Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103213**

ID профиля: **356006**

Вариант 23

Математика, 11 кл.

№1 Чистовик

$(a_n): a_1; a_2; a_3 \dots$ — арифм. прогрессия. d — её разность.

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 6a_1 + 21d - 6d = 6a_1 + 15d$

$$\left.\begin{matrix} \forall a_i \in \mathbb{Z};\ a_i < a_{i+1} \\ d = \underset{\mathbb{Z}}{a_2} - \underset{\mathbb{Z}}{a_1} \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_2 - a_1 > 0 \Rightarrow d \in \mathbb{N}.$$

1

1) Найдём d.

$$\forall a_i = a_1 + id - d. \Rightarrow \begin{cases} a_{10} = a_1 + 9d; \\ a_{11} = a_1 + 10d; \\ a_{15} = a_1 + 14d; \\ a_{16} = a_1 + 15d. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{10}a_{16} = a_1^2 + 24da_1 + 135d^2; \\ a_{11}a_{15} = a_1^2 + 24da_1 + 140d^2. \end{cases} \\ \begin{cases} a_{10}a_{16} > S + 39; \\ a_{11}a_{15} < S + 55. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{10}a_{16} > S + 39; \\ -a_{11}a_{15} > -S - 55 \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 24da_1 + 135d^2 > S + 39; \\ -a_1^2 - 24da_1 - 140d^2 > -S - 55. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$-5d^2 > -16 \quad | \cdot (-0{,}2)$$

$$\left.\begin{matrix} d^2 < \frac{16}{5} = 3{,}2 < 4; \\ d \in \mathbb{N}. \end{matrix}\right\} \Rightarrow d = 1.$$

2) $S = 6a_1 + 15$

$$\forall a_i = a_1 + i - 1 \Rightarrow \begin{cases} a_{10} = a_1 + 9 \\ \text{и.т.д.} \end{cases}$$

Итак.
$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 135 > S + 39 = 6a_1 + 15 + 39 = 6a_1 + 54; \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < S + 55 = 6a_1 + 15 + 55 = 6a_1 + 70. \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0; \\ a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1 + 9)^2 > 0; \\ a_1 \in (-9 - \sqrt{11}; -9 + \sqrt{11})_{\mathbb{Z}}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq -9 \\ a_1 \in [-11; -6]_{\mathbb{Z}} \end{cases}$$

Ответ: $-11; -10; -8; -7; -6.$

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 = S$ $\quad a_i = a_1 + id - d$ $\quad S = 6a_1 + 21d - 6d = 6a_1 + 15d$

$24da_1 + a_1^2 + 135d^2 = a_{10}a_{16} > S + 39$

$a_1^2 + 24da_1 + \cancel{140d^2} a_{11}a_{15} < S + 55$

$$+\begin{cases} 24da_1 + a_1^2 + 135d^2 > S + 39 & C \\ -24da_1 - a_1^2 - 140d^2 > -S - 55 & D \end{cases}$$

$-5d^2 > -25 + 9 = -16$

$d^2 < \frac{16}{5} = \cancel{4}$

$-2 < -\frac{4}{\sqrt{5}} < d < \frac{4}{\sqrt{5}} < 2$

$d \in [-1; 1]_{\mathbb{Z}} \Rightarrow d = 1.$

$131 - 50 = 81$

$a_1 = -9 \pm \sqrt{11}$

$a_1 \in (-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11})_{\mathbb{Z}}$

$a_1 \in [-11; -6]$

$S = 6a_1 + 15$

$24a_1 + a_1^2 + \cancel{135}^{120} > 6a_1 + \cancel{15} + 39$

$a_1^2 + 24a_1 + \cancel{140} < 6a_1 + \cancel{15} + \cancel{55} = 6a_1 + \cancel{70}$

$t + 86 = a_1^2 + 18a_1 + 86 > 0$ $\quad D/4 = 81 - 86 < 0$ $\quad (a_1+9)^2 \neq 0$

$t + 70 = \boxed{a_1^2 + 18a_1 + 70} < 0$ $\quad D/4 = 81 - 70 = 11$ $\quad a_1 \neq -9$

$\cancel{a_1^2 + 18a_1 < -70}$

$a^2 + b^2 \le -4a + 4b = 4b - 4a$

$4 \cdot \min(b - a; 2)$

$a^2 + b^2 \le 4a + 4b$

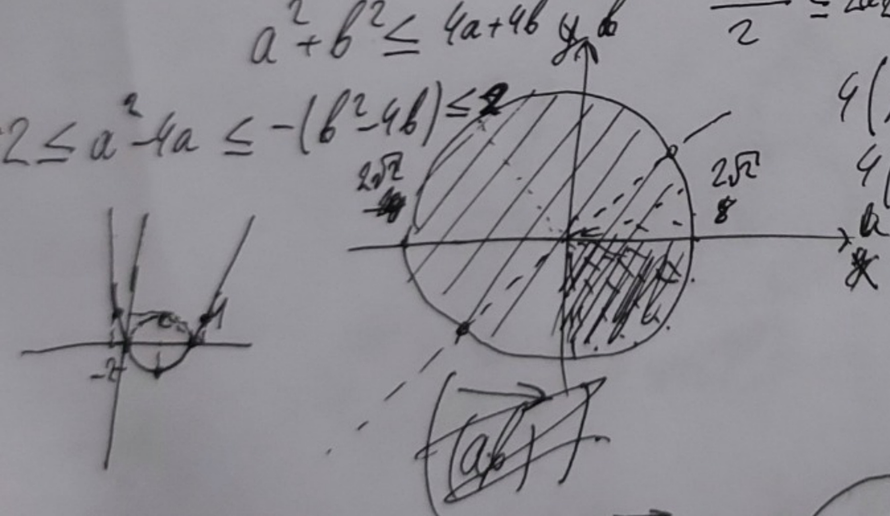
$\frac{a^2+b^2}{2} \le 2a+2b$

$4\left(\min\left(b - a - \frac{b-a}{2} - 1; 2 - \frac{b-a}{2} - 1\right) + \frac{b-a}{2}\right)$

$4\left(\min\left(\frac{b-a}{2} - 1; 1 - \frac{b-a}{2}\right) + \frac{b-a}{2} + 1\right)$

$4\left(\left|\frac{b-a}{2} - 1\right| + \frac{b-a}{2} + 1\right)$

$-2 \le a^2 - 4a \le -(b^2 - 4b) \le 2$



$|2b - 2a - 4| + 2b - 2a + 4$

$\vec{(a;b)} \cdot \vec{(a;b)} \le \vec{(a;b)} \cdot \vec{(4;4)}$

$\vec{x}$ $\quad \vec{y}$

$4\sqrt{2} = \sqrt{32}$

$x^2 \le \vec{x} \cdot \vec{y}$

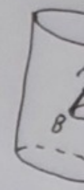
$|\vec{x}| \le |\vec{y}| \cdot \cos \widehat{\vec{x}\vec{y}} \le |\vec{y}|$

$|x|^2 \le |x| \cdot |y| \cdot \cos \widehat{xy}$

$= \cancel{|\vec{y}| \cdot \cos(\text{arctg} 1} + \text{arctg}$

(a;b) – центр.

N2.



$\sin\alpha + \cos\alpha \ge 1$

$a^2+b^2 \le 4a+4b$

$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 \le 4\sigma_1$

$\cancel{\sigma_1^2 = 4\sigma_1}$ $\sigma_2 \ge \frac{\sigma_1^2 - 4\sigma_1}{2} = \frac{\sigma_1^2}{2} - 2\sigma_1$

$a = -2 \pm \sqrt{8-(b+2)^2}$

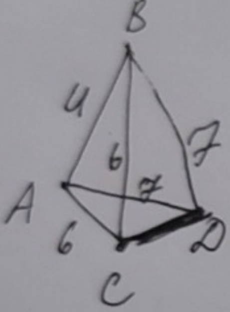
$a \in [-2-\sqrt{8-(b+2)^2}; -2+\sqrt{8-(b+2)^2}]$

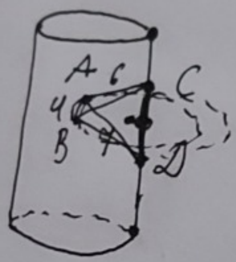
$a^2+b^2+4a-4b \le 0$

$\cancel{b^2-4b+(a^2+4a) \le 0}$

$\cancel{D_{/4} = 4-a^2-4a = a^2}$

$a^2+4a+(b^2-4b) \le 0$

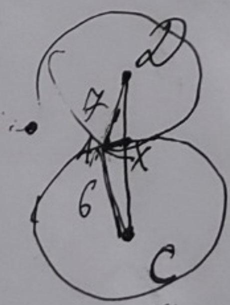




$D_{/4} = 4-b^2-4b =$

$= -(b+2)^2+8 =$

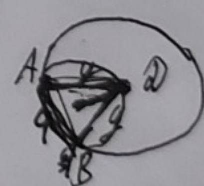
$= 8-(b+2)^2 \ge 0$

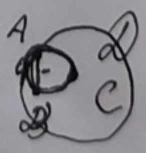


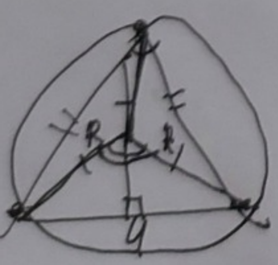
2

$x < 7+6$

$? \le y \le 6$







$R = \frac{2}{3}(y^2-4)$

$4^2 \le 2y^2$

$8 \le y^2$

$y \ge 2\sqrt{2}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103213**

ID профиля: **356006**

Вариант 23

Чистовик

№5 ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x+23>0; \\ 2x+23\neq 1; \\ x+34>0; \\ x+34\neq 1; \\ -x-4>0; \\ -x-4\neq 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-\frac{23}{2}=-11,5; \\ x>-34; \ \text{X} \\ x<4; \\ x\neq -11; \\ x\neq -33; \ \text{X} \\ x\neq -5; \end{cases} \Rightarrow x\in(-11,5;-11)\cup(-11;-5)\cup(-5;4)$$

] $$\begin{cases} \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=2\log_{x+34}(2x+23)=a; \\ \log_{(x+4)^2}(x+34)=\frac{1}{2}\log_{-x-4}(x+34)=b; \\ \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=2\log_{2x+23}(-x-4)=c. \end{cases} \Rightarrow$$

1

$$\Rightarrow abc=2$$

Пусть равные логарифмы равны X. Следовательно третий равен X+1 ⇒

$$\Rightarrow X\cdot X\cdot(X+1)=2$$

$$X^3+X^2=2$$

1) $X>0$:

X^3 – монот. возр.
X^2 – монот. возр. $\Rightarrow X^3+X^2$ – мон. возр. ⇒ не более 1 решения.

При $X=1$ – верно.

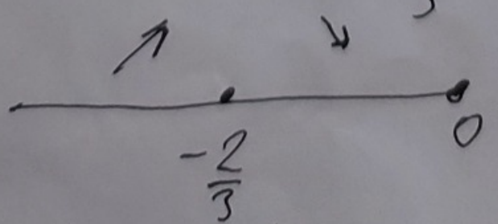
2) $X<0$:

Пусть $f(x)=x^3+x^2 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2x$.

$$f'(x)=0$$

$$x(3x+2)=0$$

$$x=0 \vee x=-\frac{2}{3}$$



$$f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}-\frac{8}{27}<2 \Rightarrow$$ при $X<0$ корней нет.

Итак. Чистовик.

$\exists! x: x^3+x^2=2.$

$x=1. \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=b=1; \\ c=2;\end{cases} (1)\\ \begin{cases}a=c=1; \\ b=2;\end{cases} (2)\\ \begin{cases}b=c=1; \\ a=2.\end{cases} (3)\end{array}\right.$$

2

$1) \Rightarrow \begin{cases}2x+23=\sqrt{x+34}; \\ (x+4)^2=x+34.\end{cases} \Rightarrow 2x+23=|x+4|=-x-4$

$3x+27=0$

$x+9=0$

$x=-9.$

Проверка: $23-18 \overset{?}{=} \sqrt{34-9}$; $-(-9)-4 \overset{?}{=} 2\cdot(-9)+23$

$5=\sqrt{25}$ ✓ $\quad 5=5$ ✓

$3) \Rightarrow \begin{cases}(x+4)^2=x+34; \\ \sqrt{2x+23}=-x-4;\end{cases} \Rightarrow x+34=2x+23$

$-x=-11$

$x=11 \notin$ ОДЗ.

$2) \Rightarrow \begin{cases}x+34=2x+23 \\ x=11 \notin \text{ОДЗ}.\end{cases}$

Ответ: $x=-9$

21103213 (U356006 M1297370)

Чистовик.

№4

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=22 \\ НОК(a,b,c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

1) $НОД(a,b,c)=22 \Rightarrow \begin{cases} a \vdots 22; \\ b \vdots 22; \\ c \vdots 22. \end{cases} \Rightarrow$ в каноническом разложении чисел a, b, c есть такие простые числа как 2 и 11.

$НОК(a,b;c) \not\vdots p$, где p - простое число, не равное 11 или 2.

$\Downarrow$

$\begin{cases} a \not\vdots p; \\ b \not\vdots p; \\ c \not\vdots p. \end{cases} \Rightarrow$ в кан. разл. чисел a, b, c нет никаких других простых чисел.

2) Пусть $\begin{cases} a=2^{a_1}\cdot 11^{a_2}; \\ b=2^{b_1}\cdot 11^{b_2}; \\ c=2^{c_1}\cdot 11^{c_2} \end{cases}$

3

$НОД=2^1\cdot 11^1 \Leftrightarrow \begin{cases} \min(a_1,b_1,c_1)=1; \\ \min(a_2;b_2;c_2)=1. \end{cases}$

$НОК=2^{16}\cdot 11^{19} \Leftrightarrow \begin{cases} \max(a_1;b_1;c_1)=16; \\ \max(a_2;b_2;c_2)=19. \end{cases}$

2.1) Найти $\forall(a_1;b_1;c_1): \begin{cases} \min=1; \\ \max=16. \end{cases}$

Пусть $a_1 \geq b_1 \geq c_1. \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1=16; \\ c_1=1; \\ b_1 \in (1;16)_{\mathbb{Z}}. \end{cases}$ ~~14 вар.~~ $\cdot 3!$

$14\cdot 3!=84$

Плюс 2вар. $((1;1;16)$ и $(1;16;16))\cdot 3=6$ вар. Итого $84+6=90$

2.2) Найти $\forall(a_2;b_2;c_2): \begin{cases} \min(a_2;b_2;c_2)=1; \\ \max=19. \end{cases}$

Рассуждая аналог. всего $17\cdot 3!+2\cdot 3=102+6=108$ вар.

3) Показатели степени числа 11 не зависят от показателей степени числа 2 и наоборот. $\Rightarrow$ всего $108\cdot 90$ вар. $=$ 9720

Ответ: 9720.

21103213 (U356006 M1297370)

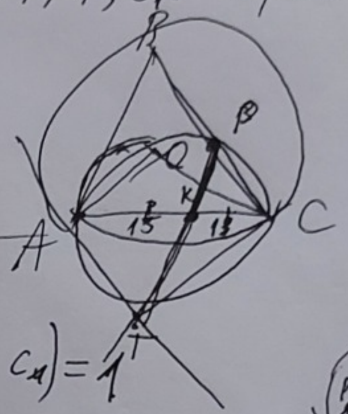
~~НОД и НОК делятся только на два простых числа ⇒ a, b, и c тоже делятся только на 2 простых числа.~~

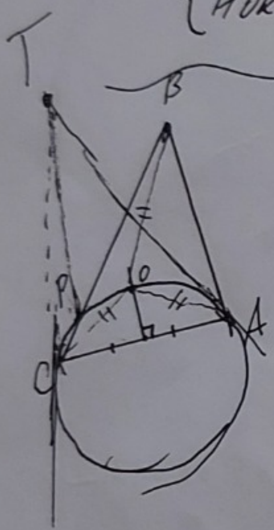
$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=22; \\ НОК(a,b,c)=2^{16}\cdot 11^{19}. \end{cases}$$

Уравнение симметрическое ⇒ ~~Пусть $a \geq b \geq c$.~~

$$\exists \left.\begin{cases} a=2^{a_1}\cdot 11^{a_2}; \\ b=2^{b_1}\cdot 11^{b_2}; \\ c=2^{c_1}\cdot 11^{c_2}. \\ НОД(a,b,c)=22; \\ НОК(a,b,c)=2^{16}\cdot 11^{19}. \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$\min(a_1;b_1;c_1)=1$; $\max=16$.



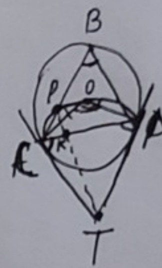


$a=22a_1$

$b=22b_1$

$c=22c_1$

$(a_1;b_1;c_1)=1$



$a\cdot a_2=2^{16}\cdot 11^{19}$

$b\cdot b_2=2^{16}\cdot 11^{19}$

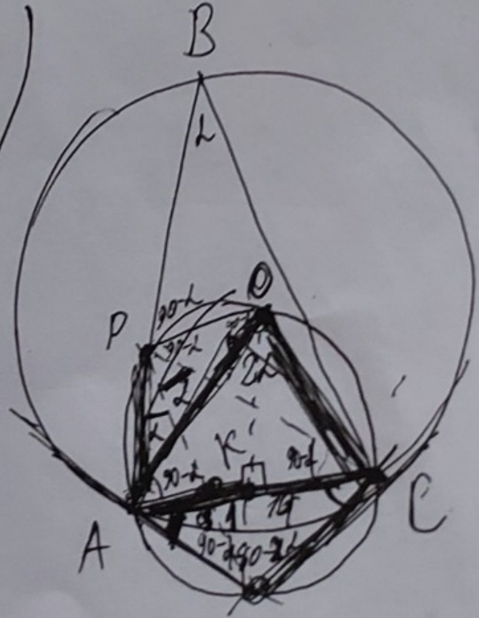
$c\cdot c_2=2^{16}\cdot 11^{19}$

$16\cdot 6$

$(1;\ ;16)$ - 6!

$19\cdot 6$

$(1;\ ;19)$



$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$
$\log_{(x+4)^2}(x+34)$
$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$$\begin{cases} (a,b,c)=2 \\ [a,b,c]=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$a=2^{a_1}\cdot 11^{a_2}$
$b=2^{b_1}\cdot 11^{b_2}$
$c=2^{c_1}\cdot 11^{c_2}$

$a \geq b \geq c$

$286\cdot 3!$ $\quad 286\cdot 3! =$
$= 1200+36+$
$100+36+150=286.+480=$
$b_1\in[1;16]$ $\quad 16 = 176$
$a_1=16;\ c_1=1$

$\boxed{2\log_{x+34}(2x+23)}$ a
$\boxed{\frac{1}{2}\log_{-x-4}(x+34)}$ b
$\boxed{2\log_{2x+23}(-x-4)}$ c

$\min(a_1; b_1, c_1)=1;\ \max(a_1, b_1, c_1)=16$
$\min(a_2; b_2; c_2)=1;\ \max(a_2; b_2; c_2)=19$

$a_2=19;\ c_2=1$
$b_2\in[1;19]$ $\quad 19$

$$\begin{cases} 2x+23>0 & \neq 1 \\ x+34>0 & \neq 1 \\ -x-4>0 & \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-\frac{23}{2} & \neq -11 \\ x>-34 & \neq -33 \\ x<4 & \neq -5 \end{cases}$$

$-x-4=$

$$\left[\begin{array}{l} 2x+23=\sqrt{x+34}\ (1) \\ x+34=(x+4)^2\ (2) \\ -x-4=\sqrt{2x+23}\ (3) \end{array}\right.$$

$x\in(-11{,}5;4)/\{-11\}/\{-5\}$

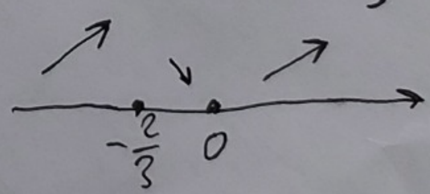
$a=1$

$abc=2$

$\left.\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}\right\}\Rightarrow$ $2x+23=-x-4$
$3x+27=0$ $\quad a\cdot a(a+1)=2$
$x=-9$ $\cancel{X}$
$(18+23=\sqrt{43})$ $\quad a^3+a^2=2.$

① $\quad 3a^2+2a=0$

$0 \vee -\frac{2}{3}$



$\left.\begin{array}{l}(1)\\(3)\end{array}\right\}$ $\quad a^2-a^3=2$
$a^2(1-a)=2.$

$-\frac{8}{27}+\frac{4}{9}<2$

$\left.\begin{array}{l}(2)\\(3)\end{array}\right\}\Rightarrow$ $x+34=2x+23$
$x=\cancel{11}$

21103213 (U356006 M1297370)