Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

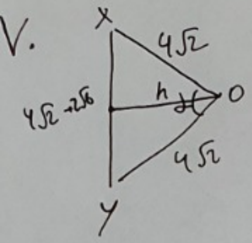
Шифр: **21102683**

ID профиля: **862924**

Вариант 23

Чистовик.

V.



$h = \sqrt{32-(2\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}$

$S_{XYO} = \frac{1}{2}\sqrt{18-4\sqrt{12}}$

$S_{иск.} = 2\,(S_{сектора} - S_{XYO})$

находится через α, который в свою очередь находится из теоремы cos

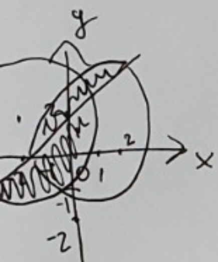
$S_{сект.} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}$

3.) Чистовик

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8) \end{cases}$$

$a^2+b^2+4a-4b \le 0$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$
$a^2+b^2 \le 8$ — две окружности с радиусом $2\sqrt{2}$

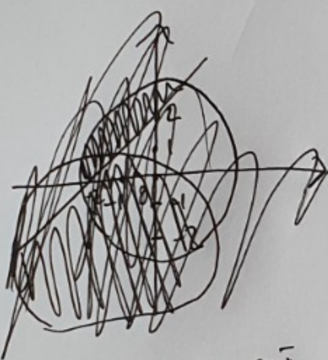


$-4a+4b \ge 8$

$b-a \ge 2$

$y \ge 2+x$ — т.к. x и y содержатся в окр. с $r=2\sqrt{2}$ и центром $O=(a;b)$

делит на 2 полуплоскости



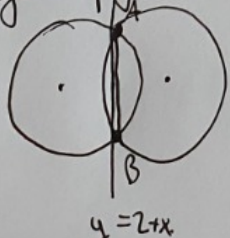
~~Т.к. прямая проходящая через~~

I. Прямая на которой лежат центры окружностей сод. a, b перпендикулярна $y=2+x$.

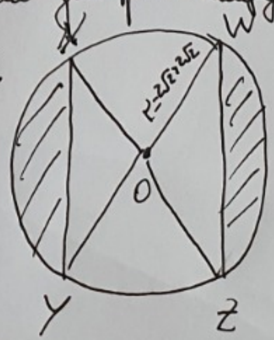
II. расстояние между $(0;0)$ и $(-2;2) = 2\sqrt{2}$, радиус этих окружностей

Перерисуем окружности, не меняя заштрих. площади

III.

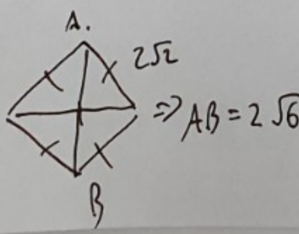


IV.



x и y прин. следующей области

$XY = ZW = 2\cdot 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6} = 4\sqrt{2}+2\sqrt{6}$



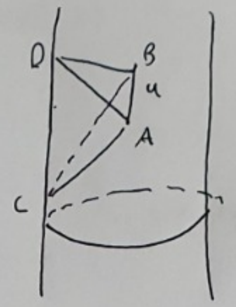
$\Rightarrow AB = 2\sqrt{6}$

③

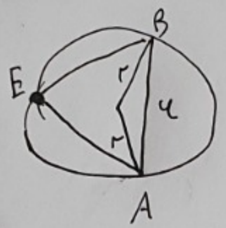
2.)

Чистовик

1.) если C и D касаются границ и CD параллельно оси, то CD лежит на границе



2.) Посмотрим на сечение цилиндра с окружностью, содержащую точки A и B :



Очевидно, минимальный $r = 2$, т.е. AB – диаметр

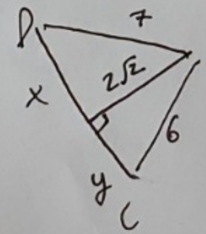
3.) $AE = EB$, т.к. это высоты ($AE \perp CD$, $BE \perp CD$, т.к. CD ∥ оси) в $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$, причем эти $\triangle$ равны по 3-м сторонам

$\Rightarrow AE = EB$

4.) $AE^2 + EB^2 = 4^2$ (прямой угол)

$AE = EB = 2\sqrt{2}$

5.)



$x^2 + 8 = 49$

$y^2 + 8 = 36$

$x = \sqrt{41}$

$y = \sqrt{28}$

Ответ: $CD = \sqrt{28} + \sqrt{41}$

2

Чистовик

№1 $S = 6a_1 + 15q$
шаг ар. прог.

$a_{10} = a_1 + 9q$ $a_{15} = a_1 + 14q$

$a_{16} = a_1 + 15q$

$a_{11} = a_1 + 10q$

$$\begin{cases} (a_1 + 9q)(a_1 + 15q) > 6a_1 + 15q + 39 \\ (a_1 + 10q)(a_1 + 14q) < 6a_1 + 15q + 55 \end{cases}$$

$a_1^2 + 24a_1q + 135q^2 - 6a_1 - 15q - 39 > 0$

$a_1^2 + 24a_1q + 140q^2 - 6a_1 - 15q - 55 < 0$

$140q^2 - 55 < 135q^2 - 39$

$q^2 < \frac{16}{5}$

$|q| < \frac{4}{\sqrt{5}}$

$q = \pm 1, 0$

$q = 1$ (возр. пр.)

$q = 1$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 - 6a_1 + 70 < 0 \\ a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \neq -9 \\ a_1^2 + 18a + 70 < 0 \end{cases}$$

$D = 44$

$a_{1,2} = -9 \pm \sqrt{11}$ $\sqrt{11} \in (3; 4)$

$a_1 \in (-9 - \sqrt{11}; -9 + \sqrt{11})$

$a_1 = -12, -11, -10, -8, -7, -6$

~~$q = -1$~~

$$\cancel{\begin{cases} a_1^2 - 30a_1 + 100 < 0 \\ a_1^2 + 11 - 30a_1 > 0 \end{cases}}$$

~~$D_1 = 500$~~

~~$D_2 = 456$~~

$$\cancel{\begin{cases} a_1 \in (15 - \sqrt{125}; 15 + \sqrt{125}) \\ a_1 \in (-\infty; 15 - \sqrt{114}) \cup (15 + \sqrt{114}; +\infty) \end{cases}}$$

~~$-\infty \ldots 4] \cup [27 \ldots$~~

~~$[4 \ldots 26]$~~

~~$a_1 = 4$~~

Ответ: $a_1 = \{-12; -11; -10; -8; -7; -6\}$

1

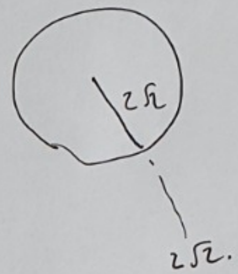
2

21102683 (U862924 M1299181)

N3. Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le \min(-4a+4b,8).\end{cases}$$

(a



$4\sqrt{2}$

Черновик

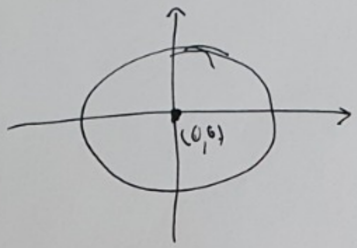
3.)

~~$a=2t$~~

~~a^2+b^2~~

~~$(a+b-2)^2$~~

$S \leq 8\pi$



$\frac{y-a}{2} = \frac{x}{-2}$

$-2y = 2x$

$y = -x$

~~$a^2+b^2 \leq 2a-2b$~~ $(-2;2)$ $(0,a$

$-4a+4b \geq 8$

$b-a \geq 2$

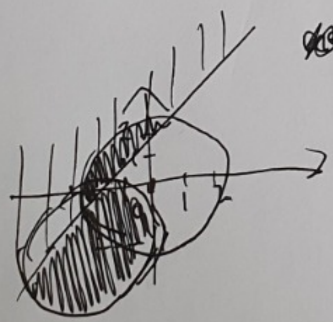
$a^2+b^2 \leq -4a+4b.$

$a^2+b^2 \leq 8$

$y \geq 2+x$

~~a^2+4a~~

$(a+2)^2+(b-2)^2 \leq 8$



$b \geq 2+a$

$b=2$

$- (2\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 =$

$= 28 - 8\sqrt{12} =$

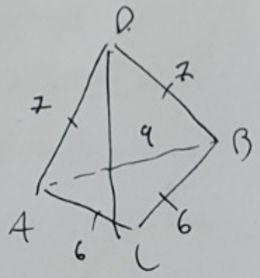
$= 18 - 8\sqrt{3}$

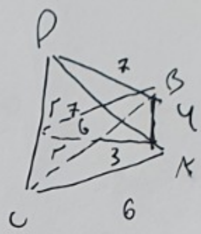
Черновик

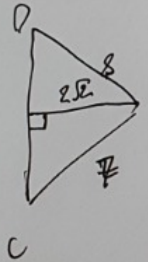
3.)

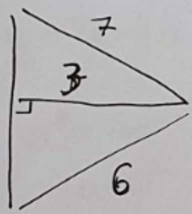
2.)

Черновик









~~$r > 2$~~

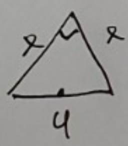
~~$r < 6$~~

~~$r = 3$~~

$\boxed{r = 2}$

$3^2 + x^2 = 6^2$

$3^2 + y^2 = 7^2$



$x^2 = 27$ $\quad 3\sqrt{3}$

$y^2 = 63$

$3\sqrt{7}$

$x^2 + x^2 = 4^2$

$x = 2\sqrt{2}$

$3(\sqrt{3} + \sqrt{7})$

$2^2 + x^2 = 6^2$

$x^2 = 32$ $\quad x = 4\sqrt{2}$

$x^2 = 45$ $\quad x = 3\sqrt{5}$

4. ...

Черновик

1)

$(a_1 + 9 - \sqrt{11})(a_1 + 9 + \sqrt{11}) \leq 0$

$a_1 \in (-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11})$

$a_1 \neq -9$ $\quad a_1 = -12, -11, -10, -8, -7, -6$

$D = 900 - 444 =$
$= 456$

$a_{1,2} = \frac{30 \pm 2\sqrt{119}}{2} = 15 \pm \sqrt{119}$

$a_{1,2} = \frac{30 \pm 2\sqrt{125}}{2} = 15 \pm \sqrt{125}$

$a_1 \in (15-\sqrt{125}; 15+\sqrt{125})$
$4, 5, \ldots 26$

$a_2 \in (-\infty; 15-\sqrt{119}) \cup (15+\sqrt{119}; +\infty)$

$-\infty \ldots 4]$ $\quad [27 \ldots$

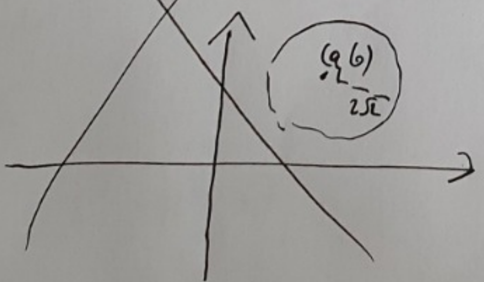
$a_1 = 4$

Ответ: $a_1 = \{-12, -11, -10, -8, -7, -6, 4\}$

)

$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-6)^2 \leq 8 \\ a^2 + 6^2 \leq \min(-4a+46, 8) \end{cases}$

$(a; 6)$



S - сумма первых 6 членов Черновик

1)

$a_{10} a_{16} > S+39$

$a_{11} a_{15} < S+55$

a_1

$6a_1 + q + 2q + 3q + 4q + 5q = 6a_1 + 15q$

$(a_1 + 9q)(a_1 + 15q) > 6a_1 + 15q + 39$

$(a_1 + 10q)(a_1 + 14q) < 6a_1 + 15q + 55$

$a_1^2 + 24a_1 q + 135q^2 - 6a_1 - 15q - 39 > 0$

$a_1^2 + 24a_1 q + 140q^2 - 6a_1 - 15q - 55 < 0$

$140q^2 - 55 < 135q^2 - 39$

$5q^2 < 16$

$q^2 < \frac{16}{5}$

$|q| < \frac{4}{\sqrt{5}}$

$q = 1, -1$

$q = 1$

$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 - 6a_1 + 70 < 0 \\ a_1^2 + 24a_1 - 6a_1 + 81 > 0. \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1 + 9)^2 \geq 0 \\ a_1^2 + 18a + 70 < 0 \end{cases}$

$D = 18^2 - 4 \cdot 70 = 44$

$a_{1,2} = \frac{-18 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -9 \pm \sqrt{11}$

$q = -1$

$\begin{cases} a_1^2 - 24a_1 - 6a_1 + 100 < 0 \\ a_1^2 - 24a_1 - 6a_1 + 111 > 0 \end{cases}$

$a_1^2 - 30a_1 + 100 < 0$

$a_1^2 - 30a_1 + 111 > 0$

$D = 900 - 400 = 500.$

Часть 2

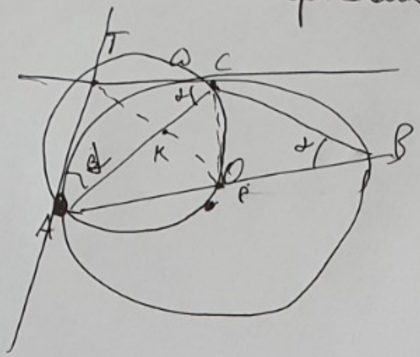
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102683**

ID профиля: **862924**

Вариант 23

Черновик.



$2\log_{a} b$

$\frac{1}{2}\log_{c} a$

$2\log$

Черновик.

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, $\log_{(x+4)^2}(x+34)$, $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

~~$x+34 \cdot 2x+$~~

~~$(2x+23)(x+4) =$~~

~~$= 2x^2 + 31x +$~~

$(x+4)(x+34) =$

$= x^2 + 38x + 4 \cdot 34$

$\log_{\sqrt{a}}(b)$, $\log_{\sqrt{b}}(c)$, $\log_{c^2} a$

$2\log_a b$, $2\log_b c$, $\frac{1}{2}\log_c a$

$b = a + 3c + 1$

~~$\log_{a+3a+1}$~~

1. $\log_b c = \log_a b$

$\frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_a b$

$(\log_a b)^2 = \log_a c = \log_a b + 1$

невозможно

$\log_d e^2$, $\log_e$

~~$\sqrt{b} = d$~~

$\sqrt{b} = e$

$4\log_b c = \log_c a$

$4\log_b c = \frac{\log_b a}{\log_b c}$

$4\log_b c^2 = \log_b a$

$2\log_a b = 2\log_b c + 1$

$\frac{1}{\log_b a} = \log_b c + \frac{1}{2}$

$\log_b a$ ~~...~~ $\log_b c^2$

Черновик

$\frac{1}{2}\log_c a = 3\log_a b + 1$

$\log_c a = 4\log_a b + 1$

$\frac{1}{4\log_a b + 1} = (\log_a b)^2$

$= 4(\log_a b)^3 + (\log_a b)^2 - 1 = 0$

$4x^3 + x^2 - 1 = 0$

$2\log_a b, \ 2\log_b c, \ \frac{1}{2}\log_c a$

$2\log_b c = 2\frac{\log_a c}{\log_a b}$

$2\log_{x+34} 2x+23$

$\frac{1}{2}\log_{-x-4} x+34$

$2\log_{2x+23} -x-4$

$xyz=1$

$x=y$

$z=2x+2$

$2x^2+4x^3-1=0$

$x=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}z=2x+1$

$z=4x+2$

$x_y = \frac{1}{2x}$

$yzx=1$

1. $y=x$ $\quad \frac{1}{2}z=x+1$

$z=2x+2$

$(2x+2)x^2=1$

$2x^3+2x^2-1=0$

$4x^3+2x^2-1 \quad (x-\frac{1}{2})$

$4x^2-1 \quad 4x^2+4x+2=$

$2x-1$

$=2(x-\frac{1}{2})(2x^2+2x+1)$

$x=\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}$

$z=3$

$x \geq -34$

$x \geq -11,5$

$c^4=a$

$\sqrt{a}=b$

$\sqrt{b}=c$ $\quad \sqrt{a}=c^2$

$\sqrt{x+34}=2x+23$

$\sqrt{2x+23}=(-x-4)$

$b=a+3c+1$

$c^4+3c+1=c^2$

$c^4+c^2+3c+1=0$

$c=-1$

$2x^2+2x+1$

$c^4+c^2+3c+1 \quad (c+1)$

$-c^3+c^2+3c+1 \quad c^3-c^2+2c+1$

$2c^2+3c+1$

c^3-c^2+2c+1

3.1 $4x=z$

$y=z+1$

2.) $4\cdot y=z$

$x=z+1$

$\frac{z^2}{4}\cdot(z+1)=1$

$z^3+z^2=4$

$z^3+z^2-4=0$

$z=2$

Черновик

2^{16} . 11^{19}

2^{16} , 2^{1} , 2^{x}

11^{19} , 11^{1} , 11^{y}

$6 \cdot 14 + 3+3 = \boxed{6 \cdot 15}$

$\boxed{6 \cdot 18}$

$6 \cdot 16 \cdot 6 \cdot 19 =$

$= 36 \cdot 16 \cdot 19 - 24 =$

$=$

2 2

$(3 \cdot 2 \cdot 2) + (3 \cdot 2 \cdot 2)$

$\cdot 4 = a$

$= c^2$

$+1 = c^2$

$+3c+1=$

$c = -6$

$+3c+1$

$+3c+1$

$3c+1$

$c^3 - c^2 + 2$

$=1$

4.

a

21102393 (U862924 M1299182)

Черновик

$\begin{cases} НОД\ (a,b,c) = 22 \\ НОК\ (a,b,c) = 2^{16} \cdot 11^{19} \end{cases}$

$2^{17} \cdot 11^{20} = a, b, c$

14 и 17.

14 двоек раскидать по 3-м коробкам

и 17 11 по 3-м коробкам.

$C_{17+3-1}^{17} \cdot C_{14+3-1}^{14} =$

$= \frac{\overset{19 \cdot 18 \cdot 9}{\cancel{19!}} \cdot \overset{8\ 16 \cdot 15}{\cancel{16!}}}{\cancel{14!} \cdot \cancel{2!} \cdot \cancel{17!} \cdot \cancel{2!}} =$

$= 120 \cdot 9 \cdot 19 =$

$= 1080 \cdot 19.$

максимальная 16 и 19

минимальная 1

$2^x \cdot 11^y$, $2^a\ 11^b$

1

$2^{16}\ 11^{19}$ $\underbrace{2^1\ 11^1\ 2^x; 11^y}$

$16 \cdot 19$

Черновик.

$2y,\ 2x^{\frac{1}{2}},\ \frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}$

$2x=\frac{1}{2}z$

$4x=z.$

$y=2x+1$

$4x(2x+1)x=1$

$8x^3+4x^2-1=0.$

$2x=\frac{1}{2}z$

$4x=z$

$2y=2x+1.$

$\frac{(2x+1)}{2}4x^2=1$

$8x^3+4x^2-1=0.$

$4x^3+2x^2-1=0$

$xyz=1$

$2x=\frac{1}{2}z.$

$y=2x+1.$

$(2x+1)4x\cdot x=$

$=8x^3+4x^2=1$

$8x^3+4x^2-1=0.$

$x^2(x+1)=1$

$x^3+x^2-1=0$

$x=\frac{1}{2}$

$z=2$

$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 16$

$x=y$

$\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}z=2x+1$

$z=4x+2$ $\quad z=4.$

$(4x+2)x^2=1$

$\frac{1}{4}$

$x^2(x+1)=1$

$x^3+x^2-1=0.$

Чистовик

4) НОД (a, b, c) = 2 · 11

НОК = $2^{16} \cdot 11^{19}$

если
a = $2^{-} \cdot 11^{-}$
b = $2^{-} \cdot 11^{-}$
c = $2^{-} \cdot 11^{-}$

1.) из НОК следует, что одно из мест степеней 2 = 16, а одно для 11 = 19
2.) из НОД следует, что одно 2 = 1, одно для 11 = 1
3.) из НОК и НОД следует, что оставшиеся 2 места от 1 до 16 и от 1 до 19 выне- ~~...~~ (зависимо)

$$\underbrace{3! \cdot 16}_{\text{количество способов расставить степени 2}} \cdot \underbrace{3! \cdot 19}_{\text{количество способов расставить степени 11}} - \overbrace{3 \cdot 2 \cdot 2}^{\text{если 2 числа совпали (3 варианта не могут)}} =$$

3 — пар совпавших; 2 — 11^{19} или 11^{1}; 2 — 2^{16} или 2^{1}

$= 36 \cdot 16 \cdot 19 - 12$

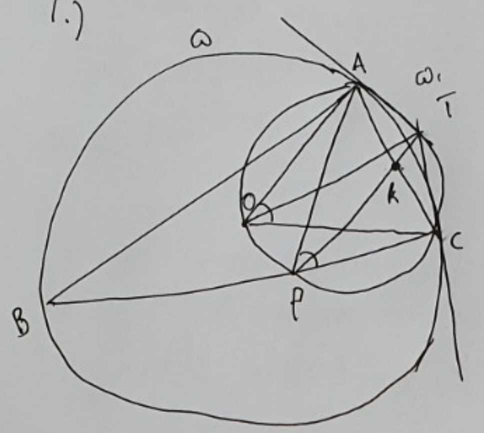
Ответ: 10 932

1

Чистовик

6.)

1.)



O внутри, т.к. ABC-остроуг.

$S_{APK} = 15$

$S_{CPK} = 13 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{15}{13}$

$\angle AOC = \angle APC$

$\angle AOC = 2\angle ABC$

$\angle ABC = \alpha$

$\angle APB = 180° - 2\alpha$

$\angle BAP = (180 - \alpha) - APB = \alpha$

$AP = PB$

$\angle AOT = \angle COT = \alpha$

$\angle OAT = \angle OCT = 90°$ (касат.)

$\angle ATO = \angle CTO = 90 - \alpha$

$\Downarrow$

T прин. ω₁

$\angle APT = \angle COT = \angle AOT \Rightarrow \angle APT = \angle CPT \Rightarrow PK$ - бис.

$\angle AOC = \angle APC$

$\Downarrow$

$\frac{AP}{PC} = \frac{15}{13} = \frac{BP}{PC} \Rightarrow$

$\Rightarrow PK \parallel AB$

$S_{ABC} = S_{PKC} : k^2 = 13 : (13/28)^2 =$

$= \frac{784}{13}$ - Ответ: $S = \frac{784}{13}$

2

1

Чистовик

6.) 2.) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{4}{7}$ $AC - ?$

PH - высота в $\triangle BAP$

$$\frac{PH}{AH} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{PH}{AB} = \frac{4}{14} \quad (APB - p/б)$$

$$PH = 4x \quad S_{APB} = \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 14x = 28x^2$$

$$S_{APB} = S_{ABC} \cdot \frac{15}{28} = \frac{28 \cdot 15}{13}$$

$$28x^2 = \frac{28 \cdot 15}{13}$$

$$x = \sqrt{\frac{15}{13}}$$

$$AP^2 = x^2 + AH^2 = \frac{15}{13} + \left(\sqrt{\frac{15}{13}} \cdot \frac{4}{7}\right)^2 =$$

$$= \frac{15}{13} \cdot \frac{65}{49} = \frac{75}{49}$$

$$\frac{AP}{PC} = \frac{15}{13} \Rightarrow PC = \frac{13}{15} \cdot \frac{\sqrt{75}}{7} =$$

$$= \frac{13}{7\sqrt{3}}$$

$\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$

$tg = \frac{4}{7}$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\sin^2}$$

$$\frac{65}{49} = \frac{1}{\sin^2}$$

~~cos~~

$$\sin = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

$$\cos = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$APC = 2ABC = 2\arccos\frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$AC^2 = PC^2 + AP^2 - 2\cos APC \cdot AP \cdot PC = \frac{169}{3 \cdot 49} + \frac{75}{49} - \frac{66}{65} \cdot \frac{13}{\sqrt{3} \cdot 7} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{7} =$$

$$\cos APC = 2 \cdot \frac{16}{65} - 1 = \frac{33}{65}$$

$$= \frac{87 + 169}{49 \cdot 3} = \frac{256}{49 \cdot 3}$$

Ответ: $AC = \frac{16}{7}\sqrt{3}$

3