Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102791**

ID профиля: **350607**

Вариант 23

Чистовик -1

№1. $S = a_1 + \dots + a_6$

$a_i = a_1 + (i-1)b$; $b > 0$, т.к возрастающая

$$S = \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = (a_1 + a_1 + 5b) \cdot 3 = 6a_1 + 15b$$

$a_{10} a_{16} > S + 39 \Leftrightarrow (a_1 + 9b)(a_1 + 15b) > 6a_1 + 15b + 39$

$a_{11} a_{15} < S + 55 \Leftrightarrow (a_1 + 10b)(a_1 + 14b) < 6a_1 + 15b + 55$

$a_1^2 + 24ba_1 + 135b^2 > 6a_1 + 15b + 39$

$a_1^2 + 24ba_1 + 140b^2 < 6a_1 + 15b + 55.$

$\Leftrightarrow$ $6a_1 + 15b + 55 > a_1^2 + 24ba_1 + 140b^2 > 6a_1 + 15b + 39 + 5b^2$

$6a_1 + 15b + 55 > 6a_1 + 15b + 39 + 5b^2$

$55 > 39 + 5b^2$

$16 > 5b^2$

$\frac{16}{5} > b^2$; $b \in \mathbb{Z}$, т.к все члены прог-сии целые, и $b > 0$ $\Rightarrow b = 1$

$6a_1 + 15b + 55 > a_1^2 + 24ba_1 + 140b^2$

$\Leftrightarrow$ $6a_1 + 15 + 55 > a_1^2 + 24a_1 + 140$

$0 > a_1^2 + (24 - 6)a_1 + (140 - 70)$

$0 > a_1^2 + 18a_1 + 70. = (a_1 + 9)^2 - 11$

Если $a_1 \geq 0$ $(a_1 + 9)^2 > 81$ т.е $(a_1 + 9)^2 - 11 > 0$

$\Rightarrow$ $(a_1 + 9)^2 \leq 9$ т.к $a_1 \in \mathbb{Z}$. $(a_1 + 6)(a_1 + 12) \leq 0$

$a_1 \in [-6; -12]$

Чистовик-2

$a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 15a_1 + 30$

$a_1^2 + 18a_1 + (135 - \overset{81}{54}) > 0$

$(a_1 + 9)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -9$

~~Ответ: все целые на промежутке $a_1 \in (-6; -9) \cup (-9; 0)$~~

Ответ: все Z на промежутке $[-6; -9) \cup (-9; -12]$

Сканировано с CamScanner

Чистовик №3.

№3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8) \end{cases}$$

При фиксированных a, b

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8$ – точки лежащие внутри и на границе окружности с центром $(a; b)$ и радиусом $2\sqrt{2}$.

А условие $a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8)$ – дает условие только на a и b, значит если мы найдем множество центров окружностей $O(a; b)$, то и найдем все $(x; y)$ тогда рассмотрим a, b как переменные

$a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8)$

Не рассматривая min, а просто 2 случая 1) $a^2+b^2 \le 8$

2) $a^2+b^2 \le -4a+4b$

1) случай – все точки внутри на границе окружности с центром $(0; 0)$ и $R = 2\sqrt{2}$

2) аналогично окружность с центром $(-2; 2)$ и $R = 2\sqrt{2}$, т.к. $(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$

Но не все ~~эти~~ точки этих окружностей могут быть центрами

Черновик №4

т.к ~~[illegible]~~ случая в исходной задаче

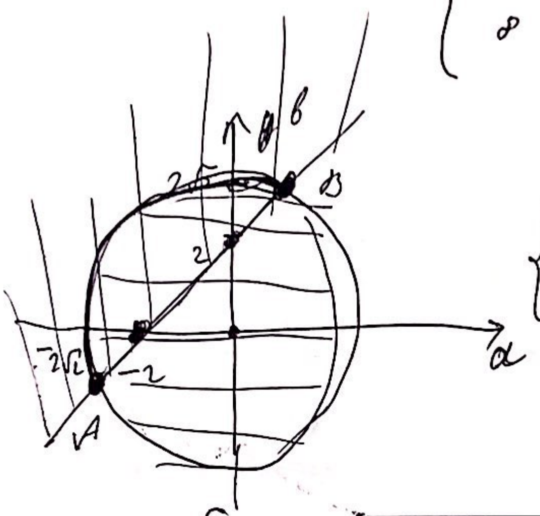
есть доп. неравенство:

Если $8 \leq -4a+4b$, то 1й случай

Если $8 \geqslant -4a+4b$, то 2й случай

Значит:

1) $\begin{cases} a^2+b^2 \leq 8 \\ 8 \leq -4a+4b = 4(b-a) \end{cases}$



найдем ~~[illegible]~~ (A и B):

$\begin{cases} a^2+b^2=8 \\ 8=4(b-a) \end{cases}$ $\begin{cases} a^2+b^2=8 \\ b-a=2 \end{cases}$

$a^2+(a+2)^2=8$

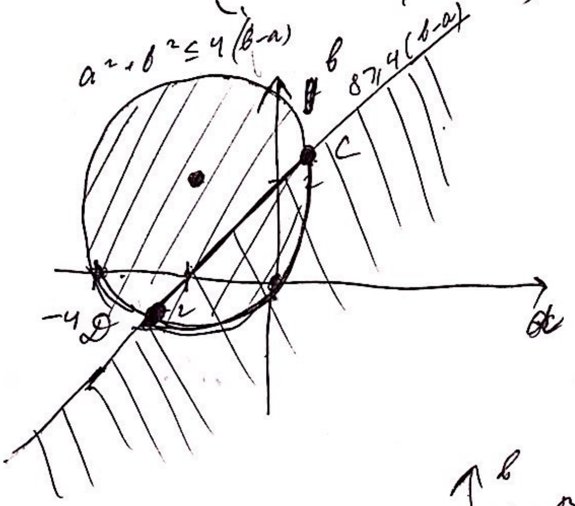
$a^2+a^2+4a+4=8$

$2a^2+4a+4=8$

Решения: $\begin{pmatrix} -1+\sqrt{3}; & 1+\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3}; & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$

2) $\begin{cases} a^2+b^2 \leq 4(b-a) \\ 8 \geqslant 4(b-a) \end{cases}$

найдем (C и D)

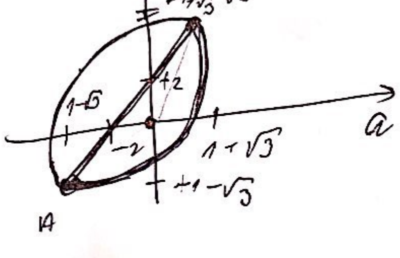


$\begin{cases} a^2+b^2=4(b-a) \\ 8=4(b-a) \end{cases}$

аналогично 1) т.к

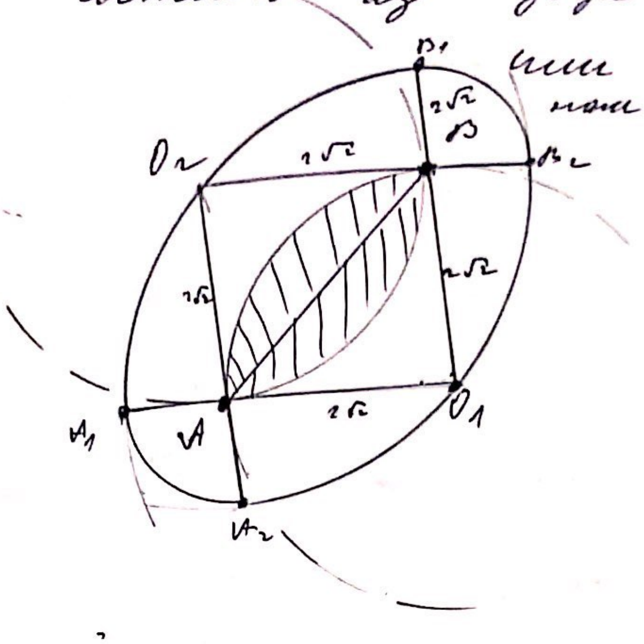
$4(b-a)=8$.

Значит все возможные a и b это точки ограниченные фигурой



Олимпиада № 5

Заметим, что данная фигура состоит из двух ~~...~~ равных сегментов или пересечение двух данных нам окружностей.



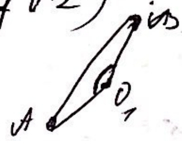
Если мы увеличим радиусы ~~...~~ этих окружностей на $2\sqrt{2}$ $(AA_1 = AA_2 = BB_1 = BB_2 = 2\sqrt{2})$ тогда M — объединение ~~сер~~кторов $O\,B_1A_1$, $O_2\,B_2A_1$, и секторов $B\,B_1B_2$, A_1AA_2

~~AO_1~~ $O_1(0;0)$; $O_2(-2;2)$

$O_1B = O_1A = O_2B = O_2A = 2\sqrt{2}$

$$S_{\text{сект.}\,O_1B_1A_1} = \frac{\angle AO_1B}{360} \cdot \pi R^2$$

$$= \frac{\angle AO_1B}{360} \cdot \pi \cdot (4\sqrt{2})^2$$



$\angle AO_1B$

$O_1(0;0)$ $A(-1-\sqrt{3};\ 1-\sqrt{3})$, $B(-1+\sqrt{3};1+\sqrt{3})$

~~O_1A~~ $AB^2 = O_1B^2 + OA_1^2 - 2\,O_1A \cdot O_1B \cdot \cos AO_1B$

$$\cos AO_1B = \frac{O_1B^2 + OA_1^2 - AB^2}{2\,O_1A \cdot O_1B}$$

$O_1A = O_1B = 2\sqrt{2}$

$AB = 2\sqrt{6}$

$$\cos AO_1B = \frac{8+8-24}{2\cdot 8\cdot 8} = \frac{-8}{128} = \frac{-1}{16}$$

чистовик №6.

$$S_{сект_{O_1B_1A_1}} = \frac{\arccos(-\frac{1}{16})}{360} \cdot \pi \cdot 32$$

~~S~~

$$S_M = 2 \cdot (S_{сект. O_1B_1A_1} - S_{\triangle AO_1B})$$

$$+ 2 \cdot S_{сект}(BB_1B_2)$$

$$S_{сект\, BB_1B_2} = \frac{\angle B_1BB_2}{360} \cdot \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 = 8\pi \frac{\angle B_1BB_2}{360}$$

O_1BO_2A – параллелограмм $\Rightarrow \angle B_1BB_2 =$

$= 180 - \angle O_1AB$

$$S_M = \frac{2 \cdot \arccos(-\frac{1}{16})\pi \cdot 32}{360} - \frac{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} +$$

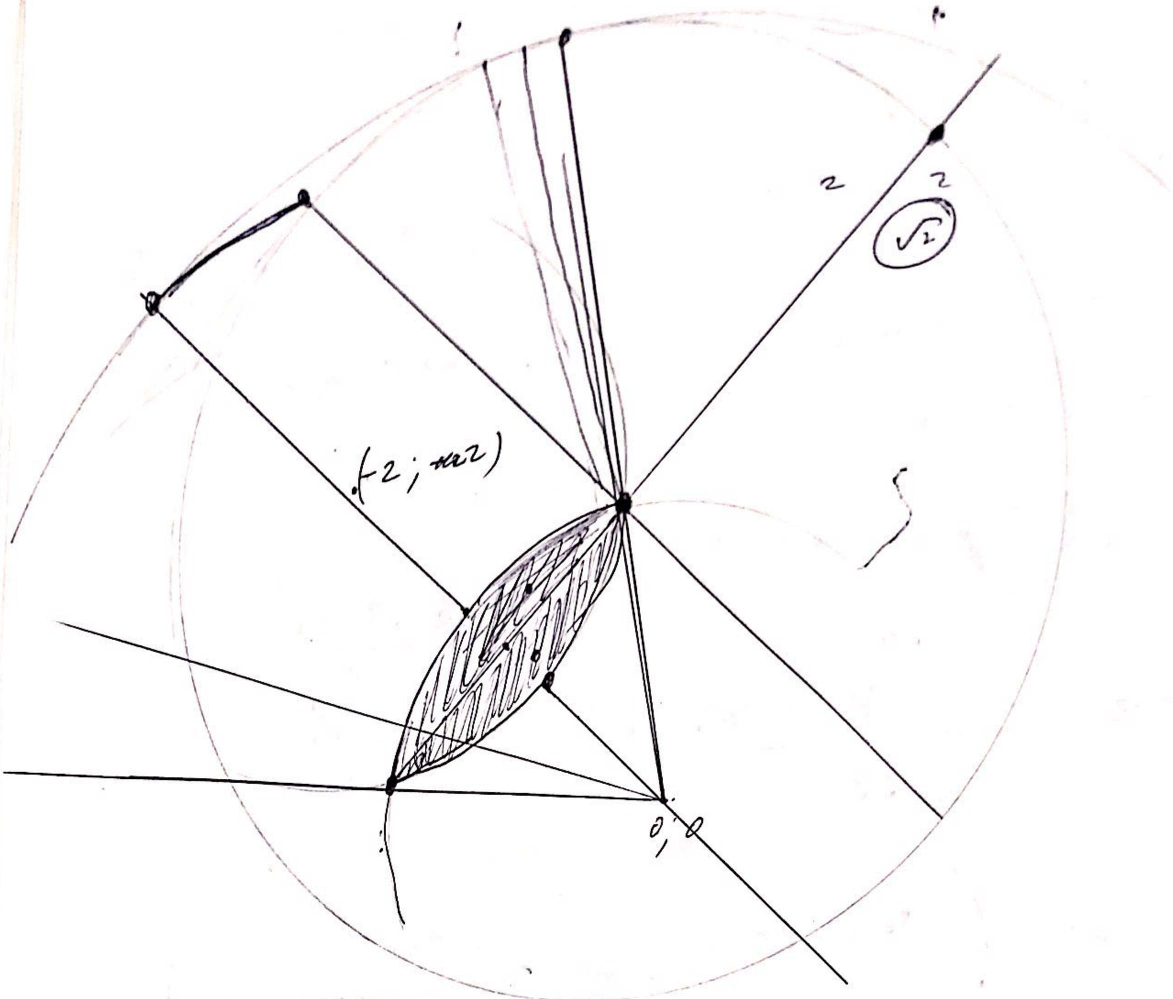
$$+ 2 \cdot \frac{(180 - \arccos(-\frac{1}{16}))8\pi}{360} =$$

$$= \frac{2\pi}{360}\left(32\arccos\left(-\frac{1}{16}\right) + 8 \cdot \left(180 - \arccos\left(-\frac{1}{16}\right)\right)\right)$$

$$- 8 = \frac{2\pi}{360}\left(1440 - 24\arccos\left(-\frac{1}{16}\right)\right) - 8 =$$

$$= \frac{48\pi}{360}\left(24 - \arccos\left(-\frac{1}{16}\right)\right) - 8 = \frac{2\pi}{15}\left(24 - \arccos\left(-\frac{1}{16}\right)\right) - 8$$

$\sqrt{3}$ 2



$-1-\sqrt{3}+\cancel{1}\cdot\sqrt{3}$

$-2\sqrt{3}$

$\cancel{1}-\sqrt{3}-1-\sqrt{3}$

$-2\sqrt{3}$

$(2\sqrt{3})^2$

12

$(2\sqrt{3})^2+$

$4\cdot 3$ 12

24 $\sqrt{24}$

8 $6\cdot 4$ $2\sqrt{6}$

16

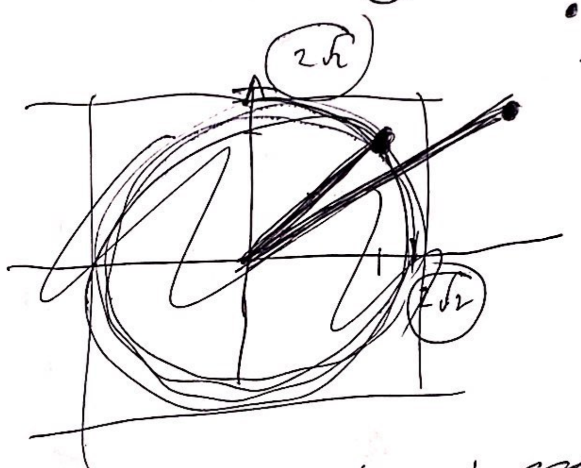
?

$a^2+b^2 \le 8 \le 4(b-a)$

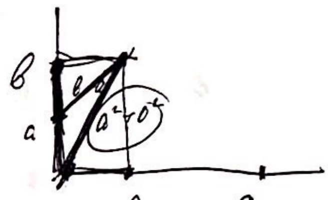
~~3(4~~ ~~max~~ $b-a$ 2

$2\sqrt{2}$

2 $\quad 2\sqrt{2}$



$\sqrt{a^2+b^2} \le \sqrt{8}$



$a^2+b^2 > 8$

$a^2+b^2 \le 4(b-a) \qquad 8 < a^2+b^2 \le -4a+4b$

$b-a \le 2$

$a > b$

$a > 2\sqrt{2}$ $\qquad b > a$

$b > 2\sqrt{2}$

$< 2\sqrt{2}$

$a^2+b^2 \le$

$a^2+b^2 \le 4(b-a)$

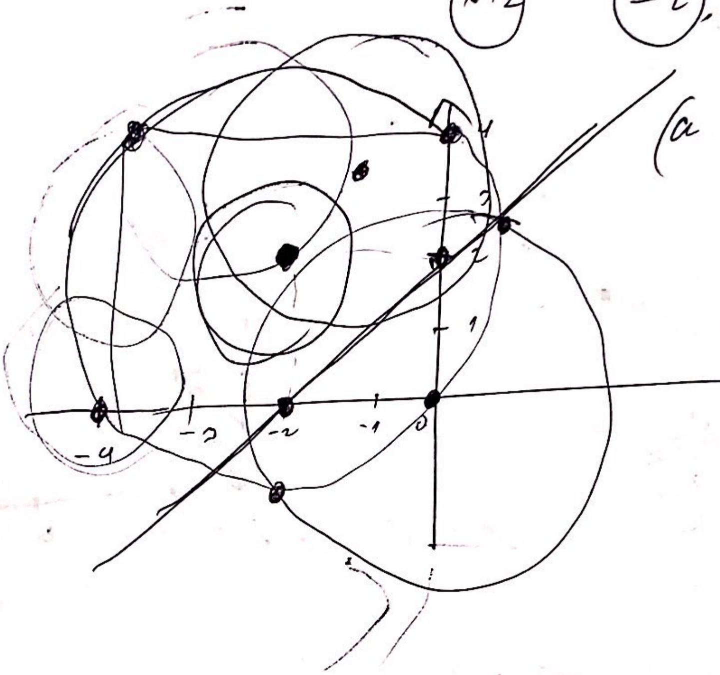
3 $\quad$ 3 $\quad$ $b=(a+2)^2$

$a^2+b^2 \le 4(b-a)$ $\quad$ 2 $\quad$ $(b-a)$

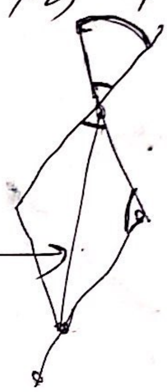
2

$a^2 \ge 2$

-2 $\quad$ -2



$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8.$



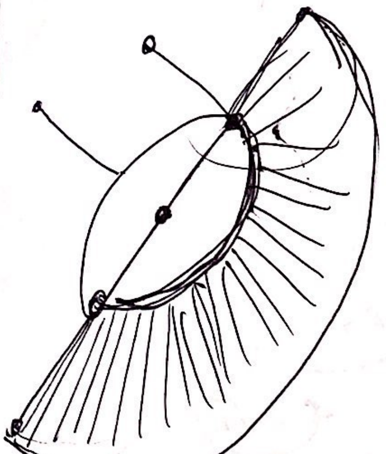
$(2;-2)$

$a=-2$

$b=2.$

$4(b-a) \le 8.$ $\quad$ $4(b-a)$

$2a \le 2$



$a_1^2+b_1^2 \le 8.$

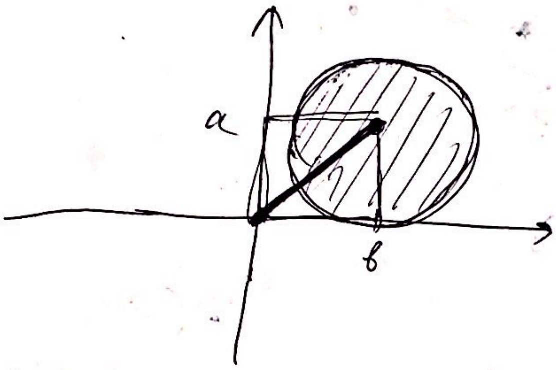
$b-a = (b_1-a_1) = (b-2-a-2+4)$

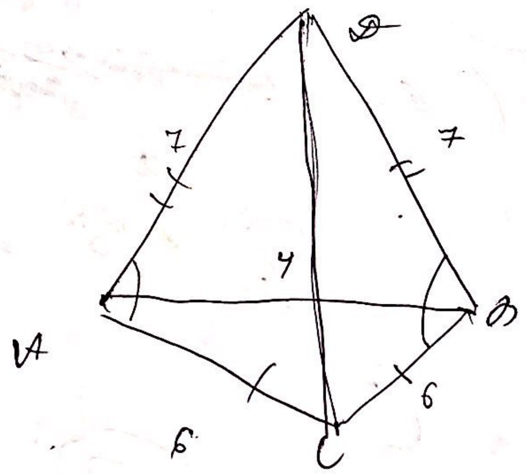
$(b_1-a_1+4) \le 2.$

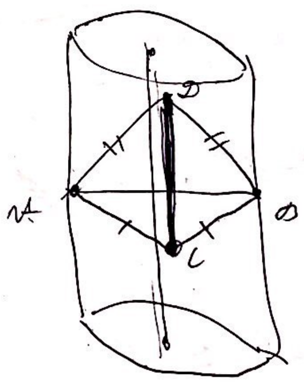
$b_1-a_1 \le -2.$

$b_1^2+a_1^2 \le 8.$

$(x - a)$







$a_{10}\, a_{16} > S + 39.$

$a_{11}\, a_{15} < S + 55.$

$\frac{5\cdot 6}{2}$

$b \quad 2b \quad 3b \quad 4b \quad 5b$

$S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6.$

$6a_1 + 15b$

$6 \cdot \frac{a_1 + a_6}{2} = 6 \cdot \frac{2a_1 + 5b}{2}$

$a_{10} = (a_1 + 9b)$

$a_{16} = (a_1 + 15b)$

$(a_1 + 9b)(a_1 + 15b) > 6a_1 + 15b + 39$

$(a_1 + 10b)(a_1 + 14b) < 6a_1 + 15b + 55.$

$24ba_1$

$a_1^2 + \cancel{9ba_1 + 15ba_1} + 135b^2 > 6a_1 + 15b + 34$

$< a_1^2 + 24ba_1 + 140b^2 < 6a_1 + 15b + 55.$

$6a_1 + 15b + 34 + 15b^2$

$a_1^2 + 24 + 140 < 6a_1 + 15 + 55.$

$34 + 5b^2 < 55.$

$5b^2 < 21.$

$b = 1 \quad 2.$

16

$(a_1+9)(a_1+15) > 6a_1 + 15 + 39$

$a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 54$

$a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 70$

$\cancel{6a_1 + 70 \cdot 2 \cdot 6a_1 \cdot 54 + 5}$

$a_1^2 + \cancel{24a_1} + 18a_1 + 70 < 0.$

$(a_1 + 9)^2 - 11 = a_1^2 + 18a + 81 \geq 0.$

$(a_1+9)^2 - 11 < 0.$

1

$\cancel{70^2} - 1$

0.

$a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 15 + 39$

$a_1^2 + \cancel{24a} 18a_1 + (135 - 54) > 0.$

1 81

-9

-9

$(a_1+9)^2 \geq 0.$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102791**

ID профиля: **350607**

Вариант 23

Чистовик №1

№4.

пусть $a = 2^{a_1} 11^{a_2}$

$b = 2^{b_1} 11^{b_2}$

$c = 2^{c_1} 11^{c_2}$

~~a_1 ...~~ в разложении a, b, c есть только 2, 11 иначе бы их НОК делился на другое простое.

для НОД$(a; b; c) = 2^{\min(a_1, b_1, c_1)} \cdot 11^{\min(a_2, b_2, c_2)}$

$\Rightarrow \min(a_1, b_1, c_1) = 1$

$\min(a_2, b_2, c_2) = 1$

НОК$(a; b; c) = 2^{\max(a_1, b_1, c_1)} \cdot 11^{\max(a_2, b_2, c_2)}$

$\Rightarrow \max(a_1, b_1, c_1) = 16$

$\max(a_2, b_2, c_2) = 19$

Найдем кол-во троек $(a_1; b_1; c_1)$ и $(a_2; b_2; c_2)$ и перемножим и получим ответ т.к они независимы

Рассмотрим (a_1, b_1, c_1) ~~пусть одно~~

2 из них равны 1 и 16, пусть 3-й будет x тогда $1 \le x \le 16$ случаев разбить $(1, 16, x)$ на тройки при $x \in [2; 15]$ $3! \cdot (\text{кол-во } x) = 3! \cdot 14$

Черновик №2.

Рассмотрим случаи

(1; 1; 16) и (1, 16, 16)

~~Этого она~~

их всего по 3 (1; 1; 16) (1; 16; 16)

(1; 16; 1) (16; 1; 16)

(16; 1; 1) (16; 16; 1)

Значит троек $(a_1; b_1; c_1)$ $3! \cdot 14 + 6 =$

$= 6 \cdot 14 + 6 = 15 \cdot 6 = 90$

Аналогично для $(a_2; b_2; c_2)$

$(1; 19; y)$ $1 \leq y \leq 19$

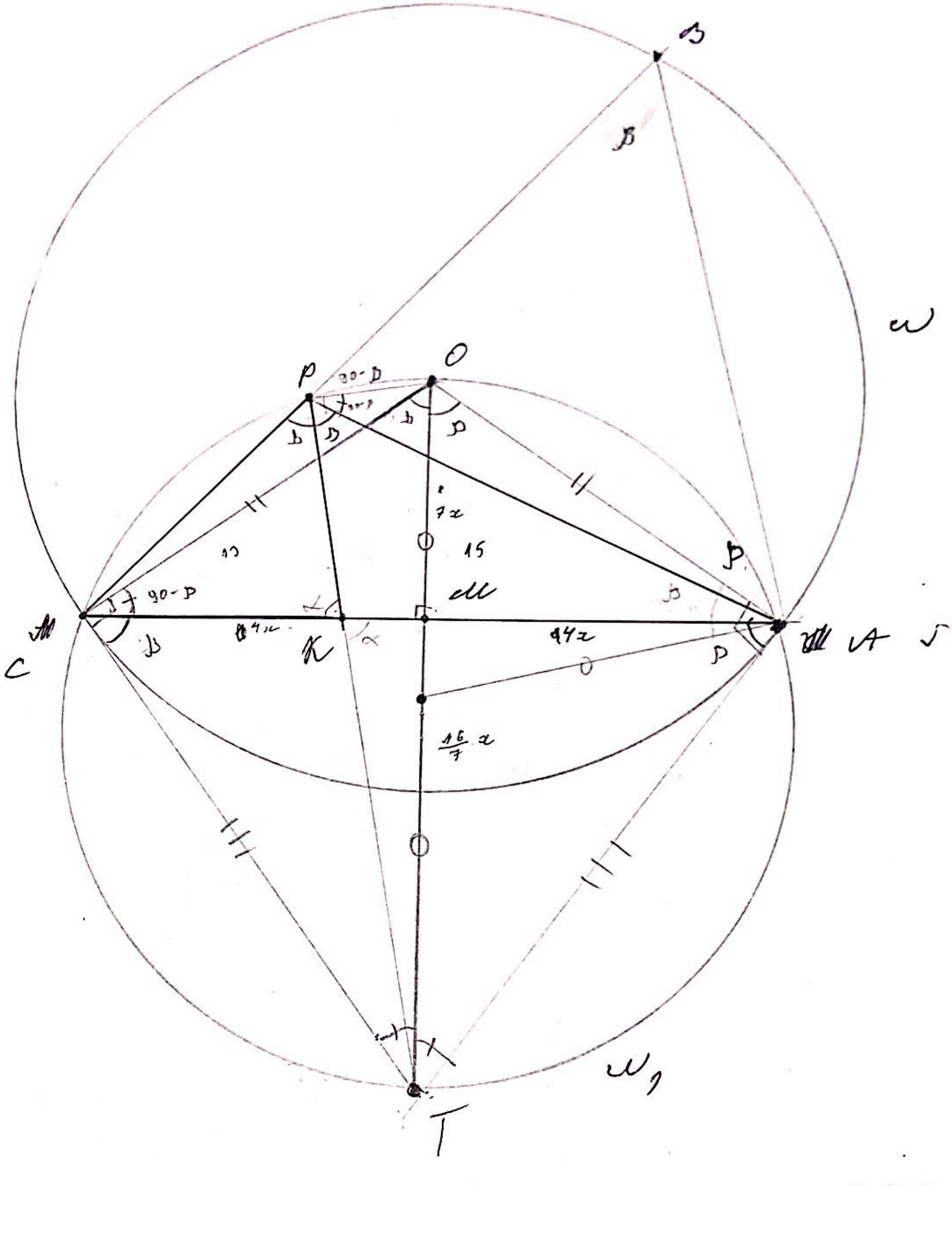
$6 + 17 \cdot 3! = 6 + 17 \cdot 6 = 18 \cdot 6.$

Всего троек: $18 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 6 = 9720$

Ответ: 9720 троек.

Чистовик № 3

№ 6.



Инстовик №4.

Решение: т.к CT, TA - касательные к ω $\Rightarrow \angle OCT = \angle OAT = 90^\circ$, то O, C, A лежат на окружности ω_1 $\Rightarrow$ T лежит на ω_1; т.к ~~OT = диаметр~~ $OC = OA$ $\Rightarrow$ центр ω_1 лежит на ср. перпенд. AC, и $\triangle COT = \triangle OAT$ ($OA = OC$, OT - общее)

$\Rightarrow T$ и O лежат на одной прямой

$\Rightarrow TO$ - диаметр.

Пусть $\angle CBA = \beta$ $\Rightarrow \angle COA = 2\beta$ (центральный) $\angle COT = \angle TOA = \frac{2\beta}{2} = \beta$

$\angle CA = \angle COT = \angle TOA = \angle TPA = \beta$ (в ω_1)

$\angle CPK = \beta$, $\angle CBA = \beta$ $\Rightarrow PK \parallel BA$

$\Rightarrow \triangle CPK \sim \triangle CBA$ по углам

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CPK}} = \left(\frac{CA}{CK}\right)^2$$

$$\frac{CK}{KA} = \frac{S_{CPK}}{S_{PKA}} = \frac{13}{15}$$ т.к (высота из P равна)

$$\frac{CK}{KA} = \frac{13k}{15k} \Rightarrow CK + KA = AC = 28k$$

$$\left(\frac{CA}{CK}\right) = \frac{28}{13}$$

$$\left(\frac{CA}{CK}\right)^2 = \frac{28^2}{13^2} \qquad S_{ABC} = \frac{28^2}{13^2} \cdot 13 = \frac{28^2}{13} \Rightarrow \frac{784}{13}$$

чистовик № 5

$\angle APB = 180 - 2\beta$

$\angle PAB = \beta \Rightarrow PA = PB$

$$S_{PAB} = \frac{\sin(180 - 2\beta) \cdot PA \cdot PB}{2} =$$

$$= \frac{\sin 2\beta \cdot PA^2}{2} = S_{ABC} - 13 - 15 = \frac{784}{13} - 28$$

$$= \frac{420}{13}$$

$$PA = \frac{2 \cdot 420}{13 \sin 2\beta} = 2 \cdot 420$$

$$\frac{CP}{PB} = \frac{13}{15} \quad (\text{теорема Фалеса})$$

$$CP = \frac{13\, PA}{15} = \frac{\cancel{13} \cdot 2 \cdot 420}{15 \cdot \cancel{13} \sin 2\beta} = \frac{840}{15 \sin 2\beta}$$

~~S_{ACB} = AC BA = 2 · PA · cos β (BA ...)~~

$$\cancel{\frac{PK}{BA} = \frac{13}{28}} \quad \text{~~(из подобия)~~}$$

$$\cancel{PK = \frac{13 \cdot 2 \cdot PA \cdot \cos\beta}{28}}$$

$$\cancel{S_{CPK} = 13 = \frac{CP \cdot PK \cdot \sin\beta}{2}} =$$

$$\cancel{= \frac{13\, PA \cdot 13 \cdot 2 \cdot PA \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta}{15 \cdot 28 \cdot 2}} =$$

$$\cancel{= \frac{PA^2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \sin\beta \cos\beta}{15 \cdot 28}} =$$

Чистовик №6.

$$S_{ACP} = \frac{CP \cdot PA \cdot 2\sin\beta \cdot \cos\beta}{2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{CP+PA+AC}{2}\right) \cdot \left(\frac{CP+PA-AC}{2}\right)\left(\frac{CP+AC-AP}{2}\right)\left(\frac{AC+AP-CP}{2}\right)}$$

CP, PA, $2\sin\beta$, $\cos\beta$ известны $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Уравнение с неизвестным AC решимо.

Чистовик 7.

N 5.

$$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = 2\log_{(x+34)}(2x+23)$$

$$\log_{(x+4)^2}(x+34) = \log_{(x+4)^2}(x+34)$$

$$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = 2\log_{(2x+23)}(-x-4)$$

$$\begin{cases} -x-4>0, & x+34\neq 1, & x+34>0 \\ 2x+23>0, & x+4\neq 1, & (x+4)^2>0 \\ x+34>0, & 2x+23\neq 1, & 2x+23>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -33 \\ x\neq -3 \\ x\neq -11 \\ x \\ -4>x \\ x>-\frac{23}{2} \\ x>-34 \end{cases}$$

-34 -33 $-\frac{23}{2}$ -11 -4 -3

$$x\in\left(-\frac{23}{2};-11\right)\cup(-11;-4)$$

$2\log_{(x+34)}(2x+23)$ – возрастающая функция

$\log_{(x+4)^2}(x+34)$ – убывающая функция

$$\log_{(x+4)^2}(x+34)$$

$$(x+4)^2 < x+34$$

$$x^2+8x+16 < x+34$$

$$x^2+7x-18<0$$

$$\left(x+\frac{35}{10}\right)^2+\left(\frac{35}{100}^2-18\right)<0$$

$tg\ \beta = \frac{4}{7}$.

$\frac{TA}{OA} = \frac{4}{7}$.

$\frac{CM}{OM} = \frac{4}{7}$.

$7x + \frac{16}{7}x$

13 15

$28x$

$\cancel{k(x+xA)}$

$28k$.

$\sin 2\beta \quad PA \cdot PB = \frac{784}{13} - 15$

$\frac{PA}{CP} = \frac{15}{13}$ $\frac{CP}{PB} = \frac{13}{15}$.

$AP = PB$ $PA^2 \sin 2\beta = \frac{784}{13} - 15$

PA.

$$\log_{(x+34)(x+1)}\left(\frac{2x+23}{x+4}\right)$$

$$2\log_{(x+34)}(2x+23) \qquad (x+34)^2$$

$2x+23$

$x+34$ $\qquad (x+1)$

$x+4$

$x_1 \quad (x+34)^{x} = 2x+23$

$(2x+23)^{k} = -x-4$

$2x+11$

$y = 2x+11$

$2x+23$

$$\frac{CK}{KA} = \frac{13}{15}$$

AC $\qquad$ CPK.

$$CP \cdot PK \cdot \sin\beta = 13$$

$$PK \cdot PA \cdot \sin\beta = 15.$$

$$CK = \frac{2\,CP \cdot PK \sin\beta}{h} = 13k$$

$$KA = \frac{2\,AP \cdot PK \sin\beta}{h} = 15k$$

$$KA = \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AC}{2\sin 2\beta}$$

$$\frac{AC}{\sin 2\beta} = 2R$$

$$\cancel{r^2 = R^2} \qquad 2r \cdot \cos\beta = R$$

$$AC = 2r \cdot \sin 2\beta = \frac{R}{\cos\beta} \cdot \sin 2\beta =$$

$$= 2 \cdot \sin\beta \cdot R$$

$$\frac{AC}{\sin\beta} = 2R$$

$$\frac{AC}{\sin\beta} = 2R$$

$$AC = 2R \cdot \sin\beta$$

$CP \cdot PK$

$PK \cdot PA$

$CP \cdot PA \cdot \sin 2\beta = 20$

$CP \cdot PA$

$$13 = \frac{CP \cdot PK \sin\beta}{2}$$

$$15 = \frac{AP \cdot PK \sin\beta}{2}$$

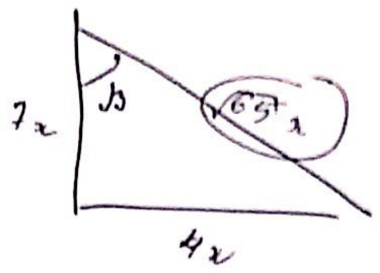
$$\frac{AP}{CP} = \frac{15}{13}$$

$AP \cdot PC \cdot \sin 2\beta = 20$

$$\frac{PK \cdot \sin\beta}{2}\left(\frac{CP}{2} + \frac{AP}{2}\right) = 20$$

$$\frac{AP \cdot PC \quad \sin 2\beta}{2} = 20$$

$$\frac{PK \cdot \cancel{\sin\beta}\,(CP + AP)}{4} = AP \cdot PC \,\cancel{\sin\beta}\, \cos\beta$$



49 + 16

√81

√65

$$7x \cdot \frac{16}{7}x = (4x)^2$$

Мау

2x

3