Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103250**

ID профиля: **337070**

Вариант 23

Чистовик

(1)

1) S – sum $a_1 a_2 a_3 \dots a_6$ арифм. прог. d - разность прогрессии

прогрессия возрастающая и состоит из целых чисел $\Rightarrow$
$\Rightarrow a_1$ и d - целые, $d>0$

$S = \frac{a_1+a_6}{2}\cdot 6 = \frac{a_1+a_1+5d}{2}\cdot 6 = 3(2a_1+5d) = \underline{6a_1+15d}$

$a_{10}a_{16} > S+39$
$a_{11}a_{15} < S+55$

$\begin{cases}(a_1+9d)(a_1+15d) > S+39\\ (a_1+10d)(a_1+14d) < S+55\end{cases}$

$\begin{cases}(a_1+12d-3d)(a_1+12d+3d) > S+39\\ (a_1+12d-2d)(a_1+12+2d) < S+55\end{cases}$

$\begin{cases}(a_1+12d)^2-9d^2 > 6a_1+15d+39\\ (a_1+12d)^2-4d^2 < 6a_1+15d+55\end{cases}$ $\begin{cases}(a_1+12d)^2-9d^2 > 6a_1+15d+39\\ -(a_1+12d)^2+4d^2 > -6a_1-15d-55\end{cases}$

$\begin{cases}(a_1+12d)^2-9d^2 > 6a_1+15d+39\\ -5d^2 > -16\end{cases}$ $\begin{cases}(a_1+12d)^2-9d^2 > 6a_1+15d+39\\ d^2 < \frac{16}{5}\end{cases}$

$\frac{16}{5} > 3$ | $\frac{16}{5} < 4$
$16 > 15$ | $16 < 20$

d-целое и $d>0 \Rightarrow d = 1; 2; 3\dots$ $d^2 = 1; 4; 9 \dots \Rightarrow$ т.к $d^2 < \frac{16}{5}$, то

$d^2 = 1$, а $\underline{d=1}$ подставим:

$(a_1+12)^2 - 9 > 6a_1+15+39$
$a_1^2+24a_1+144-9 > 6a_1+15+39$
$a_1^2+18a_1+81 = (a_1+9)^2 > 0$
$(a_1+9)^2 > 0 \Rightarrow$
$a_1 \in (-\infty; -9) \cup (9; +\infty)$

проверим на втором выраже:
$(a_1+12)^2 - 4 < 6a_1+15+55$
$a_1^2+24a_1+144-4 < 6a_1+70$
$a_1^2+18a_1+70 < 0$
$D = 81\cdot4 - 4\cdot70 = 4\cdot 11$
$a_1 = \frac{-18\pm2\sqrt{11}}{2} = -9\pm\sqrt{11}$
$\sqrt{11} > 3$ $\sqrt{11} < 4 \Rightarrow$

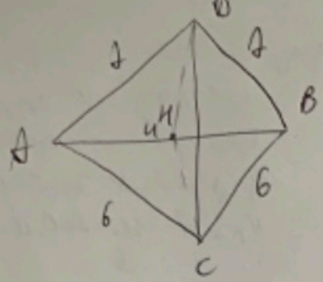
$\Rightarrow \begin{cases} a \in (-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11})\\ a \in (-\infty; -9)\cup(-9; +\infty)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{Z}\\ a \in (-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11}) \setminus \{-9\}\end{cases}$

$\Rightarrow \underline{a_1 = -12; -11; -10; -8; -7; -6}$

Ответ. $a_1 = -12; -11; -10; -8; -7; -6$

Чистовик ②

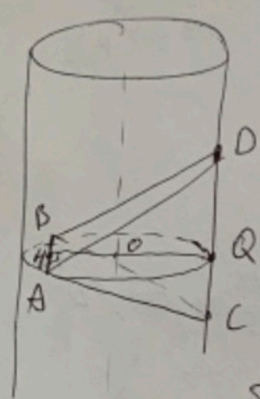
2)



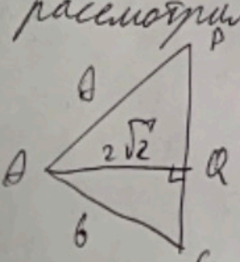
1) Опустим DH в плоск ADB, где DH – высота на AB из т. D. Заметим, что т.к. AD=DB, то DH – выс, мед и бис => AH=HB.
Аналогично с CH_1, $H H_1$ тоже делит AB пополам =>
=> $H=H_1$.

2) В таком случае имеем $AB \perp HD$, $AB \perp HC$ =>
=> $AB \perp HDC$ => $AB \perp DC$.

3) ~~В таком~~ В таком случае если DC ∥ оси цилиндра и D и C лежат на его поверх, ~~это~~ то $AB \perp DC$ и лежит в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, то есть в перпендикулярном сечении цилиндра, которое представляет собой окружность. Т.к. все точки ABCD лежат на цилиндре, то A и B лежат на самой окружности.



В таком случае AB – хорда и, т.к. DC ⊥ перпендик. сечению, то на DC, вместе его пересеч. с ~~окр~~ окружностью, лежит проекция D и C на плоскость перпендик. сечение цилиндра – Q
Заметим также, что △BDQ и ADQ равны
(BD=AD, DQ=const, $\angle BQD = 90$, т.к. DQ ⊥ плоск. сечение) =>
$= \angle AQD$
=> BQ=AQ =>
=> QH, где H, напомню, середина AB, является в △ABQ биссектрисой, медианой, высотой и (!) срединным перпендикуляром => ~~ось, что~~ точка пересечения осью окружности (центр окружности O) лежит на QH.
при фиксированном $\underset{=4}{BA}$, $R = \frac{AB}{2\sin BQA}$ $\sin BQA$ ~~max~~ ~~убывает~~ возраст на $\angle BQA \in$ $\sin BQA\ max = 1$ при ~~$\sin$~~ $\angle BQA = 90°$.
Из этого следует, что BA – гип, QH – медиана из прямого угла => $QH = \frac{1}{2}AB = 2$.
т.к. ~~ABQ~~ ~~следн~~ BQ=QA, то ~~ABQ~~ QB $BQ^2 + AQ^2 = AB^2 = 16 = a^2 + a^2$ => $a = 2\sqrt{2} = BQ = AQ$
рассмотрим △ADC.



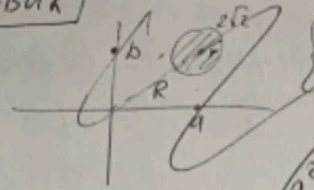
$DQ = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$
$QC = \sqrt{36-8} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

Ответ. DC при min радиусе цилиндра равен $2\sqrt{7} + \sqrt{41}$.

Чистовик

3

3) $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le \min(-4a+4b,\ 8)\end{cases}$



$\begin{cases}R^2\le 8\\ R^2\le -4a+4b\end{cases}$

$4b-4a=0$

$a^2+b^2\le 4-4a+4b$

$(a^2+4a+4)+(b^2-4b+4)\le 8$

$(a+2)^2+(b-2)^2\le 8.$

Заметим, что если $a^2+b^2\le \min(-4a+4b,\ 8)$, то это можно представить как.

$\begin{cases}a^2+b^2\le -4a+4b\\ a^2+b^2\le 8\end{cases}$, т.к.

если $8<-4a+4b$, то более строгим становится второе выражение, и наоборот.

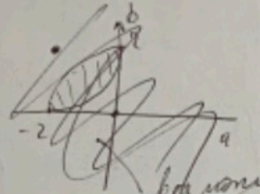
Итого, получается, что

$\begin{cases}a^2+b^2+4a-4b\le 0\\ a^2+b^2\le 8\end{cases}$

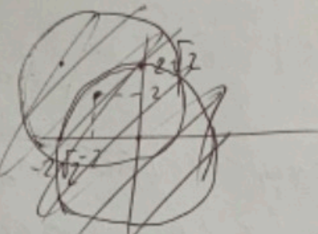
$\begin{cases}a^2+4a+4+b^2-4b+4\le 8\\ a^2+b^2\le 8\end{cases}$

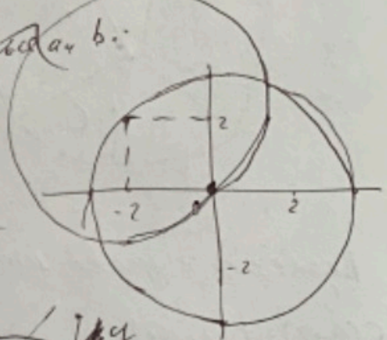
(I) $(a+2)^2+(b-2)^2\le 8$ $\Rightarrow$

(II) $a^2+b^2\le 8$



возможные a и b:

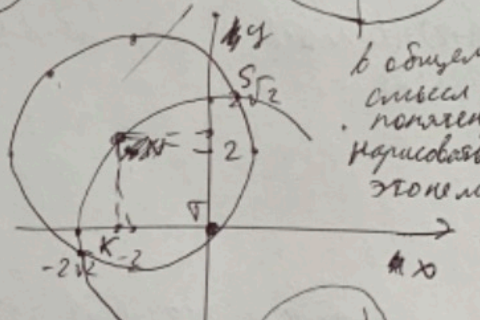




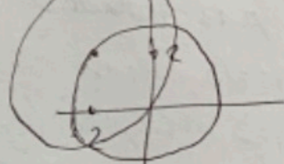
$\Rightarrow$ решение - пересечение двух окружностей с одинак. радиусом и разными коорд центров.

(для ~~второго~~ второго выражения a и b - коорд ~~центров, так что~~ ~~а прямо~~ центров окружностей x и y $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ будем искать набор координат этих центров на плоскости x y.

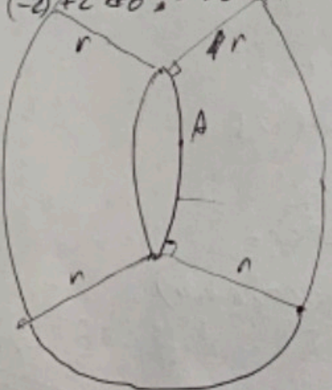


в общем смысл понятен, но нарисовать я это не могу =))

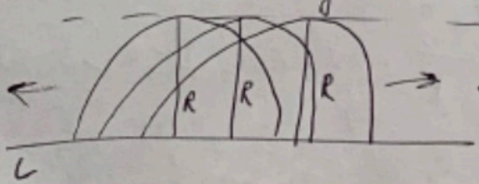


$(-2)^2+2^2=8$ $\Rightarrow$ точка $-2;2$ ~~внутри фигуры~~ (II) лежит на (II) окруж. II

~~Заметим, что в граничной точке~~



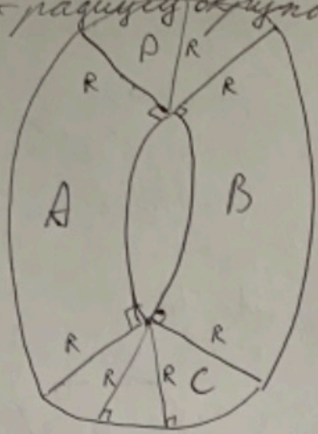
Получившаяся фигура - пересечение двух окружностей. Схема - слева. В таком случае если центр ~~окружно~~ вторичной окружности (окружности относительно xy) находится на поверхности, ~~то максимально да-~~ ~~лека фигуры~~, то максимальный вклад ~~эта~~ в увеличение площади новой фигуры она может внести своей самой дальней точкой (пример снизу)



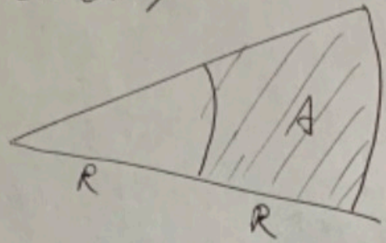
суммарно - просто поднятие на R окружности вверх контур L

ЧИСТОВИК

~~Из~~ итого ~~для гладких~~ нужная нам фигура это просто старая фигура с отступом во **всех** направлениях, равным ~~площа-ди~~ радиусу окружности xy (также $2\sqrt{2}$). Повтор. примера:



фигура A идентична фигуре B: это сектор 2R-сектор R: (т.к. ~~дд~~ кривая слева-~~этоугол~~, впрочем как и кривая справа-дуги окр.)



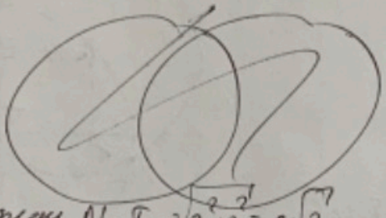
каков же раствор этого сектора?

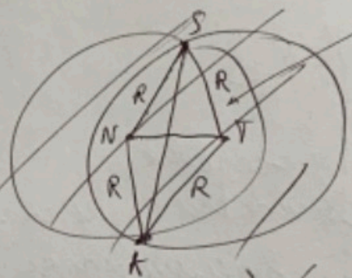
4 стр

Вернёмся к уравнениям изначальной фигуры (в ее контура)

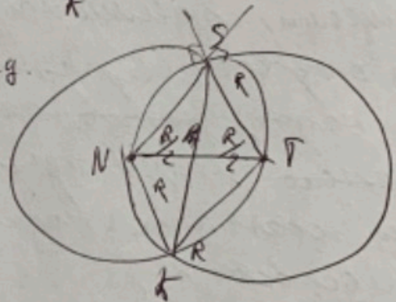
$$\begin{cases}(a+2)^2+(b-2)^2=8\\ a^2+b^2=8\end{cases}$$

Заметим, что прямая $KS \perp NT$ и делит ее пополам! ромб!





расстояние между N и T $-\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$



из геометрии чертежа $\angle NTS=60^\circ$, $\angle NSP=60^\circ$ и т.д.

боковых разниц.

$\Rightarrow$ угол раствора секторов -120°, а секторов сверху и снизу -60°.

итого $S_A=\cancel{2\sqrt{2}}\,\pi\cdot(2R)^2\cdot\frac{120}{360}-\pi\cdot R^2\cdot\frac{120}{360}=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 3R^2=\pi\cdot 2\sqrt{2}^2=8\pi$

$S_D=S_C=\pi\cdot R^2\cdot\frac{60}{360}=\pi R^2\cdot\frac{1}{6}=\pi\cdot\frac{8}{6}=\pi\cdot\frac{4}{3}$ итого

(просто сектор, не разница) $S_{внеш}=S_A+S_B+S_C+S_D=2S_A+2S_C=$

$=16\pi+\frac{8}{3}\pi$

S внутр самой фигуры (очевидно, также захватываемая) - сумма S сегментов (равных.) SNK и STK (не Δ, а именно сегм)

$S_{сегм}=S_{сек}-S_{треуг.}=\pi R^2\cdot\frac{120}{360}-R^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 120=\frac{\pi R^2}{3}-R^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi R^2}{3}-R^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$

$S_{внутр.\ фиг.}=2S_{сегм}=\frac{16}{3}\pi-4\sqrt{3}$ итого! Вся $S=16\pi+\frac{8}{3}\pi+\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}=$

$=16\pi+\frac{16}{3}\pi-2\sqrt{3}=21\frac{1}{3}\pi-2\sqrt{3}$ Ответ. $21\frac{1}{3}\pi-2\sqrt{3}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103250**

ID профиля: **337070**

Вариант 23

Чистовик

5) $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$ $\log_{(x+4)^2}(x+34)$ $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$ ①

$-x-4=a$ $\sqrt{x+34}=b$ ~~a, b, c~~ $a\in(0;+\infty)\setminus 1$

$\sqrt{2x+23}=c$ $b\in(0;+\infty)\setminus 1$ (потом уточним)

$c\in(0;+\infty)\setminus 1$

$\log_b c^2;\ \log_{a^2} b^2;\ \log_c a$

$2\log_b c;\ \log_a b;\ \log_c a$ ~~1. пусть $\log_a b=\log_c a$, а $2\log_b c=\log_a b+1$~~

заметил, что $-x-4>0$ и $-x-4\neq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x<-4$ $x\neq -5$

~~$\log_a b\cdot\log_a c=$~~

~~$\log_{(-x-4)}\sqrt{x+34}=\log_{\sqrt{x+34}\sqrt{2x+23}}^{-x-4}$~~

$\sqrt{x+34}>0$ $\sqrt{x+34}\neq 1$

$x>-34$

$x\neq -33$ $\sqrt{2x+23}>0$ и $\sqrt{2x+23}\neq 1$

$x>-\frac{23}{2}$ $-11{,}5$ $x\neq -11$

$\Rightarrow \boxed{x\in(-11{,}5;-4)\setminus\{-11;-5\}\Rightarrow}$

~~$\Rightarrow \sqrt{x+34}\in(\sqrt{22{,}5};\sqrt{30})\setminus\{\sqrt{23};\sqrt{29}\}$~~

~~$\Rightarrow \sqrt{2x+23}\in(0;\sqrt{15})\setminus\{1;\sqrt{13}\}$~~

~~$\Rightarrow -x-4\in(0;7{,}5)\setminus\{1;7\}$~~

если $\log_c a=\log_a b$ и $2\log_b c=\log_c a+1$, то

~~$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=\log_{(-x-4)}\sqrt{x+34}$~~

$2\log_b c^2=\log_c ac$

~~$\log_{2x+23}(x+4)^2=\log_{(x+4)^2}x+34$~~

$1;13$ $0;7{,}5^2$ $(0;7{,}5^2)$ $(23;29)$

$\log_b c$

$2\log_b c=\log_c a+1$

~~при $\log_{\sqrt{x+34}}=t$~~

~~$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=\log_{(x+4)^2}(x+34)=\log_{\sqrt{2x+23}}\frac{(-x-4)}{\sqrt{2x+23}}$~~

~~$\sqrt{x+34}$ $=2x+23$~~

~~$\log_{(x+34)}(2x+23)\cdot\log_{(2x+23)}\frac{(x+4)^2}{(2x+23)}=$~~

~~$=\log_{(x+34)}\frac{(x+4)^2}{2x+23}=(\log_{(x+4)^2}(x+34))^2$~~

d e f

$d\cdot e\cdot f=1.$

~~Пусть $d=\log_{\sqrt{x+34}}$~~

21103250 (U337070 M1297334)

5) продолж.

(Чистовик) (2)

пусть $d = \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = 2\log_{\sqrt{x+34}}\sqrt{2x+23}$

$e = \log_{(x+4)^2}(x+34) = \log_{-x-4}\sqrt{x+34}$

$f = \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$d \cdot e \cdot f = 2.$

~~при~~ пусть равные логарифмы $= k$.

Тогда $k \cdot k \cdot (k+1) = 2$. $k^3 + k^2 = 2$. $k^3 + k^2 - 2 = 0$

1	1	0	-2
1	2	2	0

$D = 4 - 4 \cdot 2 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ единственный вариант, когда $k = 1$, а $k+1 = 2 \Rightarrow$

пусть ~~$2\log_{\sqrt{x+34}}\sqrt{2x+23} = 1$~~ $\log_{-x-4}\sqrt{x+34} = 1$

Тогда $-x-4 = \sqrt{x+34}$

$x^2 + 8x + 16 = x + 34$

$x^2 + 7x - 18 = 0$

$(x+9)(x-2) = 0$

согласно тому, что $x \in (-11{,}5; -4)$

$(-11{,}5; -4) \setminus \{-11; -5\}$

(самое большое огран.)

подходит лишь $\underline{x = -9}$

в таком случае $d = 2\log_5 \sqrt{5} = 1$

$e = 1$

$f = \log_{\sqrt{5}} 5 = 2$

попробуем сделать так, чтобы $f = 1$:

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = 1$

$\sqrt{2x+23} = (-x-4)$

$2x + 23 = x^2 + ~~16~~ 8x + 16$

$x^2 + 6x - 7 = 0$

$(x+7)(x-1) = 0$

подходит лишь $\underline{x = -7}$

$d = 2\log_{\sqrt{27}}\sqrt{9} = 2 \cdot \log_{\sqrt{3}^3}\sqrt{3}^2 = \frac{4}{3}$

$e = \log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2}$

$f = 1$

не работает.

~~пусть~~

~~пробовать, чтобы~~

попробуем $d = 1$.

~~$\log_{-x-4}\sqrt{x+34} = 1$~~

~~$-x-4 = \sqrt{x+34}$~~

~~$x^2 + 8x + 16 = x + 34$~~

~~$2\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = 1$~~

~~$\sqrt{x+34} = 2x+23$~~

~~$x + 34 = 4x^2 + 92x + 529$~~

~~$3x^2 + 91x + 495 = 0$~~

~~$D = 8464 - 12 \cdot 495 = 3524$~~

~~$x = \frac{-92 \pm 2\sqrt{631}}{3}$~~

~~$-92 \pm \sqrt{631}$~~

~~$D = 4 \cdot 46^2 - 4 \cdot 3 \cdot 495 = 4 \cdot 46^2 - 3 \cdot 495$~~

~~$495 = 5 \cdot 99$~~

~~$495 \cdot 3 = 1500 - 15 = 1485$~~

~~$4 \cdot 81 - 9 \cdot 92 + 529$~~

~~$324 - 810 - 18 + 529 = 495$~~

~~$4x^2 + 92x + 495 = 0$~~

~~$D = 4^2 \cdot 23^2 - 4^2 \cdot 495 = 4^2 \cdot (529 - 495)$~~

$D = 91^2 - 16 \cdot 495$.

Чистовик

3

$495 \cdot 16 = 500 \cdot 16 - 5 \cdot 16 = 8000 - 5 \cdot 16 = 8000 - 80 = 7920$

$$\begin{array}{r} 91 \\ \times 91 \\ \hline 91 \\ +819 \\ \hline 8289 \end{array}$$

$D = 8289 - 7920 = 289 + 80 = 3$

$4 \cdot 81 + 91 \cdot 9 + 495$

$324 - 819 + 495$

$$\begin{array}{r} 8289 \\ -7920 \\ \hline 369 \end{array}$$

$369 = 3 \cdot 123 = 9 \cdot 41$

$\frac{-91 \pm 3\sqrt{41}}{8}$

$$\begin{array}{r} 495 \\ \times 16 \\ \hline 2970 \\ 495 \\ \hline 7920 \end{array}$$

$123 \mid 3 \quad 41$

Т. к. b уже побывала 1, а других условий при которых она могла бы это сделать - нет ($c = 1$ только при $x = 7$, f не обращается в 1), то единственное решение - $x = -9$

Ответ. $x = -9$.

Чистовик (4)

4) НОД ~~А~~ $a; b; c = 22$ $\Rightarrow$ ~~от~~ минимум: у каждого должно быть $2^1 \cdot 11^1$. Максимум 2^{16} и максимум 11^{19}

НОК $a; b; c = 2^{16} \cdot 11^{19}$

(взаимно простые, не перемешиваются)

$2\ 11 \quad 2^{16}\ 11^{19} \quad 2\ 11$ то есть ~~то~~ должны быть числа, в которых есть только 2, только 11, только 2^{16} и только 11^{19}, остальное - в промежуток.

нужно расставить 2 и 2^{16} рандомно (претендентов 3 $\Rightarrow C_3^2$ и аналогично 11 и 11^{19} рандомно C_3^2.

__ __ __ __ __ __

2 11 2 11 2 11

оставшиеся два места ~~ф~~ - одно для 2^n, другое для 11^k - определены строго, но стоят там числа не определенные, т.к. $n \in [1; 16]$ и k от 1 до 19 (включая.) ~~...~~ не забудем про вповторы:

в каждой из комбинаций kC_3^2 расстановок первых четырёх определённых чисел будет встречаться дублёр одного из чисел, которое мы захотим создать. И дублёров этих будет целых 2, и они различны. ~~ст~~

Итого: $(19 \cdot 16 - 2) \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 9 \cdot (19 \cdot 16 - 2) = 9 \cdot 302 = 2718$ троек.

~~19·16~~

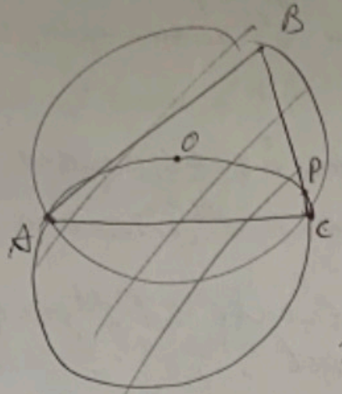
$16 \cdot 19 = 16 \cdot 20 - 16 = 320 - 16 = 304$

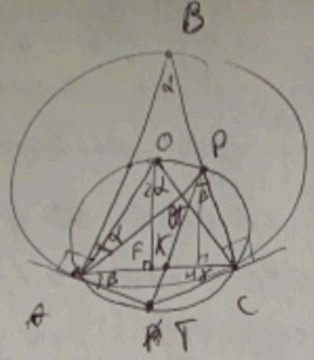
$302 \cdot 9 = 2718$

Ответ. 2718.

Шестовск. 5

6)





1) Заметим, что т.к. $\angle OAT = 90^\circ$, т.к. OA - радиус, проведенный к точке касания и касательной AT. Аналогично $OCT = 90^\circ \Rightarrow OCTA$ вписан в окружность, причём ту самую, описанную вокруг $\triangle OCA$.

$S_{\triangle APK} = 15$, $S_{\triangle CPK} = 13 \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{15}{13}$ (т.к. PH, высота на AC, равна const)

$180 - 2\alpha + \beta + \gamma = 180$

$\beta + \gamma = 2\alpha$ $\quad 180 - 2\alpha + \alpha + ? = 180$

т.к. $\angle APC$ опир на ту же дугу, что и $\angle AOC$, то $\angle AOC = \angle APC$ (с одной стороны от AC). В свою очередь

$\angle AOC$ - центральный угол, опир на AC, а $\angle ABC$ - впис угол, опир на AC (с одной стороны от AC) $\Rightarrow \angle ABC = \alpha$, $\angle AOC = 2\alpha$, $\angle APC = 2\alpha$, $\angle ABP = 180 - \alpha - (180 - 2\alpha) =$
$= \alpha \Rightarrow \triangle BPA$ - р/б, $BP = PA$.

Пусть $\angle TPC = \beta$. Тогда (по св. описанному ранее) $\angle TAC = \beta$.

Пусть $\angle APT = \gamma$. Тогда $\angle ACT = \gamma$.

Заметим, что $AT = TC$ (кас. к одной и той же окр. из одной точки) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ACT = \gamma = \angle TAC = \beta \Rightarrow \gamma = \beta \Rightarrow \angle APT = \angle CPT \Rightarrow PK$ - биссектриса угла APC $\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC}$ (по свойству бис) $\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{15}{13} \Rightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{15}{13}$
(т.к. $PB = AP$) $\Rightarrow \frac{BC}{PC} = \frac{28}{13}$. $S_{APC} = 15 + 13 = 28$. $S_{ABC} = \frac{BC}{PC} \cdot S_{APC}$, т.к.
высота из A на сторону BC - const $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{28}{13} \cdot 28 = \frac{28^2}{13} = \frac{4 \cdot 196}{13} =$
$= \frac{800 - 16}{13} = \frac{784}{13}$

Чистовик ⑥

б) продолж.

~~если~~ б) Если $\angle ABC = \operatorname{arcctg}\frac{4}{7}$, то его $tg = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = tg^2 x = \frac{16}{49}$

$\frac{16}{49} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{65}{49} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\cos x = \frac{7}{\sqrt{65}}$

$\sin^2 x = \cancel{49} \ \frac{49}{65} = \frac{4}{\sqrt{65}}$

~~Рассмотрим △AOC. ∠AOC = 2α = 2∠ABC, AO = OC. Проведем OF, высоту из O на AC. Тогда △AOF = △OFC (AO = OC, OF-общая и ∠AFO = ∠(FO = 90°)) ⇒ ∠AOF = α и ∠FOC = α. AF = ½ AC. Пусть AC = b. Тогда~~

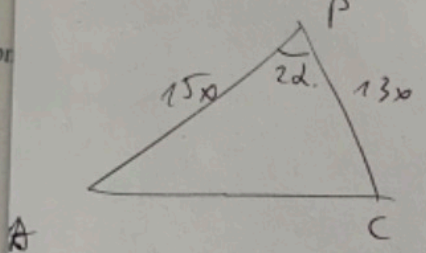
Пусть $AP = 15x$ и $PC = 13x$.

$225x^2 + 169x^2 - 2\cdot 15x^2\cdot 13\cdot\cos 2\alpha = AC^2$

$\cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{4}{\sqrt{65}}\cdot\frac{7}{\sqrt{65}} = \frac{56}{65}$

$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \frac{56^2}{65^2}}$



$S = 28$. $S = AP\cdot PC\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 2\alpha = 15\cdot 13\cdot x^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{56}{65}$

$28 = 15\cdot 13\cdot x^2\cdot\frac{28}{65}$ $x^2 = \frac{65}{15\cdot 13} = \frac{5\cdot 13}{3\cdot 5\cdot 13} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$AC = \sqrt{\frac{225}{3} + \frac{169}{3} - 2\cdot\frac{15\cdot 13}{3}\cdot\cos 2\alpha}$

25.

$\cos 2\alpha = \sqrt{\frac{65^2 - 56^2}{65^2}} = \frac{33}{65}$

$AC = \sqrt{\frac{394}{3} - \frac{30\cdot 13}{3}\cdot\frac{33}{65}} =$

$= \sqrt{\frac{394}{3} - 10\cdot\frac{13\cdot 33}{5\cdot 13}} =$

$= \sqrt{\frac{394}{3} - 66} = \sqrt{\frac{394 - 198}{3}} =$

$= \sqrt{\frac{196}{3}} = \boxed{\frac{14}{\sqrt{3}}} = AC.$

$65^2 = 13^2\cdot 5^2$

$56^2 = 28^2 = 4^2\cdot 7^2\cdot 4$

$169\cdot 25 = 16900 : 4 =$

$= 4225$

$49\cdot 16 = 50\cdot 16 - 16 =$

$= 800 - 16 = 784$

$784\cdot 4 = 3136$

$4225 - 3136 = 1089 = 121\cdot 9 = (11\cdot 3)^2 = 33^2$

$1089 : 9 = 121$

$33\cdot 33 = 1089$

$225 + 169 = 394$

$66\cdot 3 = 198$

$S_{ABC} = \frac{784}{13}$

Ответ. $AC = \frac{14}{\sqrt{3}}$