Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102761**

ID профиля: **219004**

Вариант 23

Чистовик

№1.

$a_1+a_2+\ldots+a_6=a_1+a_1+d+\ldots+a_1+5d=\frac{(2a_1+5d)\cdot 6}{2}=3(2a_1+5d)$

$S=3(2a_1+5d)$

$a_{10}a_{16}=(a_1+9d)(a_1+15d)=a_1^2+24a_1d+135d^2$

$a_{11}a_{15}=(a_1+10d)(a_1+14d)=a_1^2+24a_1d+140d^2$

известно, что:

$\begin{cases} a_1^2+24a_1d+135d^2>3(2a_1+5d)+39 \\ a_1^2+24a_1d+140d^2<3(2a_1+5d)+55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2+24a_1d+135d^2>3(2a_1+5d)+39 \\ -a_1^2-24a_1d-140d^2>-3(2a_1+5d)-55 \end{cases}$

сложим оба неравенства,

$-5d^2>-16$

$5d^2<16$

$d^2<\frac{16}{5}=3,2 \Rightarrow d^2<3,2$

a_1 - целое число, a_1+d - тоже целое число, значит и d - целое число $d>0$ т.к. прогрессия возрастающая, если $d=1$, то $1^2<3,2$; если $d=2$, то $2^2>3,2$, значит $d=1$, иначе условие задачи не будет выполняться

$\begin{cases} (a_1+9)(a_1+15)>3(2a_1+5)+39 \\ (a_1+10)(a_1+14)<3(2a_1+5)+55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2+24a_1+135>6a_1+54 & (1) \\ a_1^2+24a_1+140<6a_1+70 & (2) \end{cases}$

1) $a_1^2+18a_1+81>0$

$(a_1+9)^2>0$

$a_1\neq-9$

2) $a_1^2+18a+70<0$

$a_1^2+18a+81-11<0$

$(a_1+9)^2<11$

$-3\leq a_1+9\leq 3$ т.к. a_1+9 - целое

$-12\leq a_1\leq -6$

Значит, $a_1=\{-12;-11;-10;-8;-7;-6\}$, т.к. $a\neq-9$

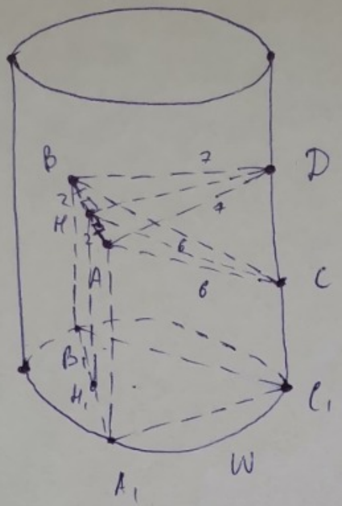
Ответ: $-12;-11;-10;-8;-7;-6$

1

21102761 (U219004 M1300999)

Чистовик

№2

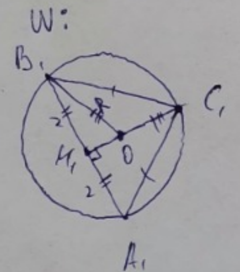


т.к. C и D лежат на боковой поверхности цилиндра, и CD параллельна оси, то CD лежит на образующей этого цилиндра.

CD перпендикулярна основаниям, след. (CDH) тоже перпендикулярно плоскости основания, где H – середина AB, основания равнобедренных $\triangle BAD$ и $\triangle BAC$. $AB \perp DH$; $AB \perp CH$, след. $AB \perp (CHD)$, и AB параллельна основаниям цилиндра.

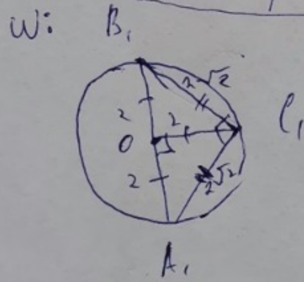
Спроецируем AB, AC, BC на основание W

W:



$B_1A_1 = AB = 4$; $A_1C = B_1C_1$ как ~~отрезки~~ проекции равных наклонных AC и BC. Центр окружности W будет лежать на прямой H_1C_1 в равнобедренном $\triangle B_1C_1A_1$. При изменении угла DHC двугранного угла C(AB)D центр W будет двигаться по прямой C_1H_1. Наименьший радиус будет тогда, когда O совпадёт с H_1, иначе B_1O будет больше B_1H как гипотенуза в $\triangle B_1OH_1$, значит наименьший R будет при $B_1O = B_1H_1 = 2$.

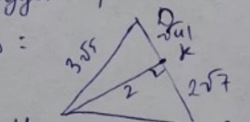
W:



тогда $\angle B_1C_1A_1 = 90°$, $B_1C_1 = A_1C_1 = 2\sqrt{2}$

Если в $\triangle CHD$ провести высоту HK, то HK будет равна $OC_1 = 2$

$\triangle CHD$:

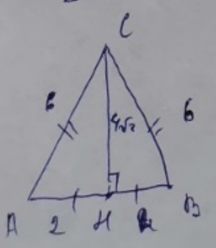


$CK = \sqrt{32-4} = 2\sqrt{7}$

$DK = \sqrt{45-4} = \sqrt{41}$

по т. Пифагора

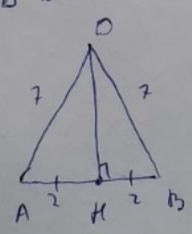
$\triangle CAB$:



$CH = \sqrt{36-4} = 4\sqrt{2}$

по т. Пифагора

$\triangle BAD$:



$DH = \sqrt{49-4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

по т. Пифагора

Чистовик

№2.

След. $CD = CK + CD = 2\sqrt{7} + \sqrt{41}$

Ответ: $2\sqrt{7} + \sqrt{41}$

Черновик

$a_1; a_1+b; a_1+2b; a_1+3b; + a_1+5b = S$

$\cancel{S}+39-\cancel{S}-55 = 39-55$

$a_{10} \cdot a_{16} > S+39$

$a_{11} a_{15} < S+55 \qquad -a_{11}a_{15} > -S-55$

$\begin{array}{r} 55 \\ -39 \\ \hline 16 \end{array}$

$a_{10} a_{16} - a_{11} a_{15} > -16$

$a_1+a_2+\ldots+a_6 = \frac{(2a_1+5d)\cdot 6}{2} = 3\cdot(2a_1+5d) = S$

$a_{10} = a_1+9d$

$a_{16} = a_1+15d$

$a_{10} a_{16} = (a_1+9d)(a_1+15d) = a_1^2 > S+39$

$a_{11} = a_1+10d$

$a_{15} = a_1+14d$

$a_{11} a_{15} = (a_1+10d)(a_1+14d) = a_1^2+10a_1d+14a_1d+140d^2 =$

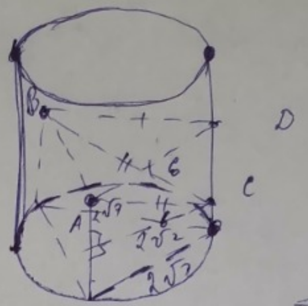
$= a_1^2 + 28a_1d + 140d^2;$

$(a_1+9d)(a_1+15d) > S+39 = 3(2a_1+5d)+39$

$(a_1+10d)(a_1+14d) < S+55 = 3(2a_1+5d)+55$

21102761 (U219004 M1300999)

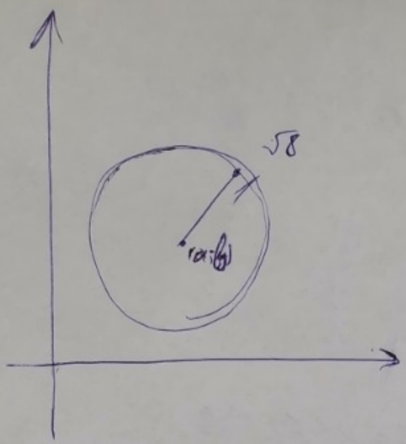
черновик

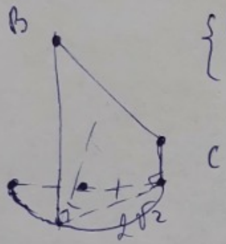


$36-8=28=$

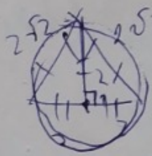
$=7\cdot 4$

$2\sqrt{7}$

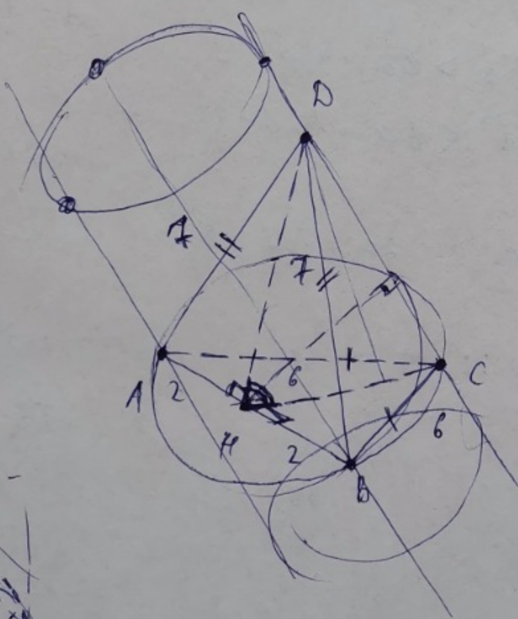


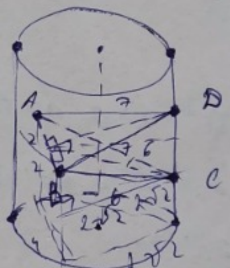


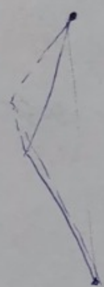
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le \min(-4a+4b,\ 8)\end{cases}$$

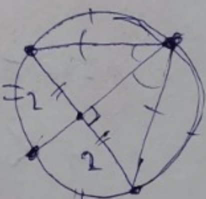


ОДС180

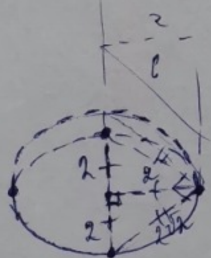


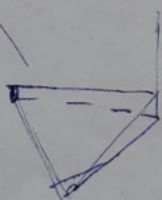


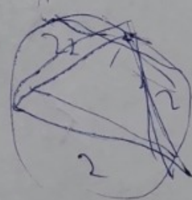


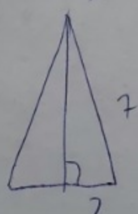


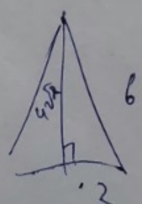
$49-4=$











$36-4=32=$

$=8\cdot 4=16\cdot 2$

$4\sqrt{2}$

Черновик

$a_{10}a_{16}=(a_1+9d)(a_1+15d)=a_1^2+9a_1d+15a_1d+135d^2=a_1^2+24a_1d+135d^2$

$a_{11}a_{15}=(a_{10}+d)(a_{16}-d)=a_{10}a_{16}+a_{16}d-a_{10}d-d^2<S+55$

$\to S+39$

$81=9\cdot9=3\cdot27$

a_1

$\begin{cases} a>b \\ x<y \end{cases}$

$\begin{array}{r} 135 \\ -\ 54 \\ \hline 81 \end{array}$

$a_{10}\cdot a_{16}>S+39$

$\begin{cases} (a_1+9d)(a_1+15d)>3(2a_1+5d)+39 \\ (a_1+10d)(a_1+14d)<3(2a_1+5d)+55 \end{cases}$

$15+55=70$

$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 9 \\ \hline 135 \end{array}$

$a_{10}a_{16}=(a_{11}-d)(a_{15}+d)$

$a_{11}a_{15}=(a$

$15+39=40+14=54$

$d=1$

$\begin{cases} a_1^2+24a_1d+135d^2>6a_1+15d+39 \\ a_1^2+24a_1d+140d^2<6a_1+15d+55 \end{cases}$

$a_1^2+18a+81-11<0$

$\begin{cases} a_1^2+24\ldots>\ldots \\ -a_1^2-24a_1d-140d_2>-6a_1-15d-55 \end{cases}+$

$135d^2-140d^2>39-55=16$

$1^2<(3,2)^2$

$+5d^2<16$

$2^2>3,2$

$S+39$

$d^2<\frac{16}{5}$

$0<d<\frac{4}{\sqrt5}=\frac{4\sqrt5}{5}$

$d<\frac{4}{\sqrt5}=\left(\frac{16}{5}\right)^2=\left(\frac{16}{5}=3,2\right)$

$d=1;$

21102761 (U219004 M1300999)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102761**

ID профиля: **219004**

Вариант 23

Чистовик

№1.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=22=2^1\cdot 11^1 \\ НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

НОД чисел 22, значит все числа a; b; c делятся на 2 и 11.
НОК чисел $2^{16}\cdot 11^{19}$, значит все числа ~~кроме a; b; c~~ a; b; c не имеют простых множителей, кроме 2 и 11, следовательно все числа раскладываются на степени 2 и 11. Так как $НОД(a;b;c)=11^1\cdot 2^1$, то одно число имеет множитель 2^1, а также есть число, которое имеет множитель 11^1 (степень не превышает 1). Так как $НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19}$, то есть число, которое имеет множитель 2^{16}, и есть число, которое имеет множитель 11^{19} (это максимальная степень 2 или 11, иначе НОК чисел был бы больше) Каждое из чисел имеет два множителя, степени двойки и одиннадцати, значит всего таких множителей шесть. Четыре из них: 2^1; 11^1; 2^{16}; 11^{19}; значит другие два множителя имеют вид: 2^x; 11^y; $1\le x\le 16$ и $1\le y\le 19$, иначе НОД и НОК чисел a; b; c были бы другими
количество чисел $(2^x; 11^y) = 16\cdot 19 = 292$

~~Число а можно выбрать:~~ $\begin{pmatrix} 2^1 \\ 2^{16} \\ 2^x \end{pmatrix}$ ~~18 вариантов степени 2 и~~ $\begin{pmatrix} 11^1 \\ 11^{19} \\ 11^y \end{pmatrix}$

~~21 вариантов степени 11, 18·21 вариантов выбрать а~~

~~если: степень 2 – 1, то~~ выбрать места для 2^x – 3, для 11^y – тоже 3, тогда расположить 2^x и 11^y 9 способов

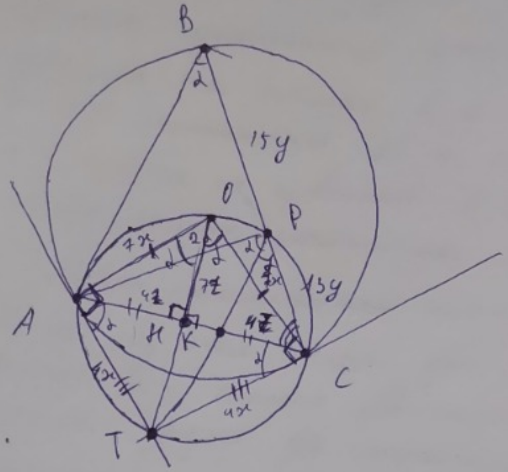
всего троек: $292\cdot 9 = 2628$

Ответ: $292\cdot 9 = 2628$

21102761 (U219004 M1301000)

Чистовик

№3.



а) Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle AOC = 2\alpha$ т.к. он центральный, и $\angle CAT = \angle CBA$ т.к. AC — хорда, $\angle ABC$ опирается на эту хорду, AT — касательная. Аналогично $\angle ABC = \angle TAC = \alpha$. Тогда $\angle ATC = 180 - \angle TAC - \angle TCA = 180 - 2\alpha$. $\angle AOC + \angle ATC = 180$, значит окружность, описанная около $\triangle AOC$ пройдёт через T, значит $\angle APC = \angle AOC = 2\alpha$ т.к. опираются на одну дугу. По той же причине $\angle TCA = \angle TPA = \angle TAC = \angle TPC = \alpha$. Значит $PK \parallel AB$ при $\angle KPC = \angle ABC$ как соответственные и секущей BC.

$\triangle APK$ и $\triangle CPK$ имеют общую высоту, значит AK относится к KC как площади; $\frac{AK}{KC} = \frac{15}{13}$, по теор. Фалеса $\frac{AK}{KC} = \frac{BP}{PC} = \frac{15}{13}$

$\triangle CPK \sim \triangle CBA$ по 2 углам ($\angle BCA$ — общий), след. их площади относятся как квадрат k, коэф. подобия $k = \frac{CP}{BC} = \frac{13}{28}$, $\frac{S_{\triangle CKP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{13^2}{28^2}$; $\frac{13}{S_{\triangle ABC}} = \frac{13^2}{28^2}$; $S_{\triangle ABC} = \frac{28^2 \cdot 13}{13^2} = \frac{28^2}{13} = \frac{784}{13}$

б) $OA = OC = R$, след. $\triangle AOC$ — равнобедр., $\angle AOT = \angle COT = \angle TAC = \angle ACT = \alpha$;

$\frac{AT}{OA} = tg\,\alpha = \frac{4}{7}$ т.к. AT — касательная, ~~OK — б~~ $OT \cap AC = H$, OH — высота, бис-са, медиана; $\frac{AH}{OH} = tg\,\alpha = \frac{4}{7}$

Ответ: а) $\frac{784}{13}$