Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102699**

ID профиля: **369876**

Вариант 23

Чистовик №1 (1) В23

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$S_6 = 6a_1 + 15d$

$a_{10} a_{16} = (a_1+9d)(a_1+15d) = a_1^2 + 24ad + 135d^2$

$a_{11} a_{15} = (a_1+10d)(a_1+14d) = a_1^2 + 24da + 140d^2$

Т.к все числа целые, то и a_1 - целое, т.к $a_1 + d$ = целое =>

$\nearrow$ целое

=> d = целое - целое => само d - целое, и т.к последовательность возрастает d - натуральное

$a_1^2 + 24ad + 135d^2 - 39 > 6a_1 + 15d > a_1^2 + 24dd + 140d^2 - 55$

$\Downarrow$

$135d^2 - 39 + 55 > 140d^2$

$16 > 5d^2$

$\frac{16}{5} > d^2$

$\Downarrow$

$4 > d^2 \Rightarrow d^2 = 1 \Rightarrow d = 1$

$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 135 - 39 > 6a_1 + 15 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 - 55 < 6a_1 + 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \\ a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

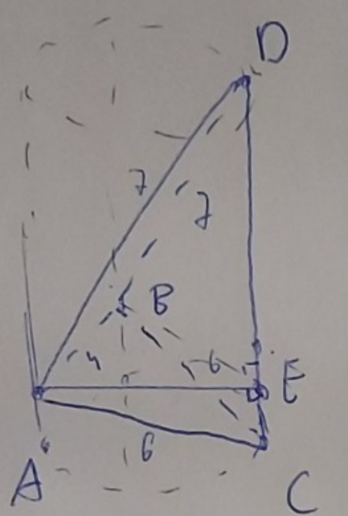
(т.к a_1 - целое)

$\begin{cases} (a_1+9)^2 > 0 \\ (a_1+9)^2 < 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \neq -9 \end{cases} \\ \begin{cases} -\sqrt{11} - 9 < a < \sqrt{11} - 9 \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \neq -9 \\ \cancel{a \in (-3, -2, -1} \\ a \in (-12, -11, -10, -9, -8, -7, -6) \end{cases} \Rightarrow$

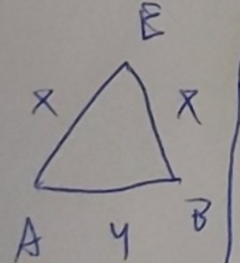
Ответ: $a_1 \in \{-12, -11, -10, -8, -7, -6\}$ и $d = 1$

№2

Чистовик (2) В23



Проведем через A и B плоскость параллельную основанию цилиндра пусть плоскость пересечет прямую CD в точке E, тогда заметим что точка E тоже лежит на цилиндре (т.к CD ∥ Оси и C и D лежат на цилиндре => весь отрезок лежит на цилиндре) и т.к плоскость ABE паральна основанию, то радиус описанной окружности ABE равен радиусу цилиндра. Заметим что прямая CD ⊥ плоскости ABE (т.к ABE ∥ основанию), а так же заметим, что △ ADC и BDC равны по 3 сторонам => отрезки AE и BE равны из симметрии. Пусть AE=x



~~тогда радиус описаной окружности равен~~

$$\frac{abc}{4S} = \frac{4x^2}{4\sqrt{(x+2)(1)(1)(x-2)}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = R$$

$$R^2 = \frac{x^4}{x^2-1}$$ ~~Найдем минимум радиуса~~

$$(R^2)' = \frac{x^4 \cdot 2x - 4x^3(x^2-2)}{2x} = 0 = \frac{x^3(2x^2-4x^2+4x)}{2x} = 0$$

$x>0$ (т.к радиус неотрицательный)

$$-\frac{x^3(4-x^2+2)}{2x} = 0$$

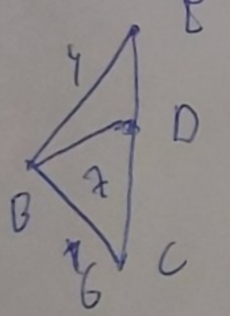
$-\sqrt{2}$ 0 $\sqrt{2}$ $+$ => при $x \geq$

Чистовик (3) B23

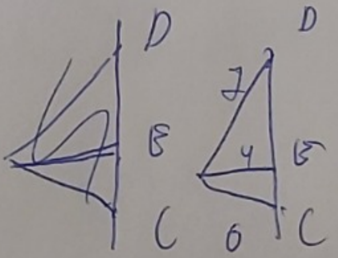
Тогда известный факт, что среди всех равнобедренных треугольников наименьший радиус описанной окружности у правильного треугольника $\Rightarrow x = 4$.

теперь ~~осталось~~ найдем отрезки EC и DE по теореме пифагора $EC = \sqrt{36-16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ $DE = \sqrt{49-24} = 5$

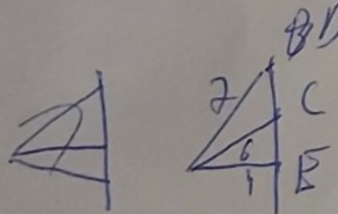
рассмотрим три положения точки E на прямой EC



может не возможно ~~BD~~ т.к $BD < BE$ и BC, но оно больше



$\Rightarrow DC = DE + EC = 2\sqrt{5} + 5$



$\Rightarrow DC = DE - EC = 5 - 2\sqrt{5}$ Ответ: $5 \pm 2\sqrt{5}$

21102699 (U369876 M1298915)

№3 Чистовик (4) В23

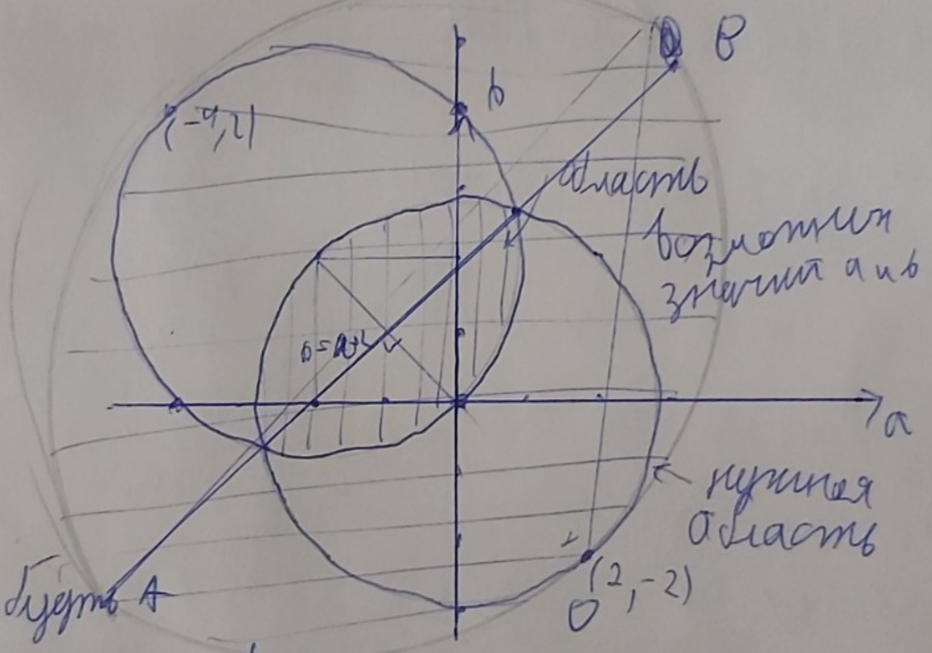
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le \min(-4a+4b,8)\end{cases}$$

Второе уравнение системы равносильно

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 8\\ a^2+b^2\le -4a+4b\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 8\\ (a+2)^2+(b-2)^2\le 8\end{cases}$$

Нарисуем



~~Х~~ для x и y будут существовать точки a и b, если ~~x и y~~ (x,y) находиться на расстоянии меньше $\sqrt{8}$ => т.е. если мы увеличим радиус кругов ~~в 2~~ на $\sqrt{8}$ и пересечем их ~~мы~~ мы получим искомое ГМТ => площадь будет пересечение окружностей с центром один $(2,-2)$ и $(-4,2)$ (очевидно из картинки) и радиусом $2\sqrt{8}$ ~~их точки пересечения x из~~

$$\begin{cases}(\cancel{x-2})(a-2)^2+(b+2)^2\le \cancel{8}32\\ (a+4)^2+(b-2)^2\le 32\end{cases}$$

найдем ~~точки пересечения~~ картинки

видно лежат на ~~не~~ прямой $b=a+2$

$\cancel{a^2}-4a+\cancel{4}+\cancel{b^2}+4b+\cancel{4}=\cancel{a^2}+8a+16+\cancel{b^2}+\cancel{4}-4b+\cancel{4}$

$-4a+4b=8a+12-4b$

Напишу кратко свой

Чистовик 5 B23

$$\begin{cases}(a-2)^2+(b+2)^2=32\\ b=a+2\end{cases}$$

$a^2-4a+4+a^2+8a+16=32$

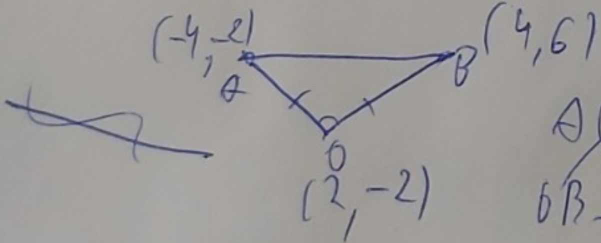
$2a^2+4a-16=0$

$a^2+2a-8=0$

$D=4+32=36$

$a=\frac{-2\pm 6}{2}=\left[\begin{matrix}4\\-4\end{matrix}\right.$

$b=\begin{matrix}6\\-2\end{matrix}$ Найдём угол в треугольнике AOB



$AO=\sqrt{36+16}=\sqrt{32}$

$OB=\sqrt{16+64}$

$AO=\sqrt{32}$

$BO=\sqrt{32}$

$AB=\sqrt{64+64}=16$

$\Downarrow$

$16^2=32+32-2\cos\angle AOB\cdot 32$

$4=1-\cos\angle AOB$

$\cos\angle AOB=-3$

если мы знаем $\cos\angle AOB$ то искомая площадь

... площадь сектора с таким углом и извест...

После нахождения точек пересечения я по ... подр
посчитать в угол и по известной формуле най
площадь сектора зная угол и радиус.

$б = 1,5a + 1,5$

А Черновик Чер

$(a-2)^2 + (1,5a-0,5)^2 = 32$

$a^2 - 4a + 4 + 2,25 - 1,5a + 0,25 = 32$

$a^2 - 6,5a + 6,25 - 32 = 0 / 4$

$4a^2 - 26a + 25 - 128 = 0$

$4a^2 - 26a - 103 = 0$

$D = 625 + 1648$

21102699 (U369876 M1298915)

После нахождения точек пересечения я по теореме косинусов
посчитать бы угол и по известной формуле нашёл
площадь сектора зная угол и радиус.

$b = 1{,}5a + 1{,}5$

$(a-2)^2 + (1{,}5a-0{,}5)^2 = 32$

$a^2 - 4a + 4 + 2{,}25 - 1{,}5a + 0{,}25 = 32$

$a^2 - 6{,}5a + 6{,}25 - 32 = 0 \,/\, 4$

$4a^2 - 26a + 25 - 128 = 0$

$4a^2 - 26a - 103 = 0$

$D = 625 + 1648$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 15 \\ \hline 75 \\ 15 \\ \hline 225 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0{,}25 \\ \times 4 \\ \hline 100 \end{array} \quad \begin{array}{r} 625 \\ \times 4 \\ \hline 2500 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array} \quad \begin{array}{r} 103 \\ \times 16 \\ \hline 618 \\ 103 \\ \hline 1648 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1648 \\ + 625 \\ \hline 2273 \end{array}$$

625

3273

$3273 \,|\, 3 \quad 1091$

2273

2500

48

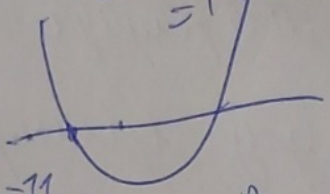
Черновик

$79 - 45 = 24$

$= \cancel{121}$

$121 - 198 + 70 <$

$= 121 - 198$



-11 -10 -8

$739 - 145 = 594$

$155 - 35 - 4 - 140$

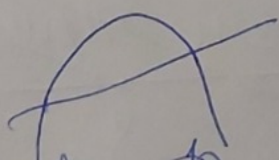
$= 100 - 195$

$= 100 - 20 + 15$

$= 87$

$\cancel{100 + 170 + 76}$

$100 - 140 + 70$



8 10

-10 < 7

$35 \cdot 2$

$7 \cdot 5 \cdot 2$

$7 \cdot 10$

$55 \cdot 14 = 70$

$14 \cdot 5$

140

$-\sqrt{11} - 9 < a_1 < \sqrt{11} - 9$

$(a_1 + 9)^2 < 11$

$-\sqrt{11} < a_1 + 9 < \sqrt{11}$

$3 \le a_1 + 9 \le 3$

$-3 - 9 =$

$= -12$

$9 < 11$

$17 - 9$

$11 + 10 = 199$

$(1 - 11)$

9

4

-9 -10

$(a_1 + 9)^2 - 11 < 0$

-8

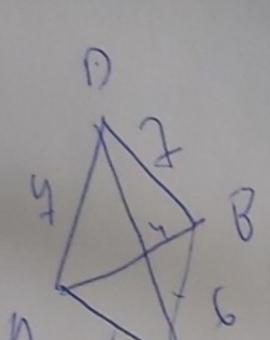
-7

-11

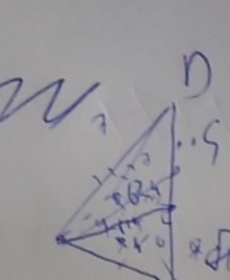
-9

21102699 (U369876 M1298915)

$44-16=$
$=25$

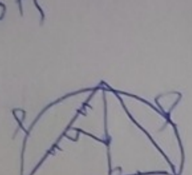


Горм



$\sqrt{20}+5$

$\sqrt{20}$



$R=\frac{abc}{4S}$

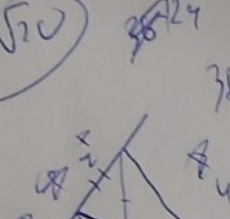
$\frac{4S}{abc}$

$\sqrt{4+t^2}=\sqrt{x^2-4}-t$ $\quad 5-\sqrt{20}$ $\quad 24$

$36-16=$

$4+t^2+t^2+2\sqrt{4+t^2}\,t=x^2-4$

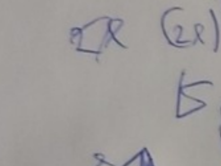
$8+2t^2+2\sqrt{4+t^2}\,t=x^2$



$R=\frac{2}{\sin\alpha}$

$(2x)^2-4-h_2$

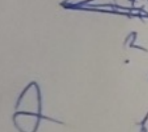
$=\sqrt{4x^2-4}-h_2$ $\quad R=\frac{abc}{4S}=\frac{4S}{abc}$



$x>2$ $\quad =\frac{4x^2}{4\sqrt{(x+1)(1)(1)(x-1)}}=S$ $\quad p=\frac{2x+2}{2}=x+1$

$\left(\frac{a}{b}\right)'=a'b-$

$4+h_2^2-x^2=\sqrt{4x^2-4}-h_2$

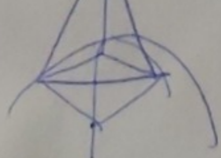


x^2-4-t4 $\quad \sqrt{4+h_2^2}=\sqrt{4x^2-4}-h_2=\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$ $\quad \frac{x^2 2x-4x^3(x^2-1)}{2x}$

$4+h_2^2=4x^2-4-h_2^2$ $\quad \sqrt{\frac{x^4}{x^2-1}}$ $\quad \frac{16}{3}>0$

$r=\frac{S}{p}$ $\quad S=pr$ $\quad r=\frac{S}{p}$

$\frac{11}{4}<0$ $\quad 2x^5-4x^5+4x^3=0$



$\frac{4}{2-1}=4$ $\quad (\sqrt{2})^2=$

$x=\sqrt{2}$ $\quad -2x^5+4x^3=0$

$x^3(-2x^2+4)=0$

$x^4(-x^2+2)=0$

$x^2=2$

$R=2$

$a_1, \quad a_1+d, \quad a_1+2d, \quad a_1+3d, \quad a_1+4d, \quad a_1+5d$

$S = 6a_1 + 15$

Верн

$a_{10} a_{16} = (a_1 + 9d)(a_1 + 15d) > 6a_1 + 15 + 39$

$(a_1 + 10d)(a + 14d) = a^2 + \cancel{10ad} + 1 \quad 24ad + 14d^2$

$\begin{array}{r} 15 \\ \times 9 \\ \hline 135 \end{array}$

Верно

$a^2 + a \cdot 9d + 15ad + 135d^2 > 6a + 15d + 39$

$a^2 + ad \cdot 24 + 135d^2 > 6a + 15d + 39$

$a^2 + 24ad + 140d^2 - 16 < 6a + 15d + 39 \quad 55 - 39 - 16$

$\begin{array}{r} 55 \\ -39 \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{r} 55 \\ -40 \end{array}$

71

$\cancel{135d^2 > 140d^2}$

$135d^2 > 140d^2 - 16$

$16 > 5d^2 \qquad a_1$ - целое

$\frac{16}{5} > d^2$

$3 > d^2$

$d = 1$

21102699 (U369876 M1298915)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102699**

ID профиля: **369876**

Вариант 23

Ответ: -9

№ 4

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 22 \\ НОК(a; b; c) = 2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

Чистовик ① Вариант 23

т.к. НОК чисел делится только на 2 и на 11, то числа a, b, c можно представить в виде $2^x\cdot 11^y$. Пусть $a = 2^{t_1}\cdot 11^{t_2}$; $b = 2^{t_3}\cdot 2^{t_4}$; $c = 2^{t_4,\, t_5}$, тогда

$$НОД(a,b,c) = 2^{\min(t_1, t_3, t_5)}\cdot 11^{\min(t_2, t_4, t_6)}$$

$$НОК(a,b,c) = 2^{\max(t_1, t_2, t_4)}\cdot 11^{\max(t_2, t_4, t_6)}$$

П) количество решений равно количеству решений такой системы

$$\begin{cases} \min(t_1, t_3, t_5) = 1 \\ \min(t_2, t_4, t_6) = 1 \\ \max(t_1, t_3, t_5) = 16 \\ \max(t_2, t_4, t_6) = 19 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \min\ldots = 1 \\ \max\ldots = 16 \end{cases} \\ \begin{cases} \ldots \end{cases} \end{array}\right.$$

- у нас есть 3 способа выбрать наименьшее число, потом 2 способа наибольшее и потом 14 способов 3 число ~~таким всего способов~~ $3\cdot 2\cdot 14$ ~~$3\cdot 2\cdot 16 = 96$~~ 16 так чтобы тройки не повторялись, однако

если 3 число равно одному из равных, то таких чисел будет $3\cdot 2\cdot 2$, но каждое такое число мы посчитали 2 раза $\Rightarrow$ так всего 6, $\Rightarrow$ всего чисел $6+6\cdot 14 = 15\cdot 6 = 90$

И аналогично для степеней 11, таких тоже всего

$3\cdot2\cdot17+3\cdot2=6\cdot18=108$

Шотовин 2 Вариант 22

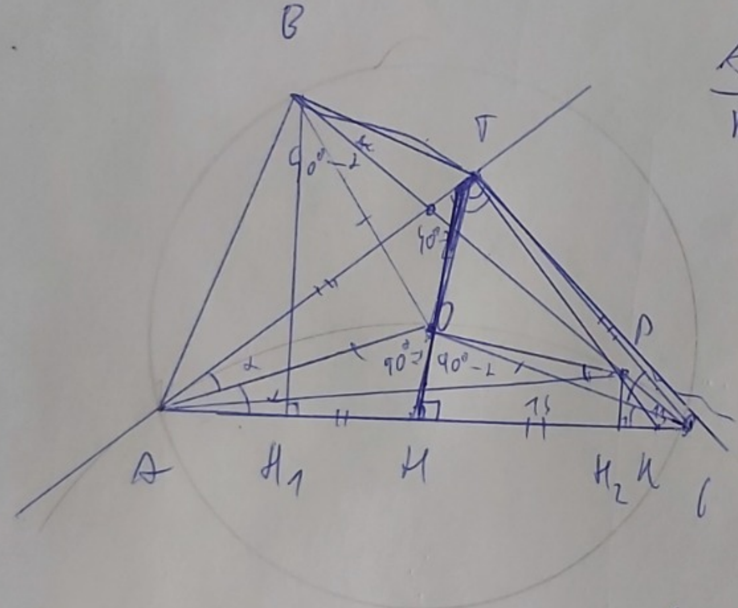
и т.к количество способов не взаимосвязано

ответ: $108\cdot80=8640$ троек

№16

1, 616

a, a, c



$\frac{AK}{KC}=\frac{15}{13}$ (т.к $S_{APK}=15$ и $S_{KPC}=13$)

$S_{AOC}=S_{APC}=28$

O-ц... (т.к P и O опираются на одну дугу)

$\angle OAC=\angle OCT=$

$=\angle OKA=\angle TAO=>$

$\frac{3}{16}\times6$ 96

$6\cdot16$

O-центр вписаной окружности в треугольник ATC

$AT=TC$ т.к касательны $=>$ TO - высота и медиана

в треугольнике ATC $=> S_{AOH}=14$

$\angle AOH=90^0-\alpha$ $\angle ATH=90^0-2\alpha$, $\angle ABC=90^0-\alpha$

21102699 (U369876 M1298916)

№5

Листочек №3 Вариант 23

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, $\log_{(x+4)^2}(x+34)$, $\log_{\sqrt{2x+23}}(-(x+4))$

~~Запишем некоторые ограничения (не все)~~

~~Выпишем О.Д.З.~~

$x+34>0$ $\quad x>-34$ Запишем некоторые ограничения (не факт что все)

$2x+23>0$ $\quad x>-11,5$ $\quad x\in(-11,5;-4)$

$x+4<0$ $\quad x<-4$

на этих ограничениях логарифмы равносильны

$2\log_{x+34}(2x+23)$, $\frac{1}{2}\log_{-(x+4)}(x+34)$, $2\log_{2x+23}(-(x+4))$

перемножим логарифмы $2\log_{x+34}(2x+23)\cdot\frac{1}{2}\log_{-(x+4)}(x+34)\cdot$

$2\log_{2x+23}(-(x+4))=2\log_{x+34}(-(x+4))\cdot\log_{-(x+4)}(x+34)=$

$=2$ => их произведение всегда равно 2, пусть два равны x, тогда 3 равен $x+1$, их произведение

$x\cdot x(x+1)=2$

$x^3+x^2-2=0$

$(x-1)(x^2+2x+2)=0$

Один корень $x=1$, пусть рассмотрим 3 случая

21102699 (U369876 M1298916)

Источник № 4 Вариант 23

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=1$

$2x+23=\sqrt{x+34}$

$4x^2+92x+529=x+34$

$4x^2+91x+495=0$

$D=91^2-495\cdot4=19^2$

$x_{1,2}=\frac{-91\pm19}{8}=\left[\begin{array}{l}-\frac{55}{4}\\-9\end{array}\right.$ — таких корней быть не могут => не подходят

$\log_{(x+4)^2}(x+34)=1$

$x+34=x^2+8x+16$

$x^2+7x-18=0$

$D=49+72=11^2$

$x_{1,2}=\frac{-7\pm11}{2}=\left[\begin{array}{l}2 \text{ — не подходит по О.Д.З.}\\-9\end{array}\right.$ — ~~не подходит т.к. не выполняется подкоренное условие~~ подходит

$\log_{\sqrt{2x+34}}(-x-4)=1$

$x^2+8x+16=2x+34$

$x^2+6x-18=0$

$D=36+72=108=(6)^2\cdot3$

$x_{1,2}=\frac{-6\pm6\sqrt3}{2}=[-3\pm3\sqrt3$ — нет таких корней у других уравнений => они не подходят

Ответ: −9

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, $\log_{(x+4)^2}(x+34)$, $\log_{\sqrt{2x+2}}(-x-4)$

a

$\log_a b^2$, $\log_{c^2} a^2$ $\log_b c$

$2x+23>0$
$x+34>0$
$x+4<0$

$x>-\frac{23}{2}$

$2\log_a b$ $\log_c a$ $\log_b c$

$x<-4$
$x>-\frac{23}{2}$
$x>-34$

$\frac{1}{\log_a c}$ $\log_b c \cdot \log_c a =$

$= \log_b a = \log_b a =$

$= \frac{a}{\log_a b}$

Терновать

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=1$

$2x+23=\sqrt{x+34}$ $2\log_b a \cdot \log_a b = 2$

x x $x+1$

$x^2(x+1)=2$

$x=1$

$x^3+x^2-2=0$

$(x-1)(x^2+\cancel{2x}+2)=0$

$x=1$

$x^3+2x^2+\cancel{2x}-\cancel{x^2}-\cancel{2x}-2$

$x(x^2-1)+(x^2-1)+x-1=0$

$(x-1)(x(x+1)+(x+1)+1)=0$

$(x-1)(x^2+x+x+2)$

21102699 (U369876 M1298916)

?

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=22 \\ НОК(a,b,c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

$a=2^{t_1}11^{t_2}$

$b=2^{t_3}11^{t_4}$

$c=2^{t_5}11^{t_6}$

Горнович

$НОД(a,b,c)=2^{\min(t_1,t_3,t_5)}\,11^{\min(t_2,t_4,t_6)}$

$НОК(a,b,c)=2^{\max(t_1,t_3,t_5)}\cdot 11^{\max(t_2,t_4,t_6)}$

t_1

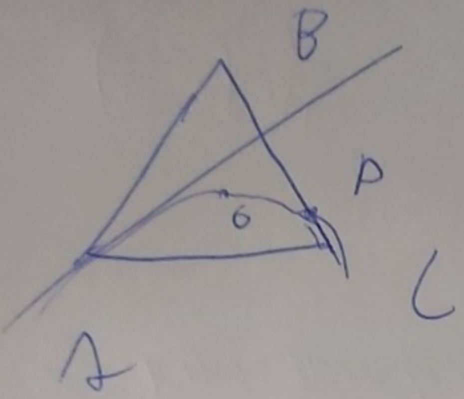
$\min(t_1,t_3,t_5)=1$ $t_1=1$ $1<t_2<11$ 16 вариантов

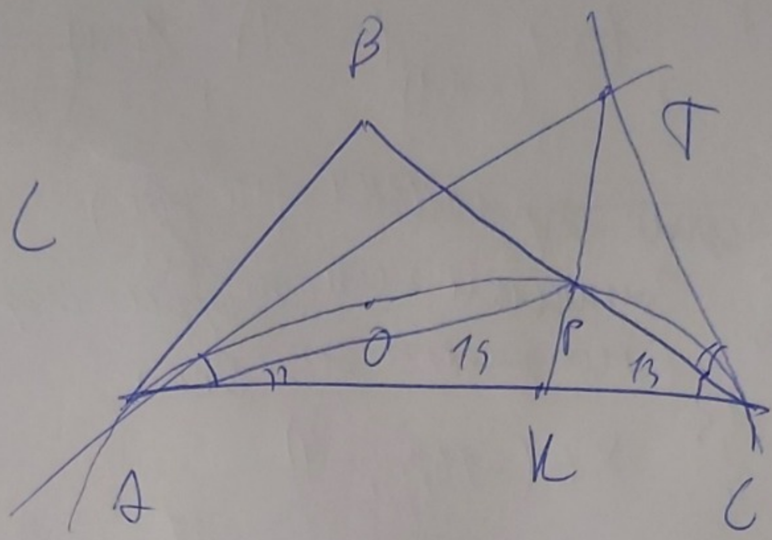
$t_5=16$

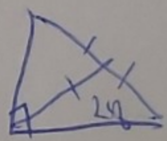
$\min(t_2,t_4,t_6)=1$

$\max(\ldots)=16$

$\max=19$







Чорновик