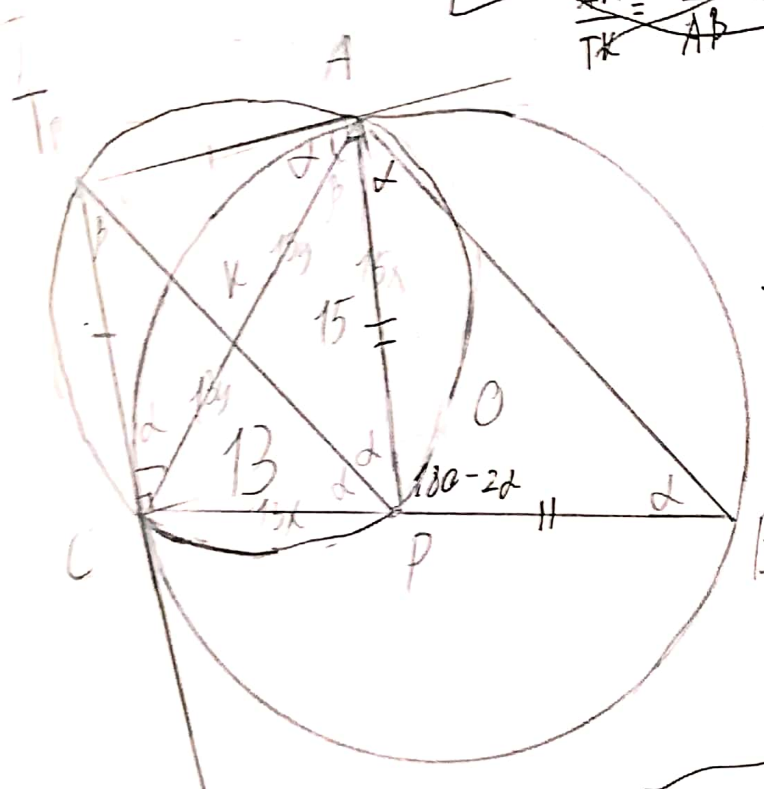
$$\boxed{AK = \frac{15}{13} CK}$$



$$\frac{TK}{AK} = \frac{CK}{PK}$$

$$\boxed{\frac{AK}{KC} = \frac{15}{13}}$$

$$\cancel{\frac{AK}{TK} = \frac{TC}{AP} = \frac{CK}{CK}}$$



$$\frac{AK}{TK} = \frac{PK}{CK} = \frac{AP}{TC}$$

$$\begin{array}{r|l} 784 & 28 \\ -56 & 2 \\ 224 & \end{array}$$

8 64+16

$$\begin{array}{r|l} 784 & 13 \\ 78 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 28 \\ \times 28 \\ \hline 224 \\ 56 \\ \hline 784 \end{array}$$

$$\boxed{\frac{AK}{KC} = \frac{AP}{CP} = \frac{15}{13}}$$

$$\frac{CP}{CK} = \frac{AP}{}$$

$$\times \begin{array}{r} 13 \\ 6 \end{array}$$

18+60=78