Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102622**

ID профиля: **353473**

Вариант 23

Черновик N 1

S - сумма 6 членов; b - разность, $b \in \mathbb{Z}$

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ где $a \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} a_{10} \cdot a_{16} > S + 39 \\ a_{11} \cdot a_{15} < S + 55 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a_1 + 9b)(a_1 + 15b) > S + 39 \\ (a_1 + 10b)(a_1 + 14b) < S + 55 \end{cases}$$

[redacted]

$-4a + 4b$

$(-a+b) : 2$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 8$

$x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 - 8 \le 0$

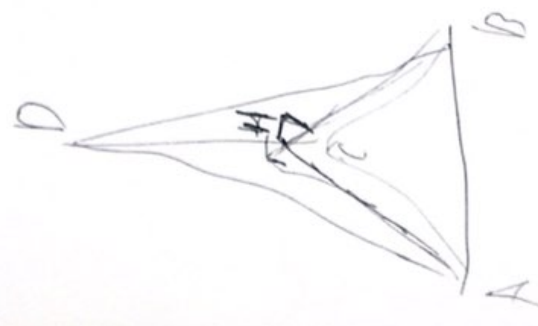
$x^2 - 2xa + y^2 - 2yb - 8 \le -(a^2 + b^2)$

$-x^2 + 2xa - y^2 + 2yb + 8 \ge a^2 + b^2$

$x(x - 2a) + y(y - 2b) \cancel{\ge} 8$

$x^2 - 2xa + y^2 - 2yb - 8 \le -\min(-4a + 4b; 8)$

x



Чистовик N1

Пусть b - разность последовательности, $b \in \mathbb{Z}$.
Тогда заметим, что $a_i = a_1 + (i-1) \cdot b$, а $S = 6a_1 + 15b$

Также получаем, что:

$$\begin{cases} (a_1 + 9b)(a_1 + 15b) > S + 39 \\ (a_1 + 10b)(a_1 + 14b) < S + 55 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + a_1 \cdot 24b + 135b^2 > S + 39 \\ a_1^2 + a_1 \cdot 24b + 140b^2 < S + 55 \end{cases} \Bigg| + 5b^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + a_1 \cdot 24b + 140b^2 > S + 39 + 5b^2 \\ a_1^2 + a_1 \cdot 24b + 140b^2 < S + 55 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad S + 55 > S + 39 + 5b^2$$

$$5b^2 < 16$$

$$\left.\begin{matrix} b^2 < 3{,}1 \\ b > 0 \\ b \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow b = 1$$

Подставим в систему 1 вместо b

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 140 > 6a_1 + 15 + 39 + 5 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 15 + 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \\ a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 9)^2 > 0 \\ \left(a_1 - \frac{-18 \pm \sqrt{44}}{2}\right)\left(a_1 + \frac{-18 - \sqrt{44}}{2}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq 9 \\ a_1 \in (-9 - \sqrt{11}; -9 + \sqrt{11}) \end{cases}$$

№1(продолжение) Чистовик №2

Т.к. $\sqrt{11} > 3$, но < 4, и $a_1 \in Z$, то:

$$\begin{cases} a_1 \neq -9 \\ a_1 = -12; -11; -10; -8; -7; -6 \end{cases}.$$

Ответ: $a_1 = -12$; $a_1 = -11$; $a_1 = -10$; $a_1 = -8$; $a_1 = -7$; $a_1 = -6$.

Чистовик №3

№2

Т.к. $\triangle ACD = \triangle BCD$ (по 3 сторонам), то, если опустить высоты из точек A и B, то их основания совпадут, пусть это будет точка H

Т.к. $CD \parallel$ оси, а $AH \perp CD$ и $BH \perp CD$, то $(AHB) \perp$ оси $\Rightarrow R$ опис. окр. $\triangle AHB = R_{цилиндр.}$

По т. sin: $2R = \frac{AB}{\sin AHB} \Rightarrow R$ наименьший, если $\sin = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow R_{min} = \frac{4}{2 \cdot 1} = 2$ (такой угол $AHB = 90°$ очевидно получится сделать) Тогда $AH^2 + HB^2 = AB^2$

$AH = HB = 2\sqrt{2}$

$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{36 - 8} = \sqrt{24}$

$HD = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{49 - 8} = \sqrt{41}$

$CD = CH + HD = \sqrt{24} + \sqrt{41}$

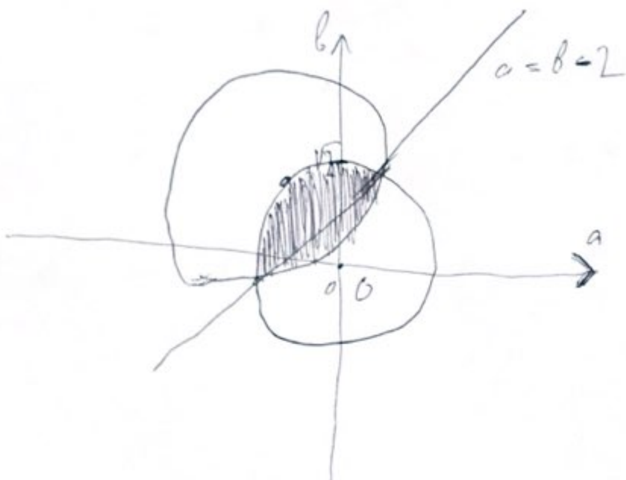
Ответ: $CD = \sqrt{24} + \sqrt{41}$

Чистовик № 4

№3

Рассмотрим сначала $a^2+b^2 \le \min(-4a+4b,8) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \le -4a+4b \\ 8 \ge -4a+4b \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 8 \\ -4a+4b \ge 8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a+2)^2+(b-2)^2 \\ a \ge b+2 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 8 \\ a \le b+2 \end{cases} \end{array}\right.$$



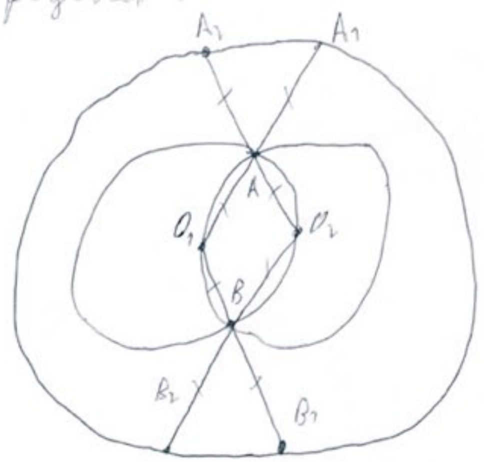
Найдём точки пересечения окружностей $(a+2)^2+(b-2)^2 = a^2+b^2$

$4a - 4b + 8 = 0$

$a = b-2 \Rightarrow a = b-2$ - радикальная ось. Зная этот факт, на графике можно изобразить мн-во точек, которые подходят (это будет пересечение окружностей). Т.к. из первого уравнения следует, что расстояние между $(x;y)$ и $(a;b) \le \sqrt{8}$, то M - множество точек, находящихся на расстоянии $\le \sqrt{8}$ от отмеченных. Осталось посчитать S_M

Чистовик №5

№3 продолжение



$$S_{\text{сект } A_1 O B_1} = \frac{\pi \cdot 32}{3}$$

$$S_{\text{сект } B_2 B B_1} = \frac{\pi \cdot 8}{6} = \frac{\pi \cdot 4}{3}$$

$$S_{O_1 A O_2 B} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 8 = 4\sqrt{3}$$

$$S_M = 2 \cdot S_{\text{сект } A_1 O_1 B_2} + 2 \cdot S_{\text{сект } B_2 B B_1} -$$

$$- S_{O_1 A O_2 B} = \frac{64\pi}{3} + \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3} =$$

$$= 24\pi - 8\sqrt{3}$$

Ответ: $24\pi - 4\sqrt{3}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102622**

ID профиля: **353473**

Вариант 23

Черновик №1

№1

Если НОД $(a;b;c)=22$, то $a=22a_1$, $b=22b_1$, $c=22c_1$

Тогда НОК $(a;b;c)$ = НОК $(22a_1;22b_1;22c_1)=2^{16}\cdot 11^{19}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ НОК $(a_1;b_1;c_1)=2^{15}\cdot 11^{18}$, причем НОД $(a_1;b_1;c_1)=1$

Каждое из чисел a_1, b_1 и c_1 представимо в виде произведения степени двойки на степень 11-ти (видно из НОКа). Тогда посчитаем кол-во вариантов распределения степени двоек и умножим это на кол-во вариантов распред. степеней 11-ти

1) У кого-то степень двойки =15. Для двух оставшихся чисел есть 31 вариант: 1-15) $([1-15];0)$

16-30) $(0;[1\div15])$

31) $(0;0)$

У кого-то из чисел должен быть 0, чтобы НОД был равен 1.

Умножим этот ответ на 3, т.к степень равная 15-ти может быть у любого числа.

Но также отнимем 3, т.к. два раза были посчитаны варианты:

$(0;15;15),(15;0;15),(15;15;0)$

Итого: $(15+15+1)\cdot3-3=90$ $\Rightarrow$

Аналогично: с 11 $(18+18+1)\cdot3-3=108$

Итог ответ: $90\cdot108=9720$

Ответ: 9720

Черновик №2

Перемножим логарифмы:

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)\cdot\log_{(x+4)^2}(x+34)\cdot\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=$

$=\log_{x+34}(2x+23)^2\cdot\log_{(x+4)^2}(x+34)\cdot\log_{2x+23}(x+4)^2=$

$=\dfrac{\log_{(x+4)^2}(2x+23)^2}{\log_{(x+4)^2}x+34}\cdot\log_{(x+4)^2}x+34\cdot\log_{2x+23}(x+4)^2=2$

Тогда, если логарифмы это $a, a, a+1$, то $a\cdot a\cdot a+1=2$

$(a-1)(a^2+2a+2)=0 \Rightarrow a=1$

а) $\log_{\sqrt{x+4}}(2x+23)=1$

$x+34=4x^2+92x+529$

$4x^2+91x+495=0$

$x=-13,75;-9$

$-13,75$ не подходит, т.к тогда $2x+23<0$

Проверим -9:

$\log_{5^2}(25)=1$

$\log_{\sqrt5}(5)=2$ - верно $\Rightarrow -9$ - подходит

Ответ: -9

Черновик N 1

$5+4+5+5+\cancel{7}+\cancel{7}=34$

$\frac{34}{17}=50\%$

$22/34=$

$НОД(a;b;c)=22$

$НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19}$

$a=22m_1 \quad b=22k_1 \quad c=22l_1$

1) $(1;15;0)$

2) $(0;1;15)$

3) $0;8$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 4 \\ 15 \\ +1 \\ \hline 31 \end{array}$$