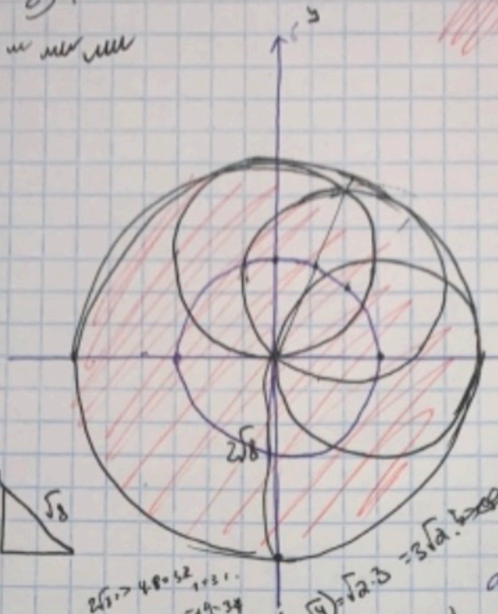
Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103102**

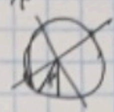
ID профиля: **829854**

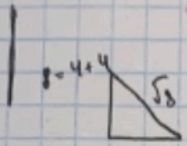
Вариант 23



→ $a^2+b^2\le 8$

$b-a\ge 2$ $b=0$ $a=-2$





$8=4+4$

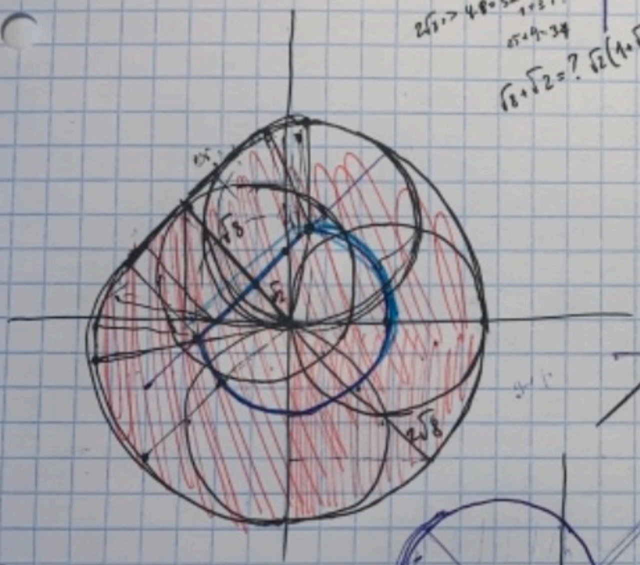
$\sqrt8+\sqrt2=?\ \sqrt2(1+\sqrt4)=\sqrt2\cdot 3=3\sqrt2$

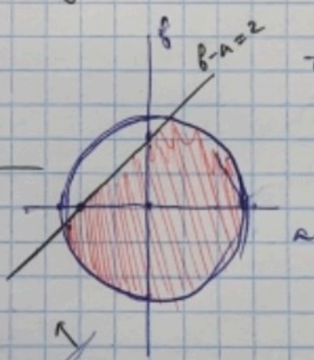
$a^2+b^2\le \min(4b-4a,\ 8)$

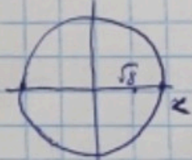
① $b-a\ge 2$ $b\ge a+2$

$a^2+b^2\le 8$: $b=a+2+p$

~~$a^2+(a+2+p)^2$~~





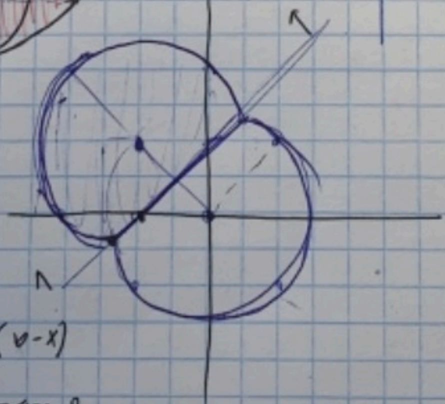


$b-a<2 \Leftrightarrow$

$a^2+b^2\le 4b-4a<8$

$a^2+4a+4+b^2-4b+4\le 8$

$\begin{cases}(a+2)^2+(b-2)^2\le 8,\\ b-a<2\end{cases}$



$(x-a)^2+(y-b)^2\le 8$

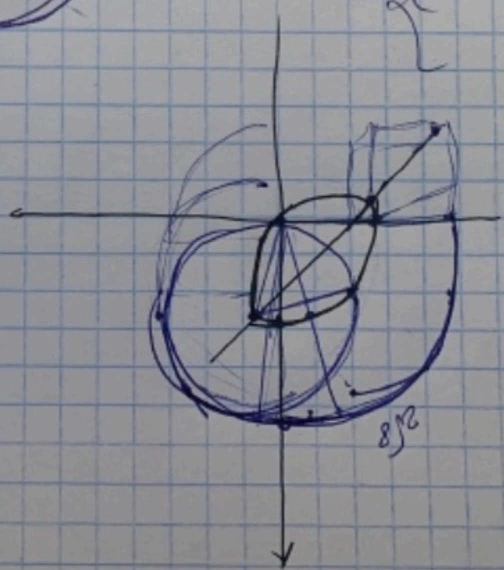
$b-a\ge 2$

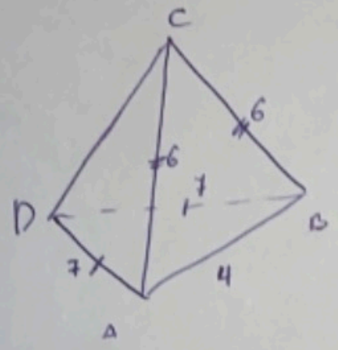
$a^2+b^2=8$ $b^2=8-a^2$

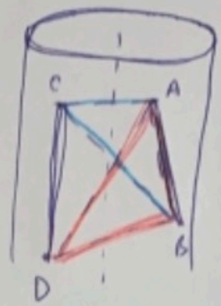
$(x-a)^2+(y-b)^2\le 8$

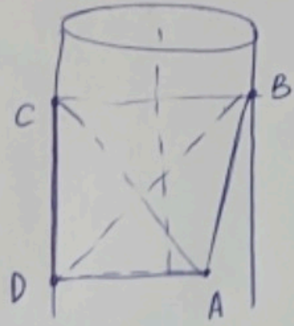
$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 8\\ b-a\ge 2\end{cases}\\ \begin{cases}(a+2)^2+(b-2)^2\le 8\\ b-a\le 2\end{cases}\end{array}\right.$

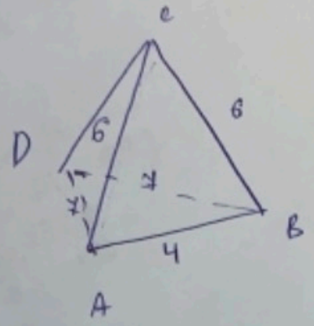
$\begin{cases}a^2+b^2\le 8\\ b-a\ge 2.\end{cases}$

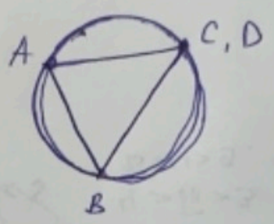


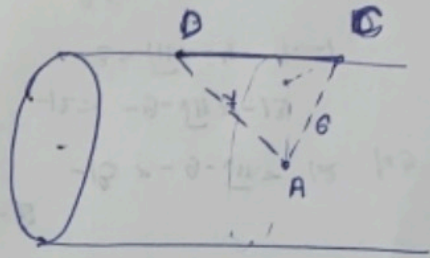


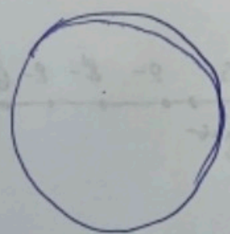


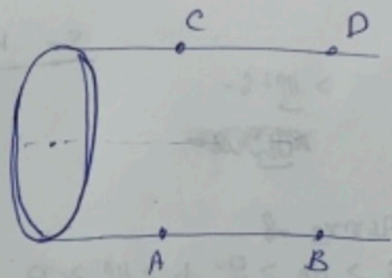


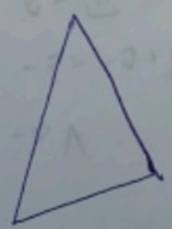


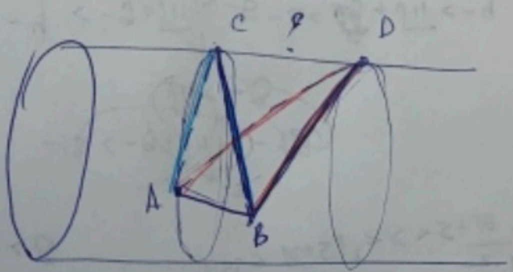


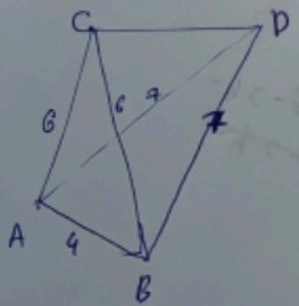












21103102 (U829854 M1300803)

$S = a_1 + \ldots + a_6 = a_1 6a + d + 2d + \ldots + 5d = 6a + \frac{6 \cdot 5}{2} d = 6a + 15d$ $d \geq 0$, целое

$a_{10} \cdot a_{16} > S + 39$ $(a + 9d)(a + 15d) = a^2 + da \cdot 24 + 135d^2 > 6a + 15d + 39$

$(a + 10d)(a + 14d) = a^2 + 24d + 140d^2 \leq 6a + 15d + 55$

$-4 < -9 + \sqrt{11} < -3$

$\sqrt{11} < 6$

$K < S + 39$

$K + 5d^2 < S + \ldots$

$S + 55 > K + 5d^2 > K > S + 39$

$-13 < -9 + \sqrt{11} < -12$

$\sqrt{11} < -3$

-3 V

$-3 > -9 + \sqrt{11}$?

$6 > \sqrt{11}$ — да. $\Rightarrow -3$ входит

$-4 > -9 + \sqrt{11}$

$5 > \sqrt{11}$

$-6 > -9 + \sqrt{11}$

$3 > \sqrt{11}$ — нет

$-9 + \sqrt{11}$

$-9 \quad -8 \quad -7 \quad -6 \quad -5 \quad -4 \quad -3$

$-9 < -9 + \sqrt{11} < -5$ $-3 < -9 + \sqrt{11} < -4$ $|+9$

$5 < \sqrt{11} < 4$ $-6 < \sqrt{11} < 5$

да блять.

$-9 + \sqrt{11} <$

$-9 + \sqrt{11} > -6$

$\sqrt{11} > 3$

$-5 > -9 + \sqrt{11} > -6$

$4 > \sqrt{11} > 3$

$16 > 11 > 9.$

$-13 > -9 - \sqrt{11} > -12$ $|+9$

$-12 > -9 - \sqrt{11} > -13$

$-3 > -\sqrt{11} > -4$ $|\cdot -1$

$3 <$

№1.

Чистовик

арифм. послед: $a_1 = a$ $\quad a_i = a+(i-1)d$, a, d – целые, $d>0$, т.к. возрастает.
↳ т.к. все последоват. целые.

$S = a_1 + \ldots + a_6 = 6a + d \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 6a + 15d$

$a_{10} \cdot a_{16} = (a+9d)(a+15d) = a^2 + 24da + 135d^2 > S+39$

$a_{11} \cdot a_{15} = (a+10d)(a+14d) = a^2 + 24ad + 140d^2 < S+55$

$a^2 + 24ad + 135d^2 > 6a + 15d + 39$

$a^2 + 24ad + 140d^2 < 6a + 15d + 55$

$a_{10} \cdot a_{16} + 5d^2 = a_{11} \cdot a_{15}$

$\cancel{a^2 + a(24d - 6a) + (135d^2 - 15d - 39) > 0}$

$6a+15d+55 > a^2+24ad+140d^2 > a^2+24ad+135d^2 > 6a+15d+29$ $\quad$ $p = a^2+24ad+135d^2$

Рассмотрим значение d:

$d = 1 \Rightarrow 5d^2 = 5 \Rightarrow S+55 > p+5 > p > S+39$ – можно найти такие p

~~$d=2 \Rightarrow 5d^2 = 20 \Rightarrow S+55 > p+20 > p > S+39$ – можно найти такие p~~

$\underline{d=1} \Leftarrow$

$d = 3 \Rightarrow 5d^2 = 45 \Rightarrow S+55 > p+45 > p > S+39$.

$p \geq S+40$, т.к. целое $\Rightarrow p+45 \geq S+85 > S+55$

$\Rightarrow d \geq 3$ – не подходит, (т.к. $5d^2$ возрастает при ↑d)

$d = 2 \Rightarrow 5d^2 = 20 \Rightarrow S+55 > p+20 > p > S+39 \Rightarrow p \geq S+40 \Rightarrow p+20 \geq S+60 > S+55$

$6a + \overset{70}{15+55} > a^2 + 24a + 140 > a^2 + 24a + 135 > 6a + 15 + 39$

$\begin{cases} a^2 + 18a + 70 < 0 \\ a^2 + 18a + 81 > 0 \end{cases}$

$D = 18^2 - 70 \cdot 4 = 44 \quad a_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{44}}{2} = -9 \pm \sqrt{11}$

$D = 18^2 - 81 \cdot 4 = 0 \quad a_0 = \frac{-18+0}{2} = -9$

$-9-\sqrt{11} \quad -9 \quad -9+\sqrt{11}$

$\Rightarrow a \in \{(-9-\sqrt{11}; -9) \cup (-9; -9+\sqrt{11})\}$

a – целое $\Rightarrow$

$-5 > -9+\sqrt{11} > -6$
$4 > \sqrt{11} > 3$
$16 > 11 > 9$

$-12 > -9-\sqrt{11} > -13$
$-3 > -\sqrt{11} > -4 \quad | \cdot (-1)$
$3 < \sqrt{11} < 4$
$9 < 11 < 16$

$-9-\sqrt{11} \quad\quad -9+\sqrt{11}$

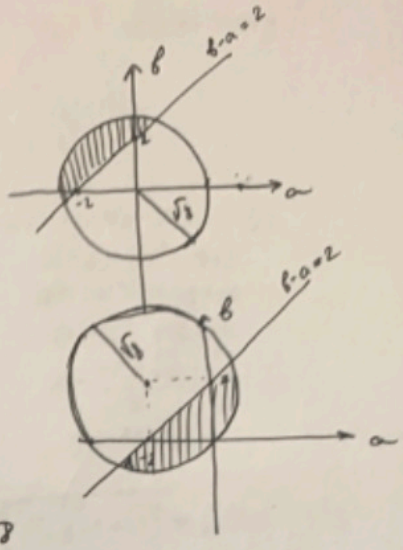
$-13 \quad -12 \quad -11 \quad -10 \quad -9 \quad -8 \quad -7 \quad -6 \quad -5$

x – все подходящие целые решения.

Ответ: $a_1 \in \{-12; -11; -10; -8; -7; -6\}$.

№3

$$\begin{cases} a^2+b^2\le \min(4b-4a,\ 8) \\ (x-a)^2+(y-b)^2\le 8 \end{cases}$$



$a^2+b^2\le \min(4b-4a,\ 8)$

1) $4b-4a\ge 8 \Rightarrow b-a\ge 2$ — часть плоскости над прямой.

$a^2+b^2\le 8$ — круг с центром в $(0;0)$ и радиусом $\sqrt8$

заштрихованая обл. — подходящие a и b:
$$\begin{cases} a^2+b^2\le 8 \\ b-a\ge 2 \end{cases}$$

2) $4b-4a < 8 \Rightarrow b-a<2$ — часть плоскости под прямой

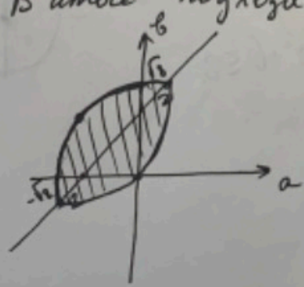
$a^2+b^2< 4b-4a$ $\qquad a^2+b^2+8< 4b-4a+8$

$a^2+4a+4+b^2-4b+4\le 8$

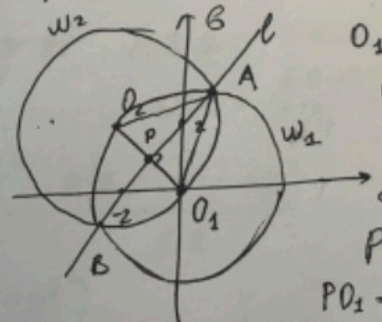
$(a+2)^2+(b-2)^2\le 8$ — круг с центром в $(-2;2)$ и радиусом $\sqrt8$.

заштрих. область — подходящие a и b: $\begin{cases} a^2+b^2\le 4b-4a \\ b-a<2. \end{cases}$

~~Ответ~~ В итоге подходят такие пары $(a;b)$:



Заметим, что фигуры из 1) и 2) симметричны отн. $b-a=2$.



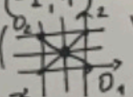
$O_1O_2=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt8 \Rightarrow$

$O_1\in\omega_2,\ O_2\in\omega_1.$

$A=\omega_1\cap l \Rightarrow O_1A=\sqrt8$

$P=(O_2O_1)\cap l$

$PO_1=PO_2$, т.к. $P=(-1;1)$ просто по рисунку (



)

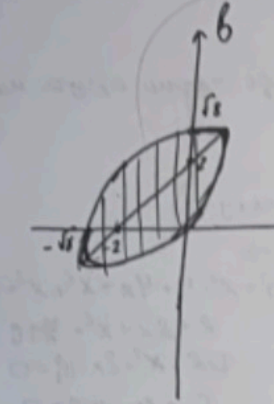
$\Rightarrow O_1O_2\perp l$, просто по рисунку видно.

$\Rightarrow l$ - сер. перпенд. к $O_1O_2 \Rightarrow$
$AO_1=AO_2=\sqrt8$, $BO_1=BO_2=\sqrt8$.

заштрихованные части 1) и 2) симметр. относительно $b-a=2$. $\Leftarrow$

↪ далее

№3 продолжение



Мы нашли все возможные пары $(a;b)$

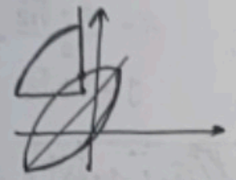
Теперь надо ~~но~~ для каждой из них найти множество $(x;y)$ и его общую площадь.

~~Заметим~~

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8$ - круг с центром в $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{8}$.

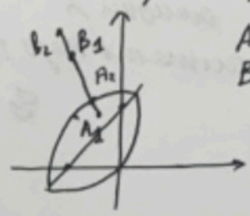
=> для каждой точки мы строим круг с $r=\sqrt{8}$.

→ это и будет M.



Заметим, что любая точка $(a;b)$ не на границе фигуры будет давать круг с такими точками, что каждая из них находится в каком-то круге с центром на границе.

Док-во:



A_1 - точка не на границе

B_1 - точка на круге с рад. $\sqrt{8}$ и центром в A_1.

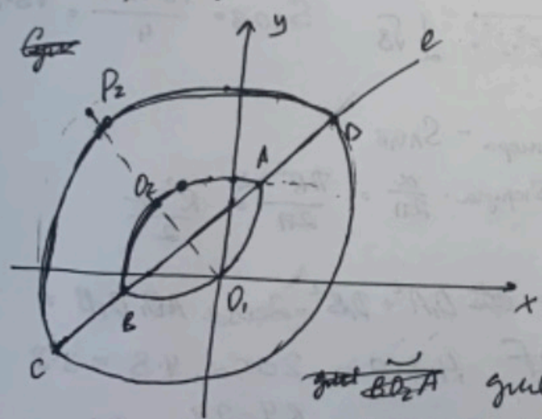
A_2 - пересечение границы и A_1B_1

$A_2B_2 = \sqrt{8}$. => B_2 лежит на круге с центром в A_2 и $r=\sqrt{8}$.

=> т.к. $B_1 \in A_2B_2$, то $B_1 \in$ кругу A_2.

=> можем строить M, пользуясь только ~~точками~~ $(a;b)$ с границы.

~~Граница~~



~~для~~ $\overset{\frown}{BO_2A}$ для каждой точки $\overset{\frown}{BO_2A}$ построим круг с рад. $\sqrt{8}$.

Получится новая дуга $\overset{\frown}{CP_2D}$ ~~так для~~ такая, что её окружность это окр-сть с радиусом $2\sqrt{8}$ и центром O_1. Т.к. для каждой точки BO_2A самая дальняя от O_1 точка ~~это~~ лежит на прямой через O_1 и эту точку. => ~~O_2~~ Расст. от O_1 до новой точки $= \sqrt{8}+\sqrt{8}=2\sqrt{8}$ => это часть окр-сти. ~~Кроме~~ ~~Рас~~ Кроме дуги будут ещё части,

~~Т.к. граница симметрична,~~

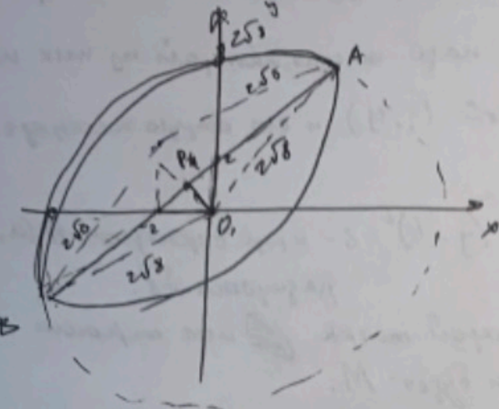
выступающие за ℓ. Заметим, что для всех точек дуги $\overset{\frown}{BO_1A}$ ~~при~~ при построении окр-сти на них ~~для т~~ для каждой точки окр-сти найдется центр на AO_1B такой, что его ~~окр-сть~~ круг будет содержать эту точку окр-сти с центром на $\overset{\frown}{BO_2A}$. => не интересно что там под ℓ, т.к. всё перекроется новой частью круга.

Т.к. граница симметрична под ℓ будет ~~окр~~ часть круга с центром в O_2 и $r=2\sqrt{8}$.

№3 продолжение 2.

Чистовик

Посчитаем площадь M. (S)



$S = 2S_0$, где S_0 - площадь части круга над l.

$S_{AO_1B} = ?$

$B, A = (x^2+y^2=8) \cap (-x+y=2)$

$y = 2+x$

$(2+x)^2+x^2$: $4+4x+x^2+x^2 = \cancel{32}$

$2+2x+x^2 = \cancel{16}$

$x^2+2x-2=0$

$D = 4+4\cdot 2 = 12$

$x = \frac{-2\pm\sqrt{12}}{2} = -1\pm\sqrt{3}$

$y = 1\pm\sqrt{3}$

$A = (\sqrt{3}-1; \sqrt{3}+1)$

$B = (-\sqrt{3}-1; 1-\sqrt{3})$

Я сделала арифметические ошибки ¼
но считать надо ТАК

$AB = \sqrt{(\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}+1-1+\sqrt{3})^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2} = \cancel{\sqrt{48}} = \sqrt{8\cdot 3} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{8}$.

$S_{AO_1B} = O_1P \cdot AB : 2 =$

$O_1P = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{8}$

$S_{AO_1B} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}}{4} = \sqrt{3}\cdot 2$

$S_0 = S_{сектора} - S_{AO_1B}$

$S_{сектора} = S_{круга}\cdot\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\pi R^2\cdot\alpha}{2\pi} = \frac{R^2\cdot\alpha}{2}$

в $\triangle AO_1B$: $AB^2 = O_1A^2 + O_1B^2 - 2\cos\alpha\, AO_1 O_1B =$

$= 4\cdot 8\cdot 2 - 2\cos\alpha \cdot 4\cdot 8 = 3\cdot 8$

$\cos\alpha = \frac{64-24}{64} = \frac{40}{64} =$

$\cos\alpha = \frac{O_1A^2+O_1B^2-AB^2}{2AO_1O_1B} = \frac{R^2+R^2-AB^2}{2R^2}$

$S_{сектора} = \frac{R^2\cdot\left(\frac{2R^2-AB^2}{2R^2}\right)}{2} = \frac{2R^2-AB^2}{4}$

$S_0 = \frac{2R^2-AB^2}{4} - \frac{O_1P\cdot AB}{2} = \frac{2\cdot 4\cdot 8 - AB^2}{4} - \frac{\sqrt{8}\cdot AB}{4} =$

$= \frac{64-AB^2-\sqrt{8}\cdot AB}{4}$

$AB =$

21103102 (U829854 M1300803)

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le \min(-4a+4b,\ 8)\end{cases}$$

$a^2+b^2\le\min(4b-4a;\ 8)$

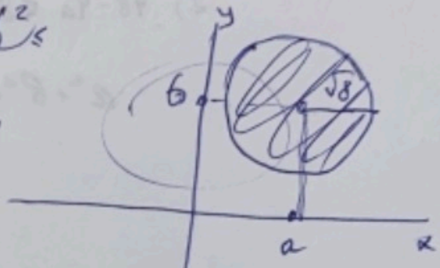
$a^2+b^2\le 4\min(b-a;\ 2)$

$\cancel{b-a<2}$

$b-a<2:\quad a^2+b^2\le 4b-4a$

$\cancel{a^2+4(2-b)+b^2\le}$

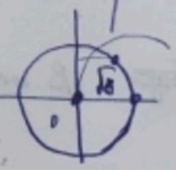
$(x-a)^2+(y-b)^2\le 8:$



$a^2+b^2\le\min(4b-4a;\ 8)$

1) $b-a\ge 2\Rightarrow$

$a^2+b^2\le 8$



$a=\sqrt8\ \ b=0$

$a^2+b^2\le 8.$

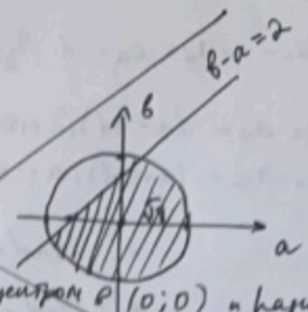
№3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(4b-4a,\ 8) \end{cases}$$

• $a^2+b^2 \le \min(4b-4a,\ 8)$

1) $b-a \ge 2 \Rightarrow \min(4b-4a,\ 8) = 8$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 8 \\ b-a \ge 2 \end{cases}$$



$a^2+b^2 \le 8$ - это ~~окружность~~ круг с центром в (0;0) и радиусом $\sqrt{8}$.

заштрихованная область - подходящие a и b (внутри круга и под прямой). Там выполняется $\begin{cases} a^2+b^2 \le 8 \\ b-a \ge 2. \end{cases}$

~~$a^2+b^2 \le \min$~~

21103102 (U829854 M1300803)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103102**

ID профиля: **829854**

Вариант 23

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=a$

$\log_{(x+4)^2}(x+34)=b$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=c$

$\sqrt{x+34}^{\,a}=2x+23$ $\quad (\sqrt{x+34})^{\frac{a}{2}}$

$(-x-4)^{2b}=x+34$

$\sqrt{2x+23}^{\,c}=-x-4$

$(\sqrt{2x+23})^{2bc}=(-x-4)^{2b}=x+34$

$(\sqrt{2x+23})^{abc}=(-x-4)^{ab}=(x+34)^{\frac{a}{2}}=2x+23$

$\Downarrow$

$abc=1.$

$a=22a_1$

$b=22b_1$

$c=22c_1$

НОК$(a,b,c_1)=2^5\cdot 11^{17}$

бор шиукиет

$\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{5}{3}\right)$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)=$

$-\frac{4}{\ }$

$xyz=1$ $\quad x=y$

$z=x+1$

$x^2(x+1)=1$ $\quad x^2(x+1)=1$

$x^3+x^2-1=0$ $\quad x^3+x^2=1.$

$x^2(x+1)=1.$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1\neq 0.$

$-\frac{1}{2}$

$x^2>0$

$x+1>0.$

$x>0$

$x>1 \Rightarrow >1$

$1>x>0\Rightarrow$

$x<0:$

$\frac{1}{27}\quad -\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-1$

$-8+4-1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2(1,5)$

$-\frac{27}{8}+\frac{18}{8}-\frac{8}{8}$

$\frac{3}{2}$

$\frac{27}{2}$

$x^2<x$

$x^2<x+1$ $\quad x+1=\frac{1}{x^2}$ $\quad x^2<1.$

x $\quad y$ $\quad z$

x $\quad z$ $\quad y$

$x^2=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{\frac{1}{2}}$

$x+1=\frac{1}{x^2}$

21103102 (U829854 M1300804)

Чистовик

№4.

$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c)=22 \\ \text{НОК}(a,b,c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$

$a=22a_1$, $b=22b_1$, $c=22c_1$, $\text{НОД}(a_1,b_1,c_1)=1$.

$\text{НОК}(a_1,c_1,b_1)=2^{15}\cdot 11^{18}$ ~~если~~ ~~если $a_1 \vdots i$ и $b_1 \vdots i$ то $c_1 \vdots i$ $(i=2$ или $11)$~~
~~(во всех вариациях тоже самое)~~

~~1) Пусть $a_1 \vdots 2$, $b_1 \vdots 2 \Rightarrow c_1 \vdots 2$~~

~~$\Rightarrow$ Всего вариантов для a_1 и b_1 16^2, т.к.~~

~~$\text{НОК}(a_1,b_1)=2^{15} \Rightarrow$ a_1 степень 2 в a_1 и b_1 - max 15~~

~~если $a_1=2^{15}$, то для b_1 16 вариантов.~~

~~Пусть $a_1 \vdots 2 \Rightarrow a_1 \vdots 2^{15}$ либо~~ $\rightarrow$ одно из a_1, b_1, c_1

$\text{НОК}(a_1,c_1,b_1)=2^{15}\cdot 11^{18}$

x_2, y_2, z_2 - варианты для степ. 2

x_{11}, y_{11}, z_{11} - для степ. 11.

Пусть $x_2 \vdots 2^{15} \Rightarrow y_2 \vdots 2$ в степ. $\leq 15 \Rightarrow$ 16 вариантов

$z_2 \not\vdots\, 2$ (иначе $\text{НОД} \neq 22$)

$\Rightarrow$ Всего 16 вар для одной перестановки.

Всего $3\cdot 2\cdot 1$ перест. $\Rightarrow$ $16\cdot 6$ вариантов.

Пусть $x_{11} \vdots 11^{18} \Rightarrow y_{11} \vdots 11$ в любой степени $\leq 18 \Rightarrow$ 19 вар.

Всего для всех перестановок $19\cdot 6$ вариантов.

Делимость на 11 не зависит от делимости на 2 $\Rightarrow$

Всего вариантов: $16\cdot 19\cdot 36$.

~~(в варианте $x=a_1$, $a_1=x_2$ $b_1=z_2$ $c_1=y_2$ например $\Rightarrow$~~

~~$a_1=y_{11}$ $b_1=x_2$ $c_1=$~~

Например:

Как работает? $a_1=x_2\cdot y_{11}$ $b_1=z_2\cdot x_{11}$ $c_1=z_{11}\cdot y_2$

$\Rightarrow a_1=2^{15}\cdot 11^{k}$ (k - любая) $b_1=1\cdot 11^{18}$ $c_1=1\cdot 2^{r}$ (r - любая)

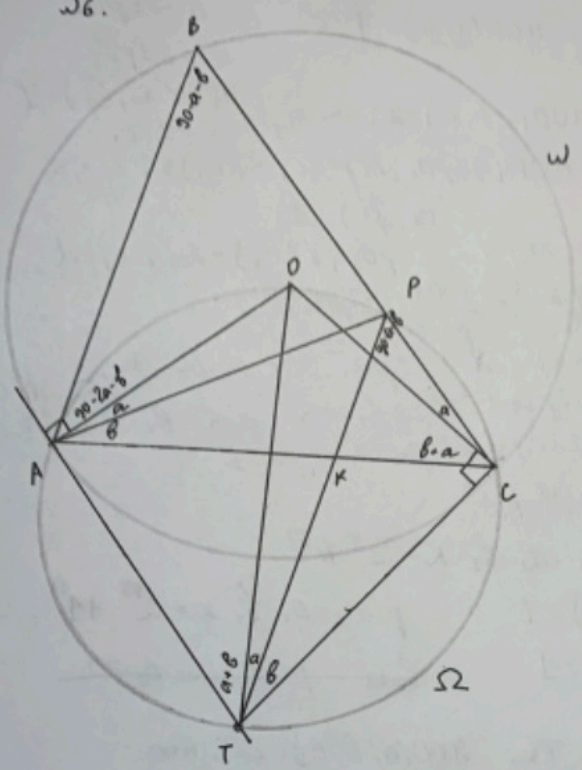
$\Rightarrow \text{НОД}(2^{15}\cdot 11^{k}\cdot 22,\ 1\cdot 11^{18}\cdot 22,\ 1\cdot 2^{r}\cdot 22)=22$

$\text{НОК}(2^{15}\cdot 11^{k}\cdot 22,\ 1\cdot 11^{18}\cdot 22,\ 1\cdot 2^{r}\cdot 22)=22\cdot 2^{15}\cdot 11^{18}=2^{16}\cdot 11^{19}$.

~~НОД≠~~

21103102 (U829854 M1300804)

№6.



а) $CO=AO$, т.к. это радиусы

$\angle OAT=\angle OCT=90°$, т.к. AT, TC – касательные

$\Rightarrow AOCT$ вписан, т.к. в нём $\angle A+\angle C=180°$

Пусть $\angle OAP=a$, $\angle PAC=b$

$\Rightarrow$ т.к. в Ω опираются на одну дугу:

$\angle OAP=\angle OCP=\angle OTP=a$

$\angle PAC=\angle PTC=b$

т.к. $CO=AO$ $\angle OAC=\angle OCA=b+a$

$\angle OCA=\angle OTA=a+b$, т.к. опираются на одну дугу

$\angle AOC=180°-\angle ATC=180-2a-2b$

$\Rightarrow$ в ω $\overset{\smile}{AC}=180-2a-2b \Rightarrow \angle ABC=90-a-b$

$\angle CPT=180°-\angle PCT-\angle PTC=\cancel{180-b-b-a-a+180-2a-2b}$

$=180°-a-90°-b=90°-a-b$

$\Rightarrow \Delta CPK \sim \Delta CBA$ т.к. $\angle C$ – общий, $\angle CPK=\angle CBK \Rightarrow$

$$\frac{S_{CPK}}{S_{ABC}}=\left(\frac{CK}{AC}\right)^2 \qquad S_{ABC}=\frac{S_{CPK}\cdot AC^2}{CK^2}$$

т.к. $\frac{S_{CPK}}{S_{APK}}=\frac{13}{15}$, то т.к. у этих Δ общая высота из P

$$\frac{CK}{AK}=\frac{13}{15} \Rightarrow \frac{CK}{AC}=\frac{13}{28}$$

$$S_{ABC}=\frac{13\cdot 28^2}{13^2}=\frac{28^2}{13}=$$

Ответ: $S_{ABC}=\frac{28^2}{13}$

б) $\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$ $\quad tg\angle ABC=\frac{4}{7}$ $\quad$ Пусть $AC=b$, $BC=a$, $AB=c$, $\angle ABC=\alpha$.

$S_{\Delta ABC}=\sin\alpha\cdot a\cdot c:2$ $\qquad tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad tg^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$

$\sin\alpha=\frac{2S}{ac}$ $\qquad tg^2\alpha=\frac{4S^2}{(ac)^2}:\left(1-\frac{4S^2}{(ac)^2}\right)=\frac{4S^2}{(ac)^2\left(\frac{(ac)^2-4S^2}{(ac)^2}\right)}=\frac{4S^2}{a^2c^2-4S^2}$

$\frac{16}{49}=\frac{4S^2}{a^2c^2-4S^2}$ $\qquad 4a^2c^2-16S^2=49S^2$

$4a^2c^2=65S^2$ $\qquad b^2=a^2+c^2-2\cos\alpha\cdot a\cdot c$

$a^2c^2-4S^2=\left(\frac{65}{4}-4\right)S^2=12{,}25S^2$

$\cos\alpha=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ $\qquad \cancel{\cos^2\alpha=a^2+c^2}$

$2ac=\sqrt{65}\,S$

$\sin\alpha=\frac{2S\cdot 2}{\sqrt{65}\cdot S}=\frac{4}{\sqrt{65}}$

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{\frac{a^2c^2-4S^2}{a^2c^2}}=\sqrt{\frac{12{,}25S^2}{\frac{65}{4}S^2}}=$

$=\frac{\sqrt{12{,}25}}{\sqrt{16{,}25}}=\sqrt{\frac{49}{65}}=\frac{7}{\sqrt{65}}$

$b^2=a^2+c^2-2\sqrt{\frac{49}{65}}\cdot ac$

№1.

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=22 \\ НОК(a,b,c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

~~$a=22a_1 \quad b=22b_1$~~

$НОД(a,b)=p\cdot 22 \Rightarrow a=22pa_1$, $b=22pb_1$, $НОД(a_1,b_1)=1$.

$НОД(a,b,c)=22 \Rightarrow$ Пусть $c=22c_1$

$НОД(22pa_1, 22pb_1, 22c_1)=22 \Rightarrow (c_1,p)=1$.

$НОК(a,b,c)=НОК(22pa_1, 22pb_1, 22c_1)=22p\cdot c_1\cdot d$,

где

~~т.к. $a \vdots$~~ так, что $22pc_1d \vdots 22pa_1 \Rightarrow c_1\cdot d \vdots a_1$

$22pc_1d \vdots 22pb_1 \Rightarrow c_1d \vdots b_1$ $\Rightarrow c_1\cdot d=a_1\cdot b_1\cdot k$, т.к. $(a_1,b_1)=1$.

$22c_1pd \vdots 22c_1 \Rightarrow pd \vdots 1$.

~~$22p\,c_1\,d=2^{16}\cdot 11^{19}$~~

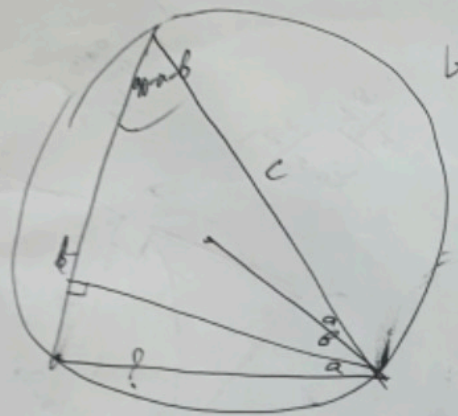
$$\begin{cases} 22p\cdot c_1\cdot a_1\cdot b_1\cdot k=2^{16}\cdot 11^{19} \\ (p,c_1)=1 \\ (a_1,b_1)=1 \end{cases}$$

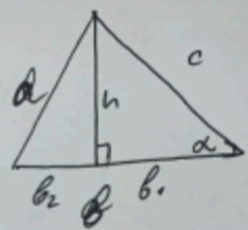
$p\cdot c_1\cdot a_1\cdot b_1\cdot k=2^{15}\cdot 11^{18}$

~~Если $p\vdots 2$, то $c_1 \not\vdots 2$~~

~~Пусть b a стоп Пусть b~~
~~b ... пот трех~~

Т.к. $НОД(a,b,c)=22$, то





$\sin\alpha = \frac{h}{c}$

$h = \sin\alpha \cdot c$

$\mathrm{tg} = \alpha$

$\mathrm{tg}(90-\alpha) \cdot b_2 = \frac{\sin\alpha}{\cos} = \frac{h}{}$

$2S = h \cdot b$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h}{b_1}$

$h^2 + b_1^2 = c^2$

$\cancel{h^2 + b_2^2 = a^2}$

$h^2 + b^2 - 2b_1 b + b_1^2 = a^2$

$c^2 - 2b_1 b + b^2 = a^2$

$b_1 = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b}$

$2S = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot b_1 \cdot b$

$2S = \sin\alpha \cdot b \cdot c$ $\quad h = c^2 - b_1^2$

$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot b_1 \cdot b = S$

$(a, b, c) = 22$

$\text{НОК}(a, b, c) = 2^{16} \cdot 11^{19}$

$a = 22a_1 \quad b = 22b_1 \quad c = 22c_1$

$(22a_1, 22b_1) = 22k$

$a = 22ka_1$

$b = 22kb_1$

$c = 22c_1$

$\text{НОК}(22ka_1b_1, 22c_1) = 2^{16} \cdot 11^{19} = 22 \cdot 2^{15} \cdot 11^{17}$

$\text{НОК}(ka_1b, c_1) = 2^{15} \cdot 11^{17}$

$(ka_1b_1, c_1) = m$

$ka_1b_1 = mp_1$

$c_1 = mc_2$

$\text{НОК} = p_1 m c_2 =$

$= 1 \cdot 2^{15} \cdot 11^{17}$

$= 2^{15} \cdot 11^{17}$

Сколько вариантов

p_1	m	c_2
1	1	1

15 раздения на 3 группы, иметь пусть.

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{S}{b \cdot b_1} = \frac{S}{c^2 - a^2 + b^2} = \frac{2S}{c^2 - a^2 + b^2}$

$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot 2S = c^2 - a^2 + b^2$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$

$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{\frac{4S}{a^2c^2}}{1 - \frac{4S}{a^2c^2}} = \frac{4S}{a^2c^2\left(\frac{a^2c^2-4S}{a^2c^2}\right)} = \frac{4S^2}{a^2c^2 - 4S} = \frac{16}{49}$

$49 \cdot S = 4a^2c^2 - 16S$

$65S = 4a^2c^2$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$S = \frac{\sin\alpha \cdot b \cdot c}{2}$

$\sin\alpha = \frac{2S}{bc}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4S \cdot 2ac}{bc \cdot (a^2 + c^2 - b^2)} = \frac{4Sa}{b(a^2 + c^2 - b^2)} = \frac{4}{7}$

$7Sa = ba^2 + bc^2 - b^3$

$S = \frac{\sin\alpha \cdot ac}{2}$

$\sin\alpha = \frac{2S}{ac}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2S \cdot 2ac}{ac(a^2 + c^2 - b^2)} = \frac{4S}{a^2 + c^2 - b^2} = \frac{4}{7}$

$7S = a^2 + c^2 - b^2$

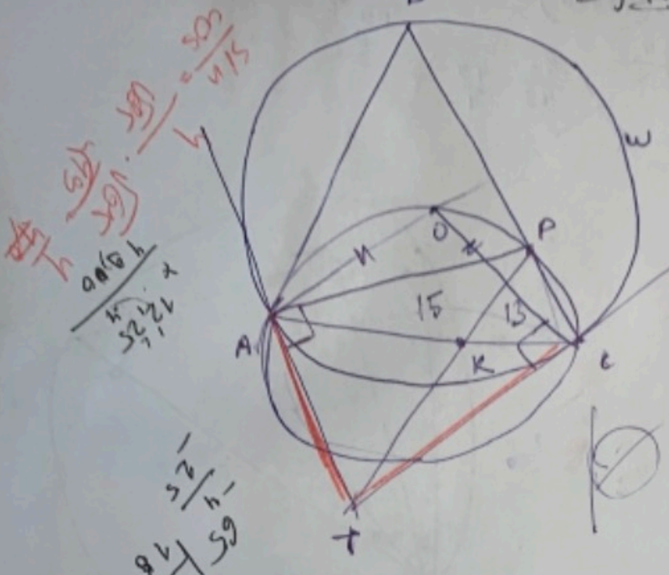
$b^2 = (a+c)^2 - 2ac - 7S = (a+c)^2 - \frac{65}{2} + 7$

$b^2 = a^2 + c^2 - 7S$

$4(ac)^2 - 4 \cdot 16S^2 = 4 \cdot 49S^2$

$4(ac)^2 = (49 + 16)S^2$

19.



$y^2(y+1)=2$

$\cancel{y^2+y^3-2=0}$

$y^3+y^2-2=0$

$(y-1)($

y^3-1

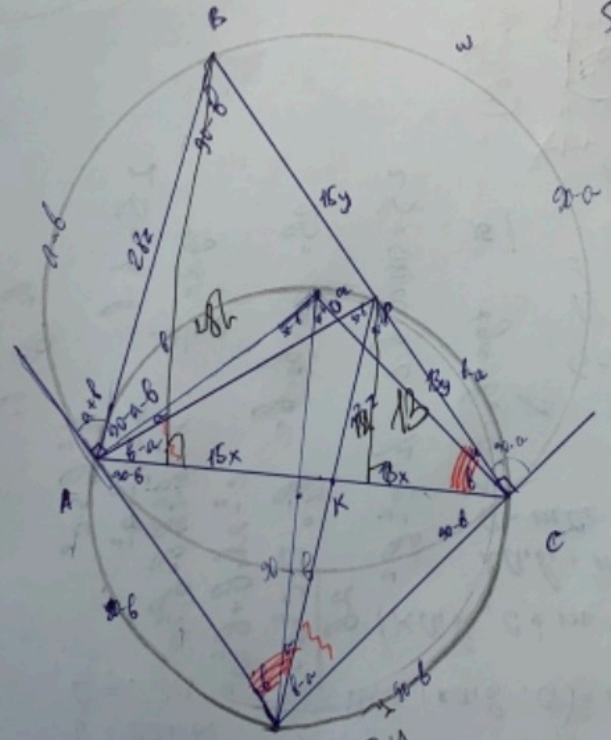
y^2-1

$(y^3-1)+(y^2-1)=$

$=(y-1)(y^2+y+1)+(y-1)(y+1)=$

$=(y-1)(y^2+2y+2).$

$S_{PAK}=15=\frac{h\cdot AK}{2}$ $S_{PKC}=13=\frac{h\cdot CK}{2}$ $\Rightarrow \frac{AK}{CK}=\frac{15}{13}$



$3\cdot 2+1=7$

$34-9=25$

$(c_1,a_1)=2$

$23\cdot 23=529$

$45\cdot 45=2025$

$495\cdot 16=7920$

Чистовик.

№5

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=a$ $\qquad (\sqrt{x+34})^a=(x+34)^{\frac{a}{2}}=2x+23$

$\log_{(x+4)^2}(x+34)=b$ $\qquad (x+4)^{2b}=x+34$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=c$ $\qquad (\sqrt{2x+23})^c=(2x+23)^{\frac{c}{2}}=-x-4$

$\sqrt{x+34},\ (x+4)^2,\ \sqrt{2x+23}>0,\ \neq 1$ $\qquad (2x+23)^c=(x+4)^2$

$2x+23,\ x+34,\ -x-4>0$ $\qquad (2x+23)^{c\cdot b}=(x+4)^{2b}=x+34$

$\Downarrow$

$\sqrt{(x+4)^2}=-x-4$

$$(2x+23)^{bca}=(x+4)^{2ab}=(x+34)^a=(2x+23)^2$$

$$(2x+23)^{bca}=(2x+23)^2 \Rightarrow abc=2.$$

Пусть $xyz=2$, причем $x=y$, $z=y+1$: $\quad y^2(y+1)=2$

$y^3+y^2-2=0 \qquad y=1$ – решение

Запишем таблицу:

	1	1	0	-2
1	1	2	2	0

$\Rightarrow y^2+2y+2=0$

$D=4-8<0 \Rightarrow$ нет других решений

$\Rightarrow \{a;b;c\}=\{1;1;2\}$ возможно, в другом порядке.

① $a=b=1 \quad c=2$

$$\begin{cases}\sqrt{x+34}=2x+23\\(x+4)^2=x+34\\\sqrt{2x+23}=-x-4\end{cases} \Leftrightarrow$$

$2x+23=-x-4$

$3x=-27$

$x=-9.$

Проверка:

$\sqrt{-9+34}=\sqrt{25}=5$

$2\cdot(-9)+23=5$

$(-9+4)^2=25=-9+34$

$\Downarrow$

$x=9$ подходит.

② $a=c=1, \ b=2$

$$\begin{cases}\sqrt{x+34}=2x+23\\(x+4)^4=x+34\\\sqrt{2x+23}=-x-4\end{cases}$$

$x+34=4x^2+23\cdot 2x+529$

$4x^2+45x+495=0$

$D=45^2-495\cdot 16<0$

$\Downarrow$

нет решений.

③ $a=2 \quad b=c=1$

$$\begin{cases}x+34=2x+23\\(x+4)^2=x+34\\\sqrt{2x+23}=-x-4\end{cases}$$

$x+34=2x+23$

$34-23=x=11$

Проверка:

$(11+4)^2=225\neq 11+34.$

$\Downarrow$

не подходит.

Ответ: $x=-9$