Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102579**

ID профиля: **85630**

Вариант 23

Чистовик

№1

Поск-ку все a_i целые $a_1 \in \mathbb{Z}$ $d \in \mathbb{Z}$; $\{a_i\}\uparrow \Rightarrow d>0$

$$S=\sum_{i=1}^{6} a_i = 6a_1+15d$$

$$\begin{cases} a_{10}\cdot a_{16} > S+39 \\ a_{11}\cdot a_{15} < S+55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+9d)(a_1+15d) > S+39 \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < S+55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+(24d-6)a_1+(135d^2-15d-39)>0 \\ a_1^2+(24d-6)a_1+(140d^2-15d-55)<0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\left(a_1^2+(24d-6)a_1+(135d^2-15d-39)\right)}_{\vee\ 0}+(5d^2-16)<0$$

(по 1-му нерав.-ву) $\Rightarrow 5d^2-16<0$

$$d^2<\frac{16}{5} \Rightarrow |d|<\frac{4\sqrt5}{5}$$

$d\in\mathbb{Z}$ $d>0 \Rightarrow \underline{d=1}$

$$\begin{cases} a_1^2+18a_1+81>0 \\ a_1^2+18a_1+70<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+9)^2>0 \\ (a_1+9-\sqrt{11})(a_1+9+\sqrt{11})<0 \end{cases}$$

$$D=324-4\cdot70=44$$

$$a_{1,2}=\frac{-18\pm2\sqrt{11}}{2}=-9\pm\sqrt{11}$$

Метод интерв.

$-9-\sqrt{11}$ $-9+\sqrt{11}$ a_1

$$\begin{cases} a_1\in\mathbb{R}\setminus\{-9\} \\ a_1\in(-9-\sqrt{11};-9+\sqrt{11}) \end{cases}$$

$a_1\in\mathbb{Z} \Rightarrow$ поскольку $3<\sqrt{11}<4$

$a_1\in\{-12;-11;-10;-8;-7;-6\}$

Чистовик

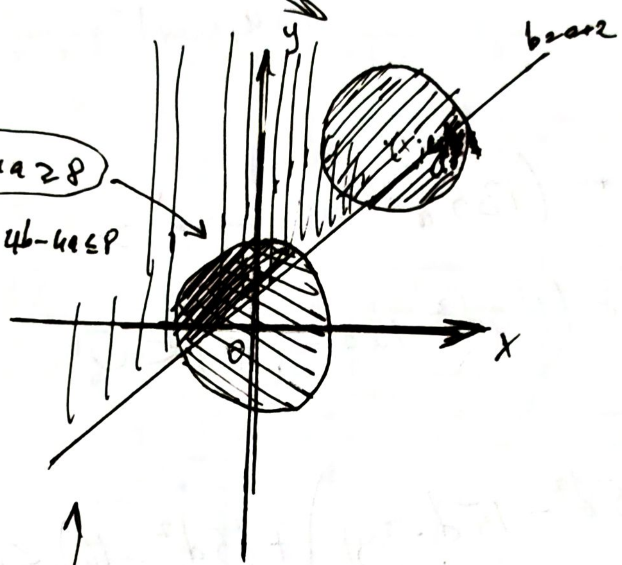
№1 (продолжение)

Ответ: $a_1 \in \{-12; -11; -10; [illegible]; -8; -7; -6\}$

№3

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(4b-4a; 8)\end{cases}$$

← все точки круга с радиусом $2\sqrt{2}$ и центром $(x;y)$



$$\begin{cases}a^2+b^2 \le 8 \quad \text{при } 4b-4a \ge 8 \\ a^2+b^2 \le 4b-4a \quad \text{при } 4b-4a \le 8\end{cases}$$

$a^2+b^2 \le 4b-4a$

$4b-4a \le 8$

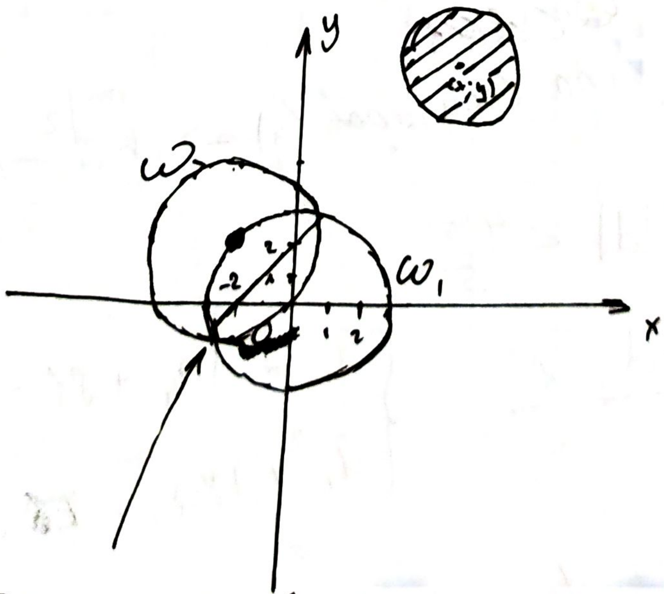
$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$ $\quad b \le a+2$

$4b-4a \ge 8$

$b \ge a+2$

Построим такое мн-во.

Итоговый рисунок для данной системы:



пр-я пересек. ω_1 : $\begin{cases}b=a+2 \\ a^2+b^2=8\end{cases}$

$2a^2+4a+4=8$

$a^2+2a-2=0$

$(a+1)^2-(\sqrt{3})^2=0$

$(a+1-\sqrt{3})(a+1+\sqrt{3})=0$

$\left[\begin{array}{l}a=\sqrt{3}-1 \\ a=-\sqrt{3}-1\end{array}\right.$

Чистовик

№3 (прод)

Пр-е пересек. ω_2: $\begin{cases} b=a+2 \\ (a+2)^2+(b-2)^2=8 \end{cases}$ $2a^2+4a-4=0$ — анал-но =>

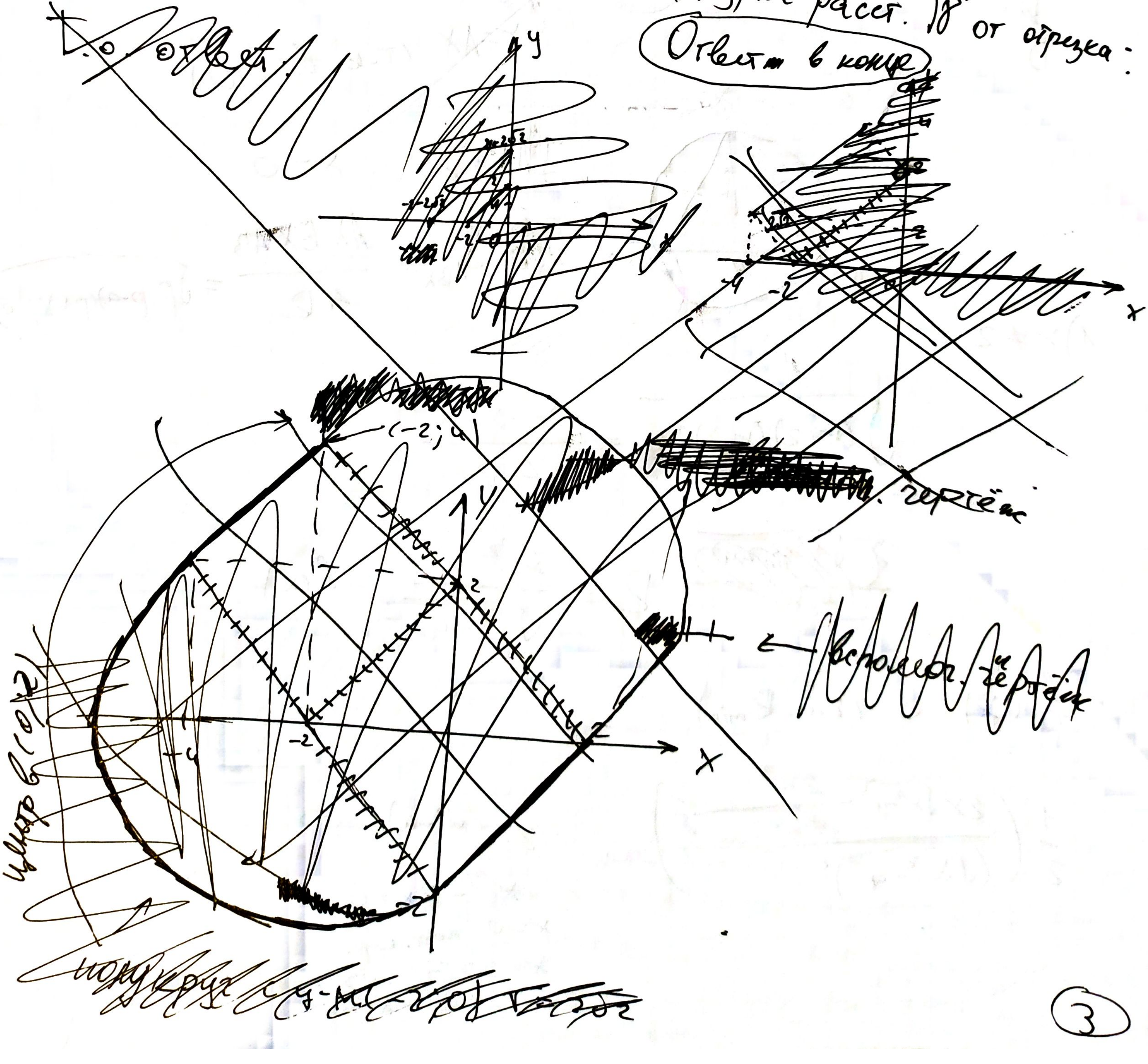
Отрезок на картинке — общ. хорда => 2-е нер-во системы — сам отрезок

Т.к. в одном → (из-за min) случае всё что выше хорды, а в другом наоборот

Тогда в ответ войдут все точки (x, y) на расст. $\sqrt{8}$ от отрезка:

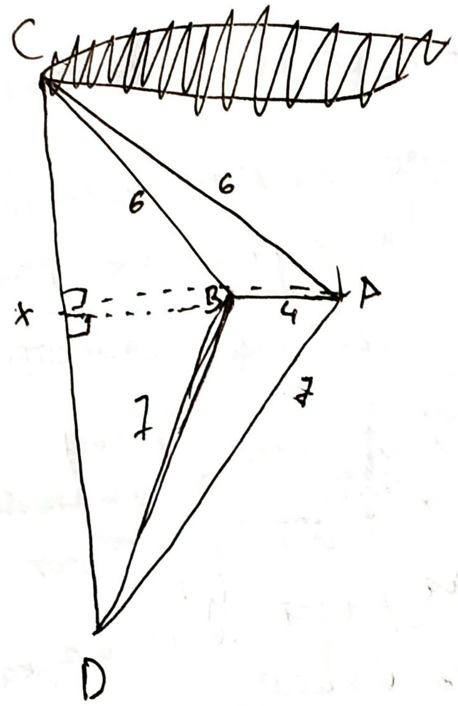
~~Т.о. ответ~~

Ответ в конце



Чистовик

№2



Тэтр. вписан в цил-р в таком полож.

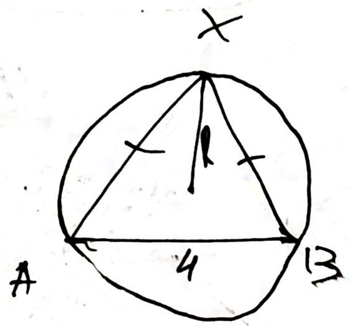
$\Downarrow$

Вписан $\triangle ABX$ (поперечн. сеч.)

$\triangle CBD = \triangle ACD$ (по 3 стор.)

$\Downarrow$

$BX = AX$ (т.к. высоты)



$\exists\, AX = x \qquad x > 0$

$$S_{ABX} = \frac{AX\,BX\,AB}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

1) $x \neq 2$

$$\sqrt{(x+2)(x-2)\cdot 2\cdot 2} = \frac{x\cdot x\cdot 4}{4R}$$

$$R = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-4}} = f(x)$$

$f'(x) = 0$ (т.к. R_{min})

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2x\sqrt{x^2-4} - \frac{2x^3}{2\sqrt{x^2-4}}}{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2}\right) = 0$$

$$2x(x^2-4) - x^3 = 0$$

$$x^3 - 8x = 0$$

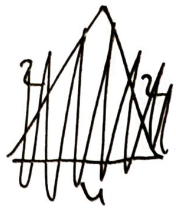
$x = 0$ пост. кор.

$x = \pm 2\sqrt{2} \underset{x>0}{\Rightarrow} x = 2\sqrt{2} \Rightarrow R = 2$

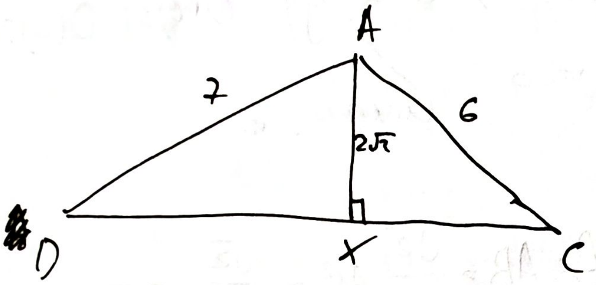
Чистовик

№2 (продолж.)

2) $x=2$ => противореч. нер-ву Δ => невозм-но



Т.О. $x = 2\sqrt{2}$



ΔAXC: th Пифагора: $AC^2 = AX^2 + XC^2$

$36 = 8 + XC^2$

$XC = 2\sqrt{7}$

ΔAXD: аналогично:

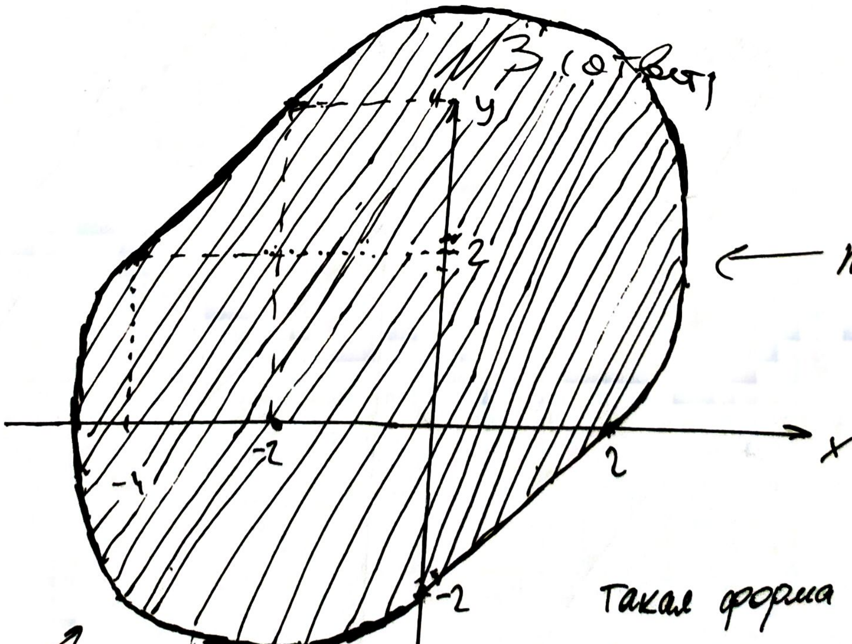
$49 = 8 + XD^2$

$XD = \sqrt{41}$

$DC = 2\sqrt{7} + \sqrt{41}$

Ответ: $2\sqrt{7} + \sqrt{41}$

№3 (ответ)



← полукруг с ц-м $(0;2)$ $r = 2\sqrt{2}$

полукруг с центром $(-2;0)$ $r = 2\sqrt{2}$

Такая форма объясняется тем, что пр-е участки-лока перпенд. на пр-ю попадает на отрезок, а полукруги — расст. до $\leq const$ (крайние точки высчитыв-ся следующим образом:

Чистовик

№3 (продолж.)

Пр-я $y=x+2$ имеет $k = \underbrace{tg\,\alpha}_{\text{угол наклона}} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

Крайний случай => перпенд. попадёт в конец отрезка

Тогда если принять $A(-2;0)$ $B(x;0)$ $C(x;y)$ $O(0;0)$ $D(0;2)$

оч-но, что $x<0$ искомая

$\angle CAB = 180^\circ - \angle CAO - \angle DAC = 45^\circ$

ΔCAB — прямоуг. с $\angle = 45^\circ \Rightarrow \underset{C.y}{CB} = \underset{C.x}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{2} = 2$

нужное расст.

Ост. точки аналог-но

Черновик

$-57+6k$

$0\ 1\ 2\ \ 4\ 5\ 6$

$d>0$ $\quad 6a_1+15d$

$-72+15$

-57

$a_{10}\cdot a_{16} > S+39$

$a_{11}\cdot a_{15} < S+55$

$(k-3)(3+k)$

$k^2-9 > -57+6k$

$$\begin{cases}(a_1+9d)(a_1+15d) > 6a_1+39+15d\\ (a_1+10d)(a_1+14d) < 6a_1+15d+55\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+(24d-6)a_1+(135d^2-15d-39)>0\\ a_1^2+(24d-6)a_1+(140d^2-15d-55)<0\end{cases}$$

$k^2-6k+9>0$

$(k-2)(k+2) < 6k-2$

$(135d^2-15d-39)+(5d^2-16)$

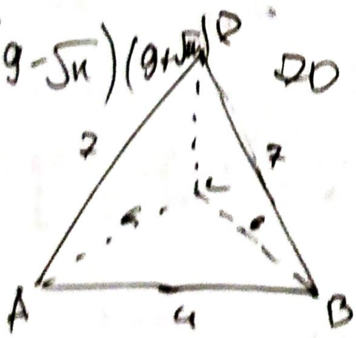
$-5d^2+16$

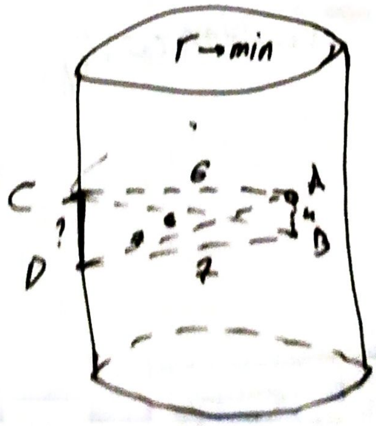
$k^2-6k-2<0$

$-(\sqrt{11}-9)(9+\sqrt{11})$

$d=1$

$(9-\sqrt{11})(9+\sqrt{11})>0$





$CD=?$

$\sqrt{\frac{180}{4}}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

$\frac{1}{2}\sqrt{4(6^2)-4^2}=4\sqrt{2}$

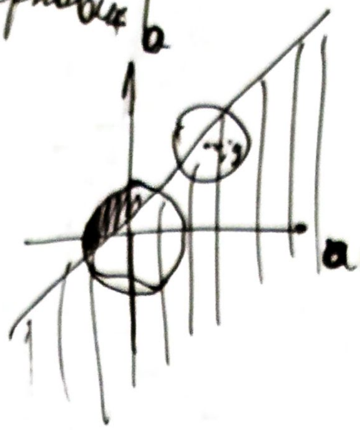
$\frac{1}{2}\sqrt{4(7^2)-4^2}=3\sqrt{5}$

18

$81\cdot 4=324$

Черновик

$$\begin{cases} (b-y)^2+(a-x)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(4a+4b;8) \end{cases}$$



$128 = 2^7 \to 2^{14} = 1024 \cdot 16$

$8192 \cdot 2 = 16384$

$$\frac{h^4 - 256h^2 + 16384}{h^4}$$

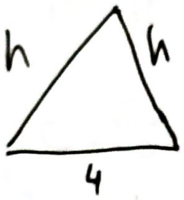
$4b - 4a < 8$

$16 = h\sqrt{2 - 2\cos\alpha}$

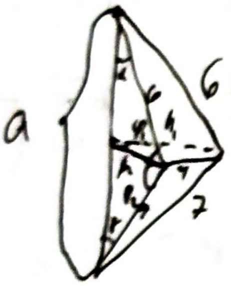
$$\sqrt{\frac{256h^2 - 16384}{h^4}}$$

$b < a+2$

$$\frac{h^2 - 128}{h^2} = \cos\alpha$$



$$\frac{h^2 \sin\alpha}{2} = (h+2)r$$



$h_1 = h$

$$\frac{\sqrt{256h^2 - 16384}}{2h+4} \to \min$$

$$\frac{7}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\beta} = \frac{6}{\sin\gamma}$$

$2\sqrt{(h+2)(h-2)}$

$$\frac{2\sqrt{h^2-4}}{2h+2} \to \min$$

$$\frac{42}{h} = \frac{a}{\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_1} = \frac{a}{\frac{h}{7} \cdot \frac{\sqrt{49-h^2}}{7} + \frac{h}{6} \cdot \frac{\sqrt{36-h^2}}{6}}$$

~~42~~

$$\frac{1}{x} = \frac{0-1}{x^2}$$

$$42 \cdot 49 \cdot 36 = \frac{a}{\sqrt{49-h^2} - \sqrt{36-h^2}}$$

1) $h = 2$

2) $h -$

$$\frac{8\sqrt{h^2-64}}{h+2} \to \min$$

$$8\left(\frac{(h+2)\left(\frac{2h}{\sqrt{h^2-64}}\right) - \sqrt{h^2-64}}{(h+2)^2}\right) = 0$$

$$2\left(\frac{\frac{2h}{2\sqrt{h^2-4}} - \sqrt{h^2-4}}{(h+2)^2}\right) = 0$$

$-(h^2-64) + (2h^2+4h) = 0$

$$\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$h^2 + 4h + 64 = 0$

$-h^2 + h + 4 = 0$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102579**

ID профиля: **85630**

Вариант 23

Чистовик

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=22 \\ НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=22k_1 \\ b=22k_2 \\ c=22k_3 \\ НОД(k_1;k_2;k_3)=1 \\ НОК(k_1;k_2;k_3)=\dfrac{НОК(a;b;c)}{22}=2^{15}\cdot 11^{18} \end{cases}$$

Чтобы числа были взаимнопросты, надо, чтобы одно из них было только 2 (либо только 11), т.к. иначе числа кратные 2, или 11 $\Rightarrow НОД \neq 1$.

Подходит $(11; 2^{15}; 11^{17})$ Рассм. вар-ты без повторений

На каждое „перекидывание" одиннадцати из „c" в „a" будет 15 вариантов перекинуть двойки из „b" в „a" и столько же в „c" + 14 вар-в положить сколько-то двоек в „a", а оставш. в „c"

Таких „перекидываний" 11 — 8 вариантов.

Особый случай: $(11^9; 2^{15}; 11^9)$ 15 вариантов перебросить 2 в „a"

и ещё 7 и в „a", и в „c"

Особый случай: $(1, 2^{15}; 11^{18})$ 15 вар-в перебр. 2 в „c"

7 вар-в перебр. 2 в „a"

перебр. и в „a", и в „c" учтены.

кол-во перест.

Т.о. ответ: $3!\,((15+7)+(15+7)+8(15+15+14)) = \boxed{2376}$

1

Чистовик

№5

$\exists\ a = \sqrt{x+34}$

$b = \sqrt{2x+23}$

$c = |x+4|$

$\{\log_a b;\ \log_c a;\ \log_b c$

(1) (2) (3)

ОДЗ: $\begin{cases} x+4<0 \\ x+34>0 \\ 2x+23>0 \\ x \neq -33 \\ x \neq -34 \\ x \neq -3 \\ x \neq -4 \\ x \neq -5 \\ x \neq -11 \\ x \neq -11.5 \end{cases}$

$x \in (-11.5;\ -4) \setminus \{-11; -5\}$

1) (1) = (2) = (3) − 1

$$2\log_a b = \log_c a$$

$$\frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_b c$$

$$\frac{\log_a c}{\frac{1}{2}\log_c a} = \log_c a + 1$$

$$2(\log_a c)^2 = \frac{1}{\log_a c} + 1$$

$$2(\log_a c)^3 = 1 + \log_a c$$

$\exists\ \log_a c = t$

$$2t^3 - t - 1 = 0$$

$$(t-1)(2t^2+2t+1) = 0$$

$D<0 \Rightarrow$ всегда $>0 \Rightarrow t=1$

Чистовик

№5 (прод.)

$\log_a c = 1$

$a = c$

$\sqrt{x+34} = |x+4|$

$x+34 = x^2+8x+16$

$x^2+7x-18=0$

$D = 49+4\cdot 18 = 121$

$x_{1,2} = \frac{-7\pm 11}{2}$ → $\boxed{-9}$ при подст-ке подошло

→ 2 вне одз

2) (1) = (3) = (2) − 1

$2\log_a b = \log_b c$

$\frac{\log_b a}{\log_b c} = \log_c a$

$\frac{\log_b a}{2\log_a b} = 2\log_a b + 1$

$\frac{1}{2(\log_a b)^2} = 2\log_a b + 1$

$1 = 4\log_a^3 b + 2\log_a^2 b$

] $\log_a b = t$

$4t^3 + 2t^2 - 1 = 0$

$(t-\frac{1}{2})(4t^2 + 4t + 2) = 0$

D<0 => всегда >0

$t = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_a b = \frac{1}{2}$

Чистовик

№5 (прод.)

$\log_b c = 1 \quad b = c$

$\sqrt{2x+23} = -x-4$

$x^2+8x+16 = 2x+23$

$x^2+6x-7=0$

$(x-1)(x+7)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-7 \end{array}\right.$ пост. к.

при подст-ке не подошло

3) (2) = (3) = (1) − 1

$\log_c a = \log_b c$

$\dfrac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b$

$\dfrac{2}{\log_c^2 a} = \log_c a + 1$

$2 = \log_c^3 a + \log_c^2 a$

$\exists \log_c a = t$

$t^3+t^2-2=0$

$(t-1)(t^2+2t+2)=0$

$D<0 \Rightarrow$ всегда >0

$t=1$

$\log_c a = 1$

$a = c \leftarrow$ уже было ~~~~ при подст. не подошло

Ответ: −9

Черновик

-7

$\frac{4}{3}$ $\frac{3}{2}$

$\frac{5}{2}$

$a = 22k_1$

$b = 22k_2$

$c = 22k_3$

4^{32}

$\sqrt{27}^{9}$

$22k_1k_2k_3 = 22 \cdot 2^{15} \cdot 11^{18}$

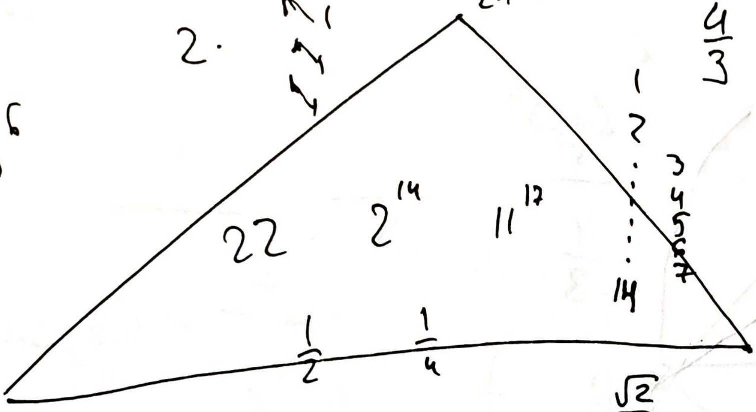
$3\sqrt{3}^{9}$

3^6

$2 \cdot$

$27^2 =$

$\frac{4}{3}$



2^{15} 11^{18}

27^4
27
539
54
729
2^{15}
11

11^9 2^{15} 11^9

$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^3$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{32}$

$\frac{8}{64} + \frac{2}{4} - 1$

$x^3 + 2x - 1 = 0$

$\frac{8}{2\sqrt{2}} + \ldots - 1$

$3\sqrt{2} - 1$

$2\left(\log_{x+34}(2x+23)\right)^{-\frac{3}{8}}$

$\frac{1}{2}\log_{x+4}(x+34)$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$

$\log_{(x+4)^2}(x+34)$

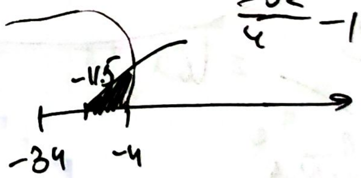
$\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{3\sqrt{2}}{4} - 1$

$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$

$2x^3 + x - 1$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-1(x+4))$



$\begin{cases} x+4 < 0 \\ x+34 > 0 \\ 2x+23 > 0 \\ x \neq -33 \quad x \neq -34 \\ x \neq -4 \end{cases}$

$x \neq -3$

$x \neq -5$

$x \neq -11$

$x \neq -11.5$

$6(44 + 44 \cdot 8) = 54 \cdot 44$

$594 \cdot 4 = 2400 - 24$

$2\log_a b$

$\frac{1}{2}\log_c a$

$\log_b c$

$4\log_a b = \log_c a$

$b^4 = a^{\log_c a}$

$\frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_b c$

$\frac{\log_a c}{\ldots} = \frac{1}{2}\log_c a - 1$

Черновик

$2\log_a b = \log_b c = \log_c a - 1$

$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} = \frac{2}{\log_b c}$

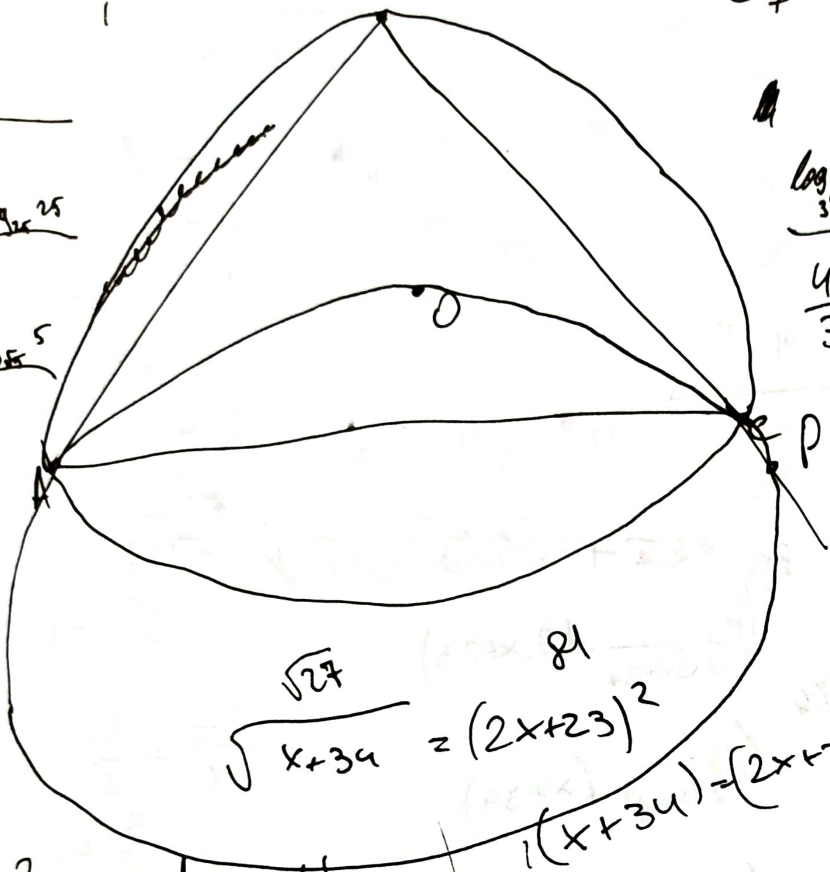
$\sqrt{x+}$

$x+34 = 2x+23$

$x = -11$

-7

$\frac{1}{1} =$



$\frac{}{\log_{25} 25}$

$\frac{}{\log_{\sqrt5} 5}$

$\frac{\log_{3,5} 3^2}{\frac{4}{3}}$

$\frac{1}{}$

$\frac{2}{\log_b^2 c} = \log_b c + 1$

$\frac{1}{2}$

$\log_a b = \frac{1}{2}$

$\sqrt{27}$ 81

$\sqrt{x+34} = (2x+23)^2$

$\sqrt{9}$

$\sqrt{27}$

$(x+34) = (2x+23)^4$

$b = c$

23
23
69
46
529

$\frac{2}{\log_b^2 c} = \log_b c + 1$

$\log_a b = \log_b c / 2$

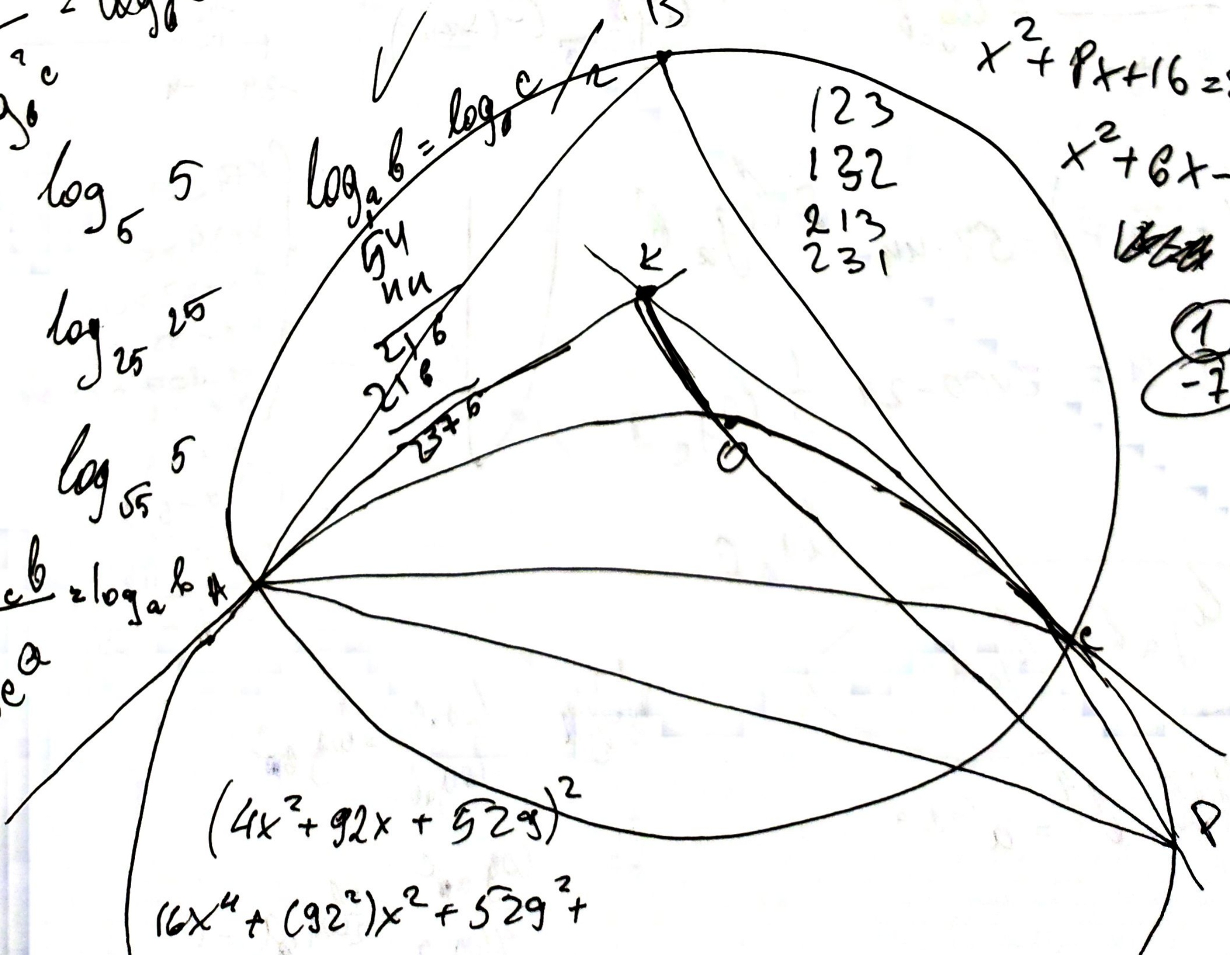
$\log_6 5$

$\log_{25} 25$

$\log_{\sqrt5} 5$

54
44
216
216
2376

$\frac{\log_e b}{\log_e a} = \log_a b$



123
132
213
231

$x^2 + px + 16 = 2x + 23$

$x^2 + 6x - 7 = 0$

1

-7

$(4x^2 + 92x + 529)^2$

$16x^4 + (92^2)x^2 + 529^2 +$