Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102379**

ID профиля: **182383**

Вариант 23

Чистовик

№1 а) $S_6 = \frac{2a_1+5d}{2}6 = 6a_1+15d$ $\qquad d>0$, т.к. возраст.

$a_1 - ?$

$a_{10}\cdot a_{16} = (a_1+9d)(a_1+15d) = a_1^2+135d^2+24a_1d$

$a_{11}\cdot a_{15} = (a_1+10d)(a_1+14d) = a_1^2+140d^2+24a_1d$

$$\begin{cases} a_{10}\cdot a_{16} > S+39 \\ a_{11}\cdot a_{15} < S+55 \\ S = 6a_1+15d \end{cases} \sim \begin{cases} ① \; a_1^2+24a_1d+135d^2 > 6a_1+15d+39 \\ ② \; a_1^2+24a_1d+140d^2 < 6a_1+15d+55 \\ ③ \; S = 6a_1+15d \end{cases}$$

② => $a_1^2+24\cancel{0}a_1d < 6a_1+15d+55-140d^2$ ④

④+① Заменим меньшее на большее

$6a_1+15d+55-5d^2 > a_1^2+24a_1d+135d^2 > 6a_1+15d+39$

$\underbrace{6a_1+15d}+55-5d^2 > \underbrace{6a_1+15d}+39$

$55-5d^2 > 39$

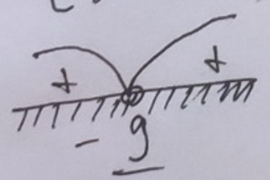
$5d^2 < 16$

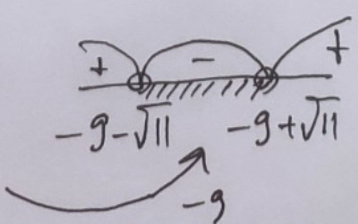
б) т.к. $a \in Z$, то и $d \in Z$ $(d = \overset{Z}{a_2} - \overset{Z}{a_1})$

в) $d^2 < \frac{16}{5}$, $d \in Z$, $d \geq 0$ => $\left[\begin{array}{l} d = 0 \quad \varnothing \text{ [illegible]} \\ d = 1 \end{array}\right.$

$(a_1+9)^2 > 0$

2) $\begin{cases} a_1^2+24a_1+135 > 6a_1+54 \\ a_1+24a_1+140 < 6a_1+70 \\ S = 6a_1+15 \end{cases} \sim \begin{cases} a_1^2+18a_1+81 > 0 \\ a_1^2+18a_1+70 < 0 \\ (a_1+9+\sqrt{11})(a_1+9-\sqrt{11}) < 0 \end{cases}$





Чистовик

д) $a_1 \in (-9-\sqrt{11}; -9) \cup (-9; -9+\sqrt{11})$

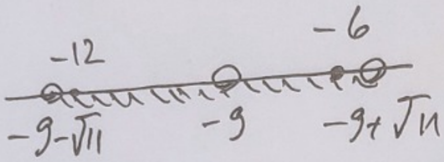
Но нам нужны $\mathbb{Z}$

$\sqrt{11} < 3,2$

$-9+\sqrt{11} < -6+0,2$

$-9-\sqrt{11} < -9-3,2$

$-9-\sqrt{11} < -12-0,2$



Расстояние от 9 до Z корней $< 3,2$

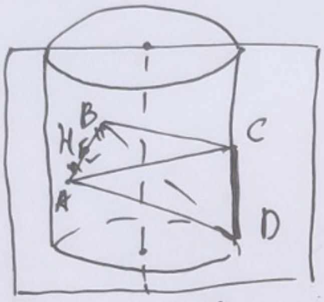
$\Rightarrow a_1 \in [-12; -9) \cup (-9; -6]$ $\mathbb{Z}$

Ответ: $a_1 = -12; -11; -10; -8; -7; -6$

Чистовик

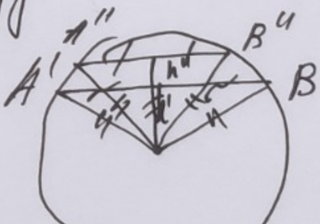
32.

а) Картинка общего случая какая-то такая



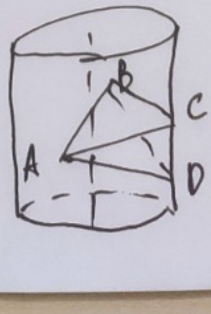
б) Если провести плоскость α через ось цилиндра и CD, то можно заметить, что B будет находится симметрично A относ. α (H лежит на α), т.к. $AB = CB$, $AD = DB$ => $\Delta ADC = \Delta BDC$

в) Проведём плоскость β через точки A и B $\parallel$ плоск. основания цилиндра. Сечением будет являтся окружность с радиусом, равным радиусу цилиндра, а AB будет хордой.



Из-за симметрии h к AB будет делить AB пополам, из Т. Паф => , что R будет min при h_{min}, $h_{min} = 0$, когда AB - диаметр окружности

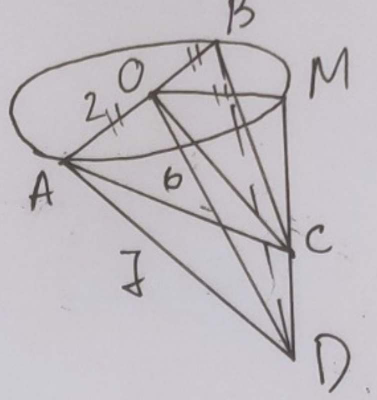
г) При R_{min} такой чертёж



Чистовик

д) AB-диаметр $AB = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \frac{AB}{2} = 2$



е) По ТТП $\triangle OMC$ и $\triangle OMD$, $\triangle AOC$ и $\triangle AOD$ прямоуг.

ж) По т. Пиф.

$OD^2 = 49 - 4 = 45$ $\quad OC^2 = 36 - 4 = 32$

$MD^2 = OD^2 - OM^2 = 41$ $\quad MC^2 = OC^2 - OM^2 = 28$

$MD = \sqrt{41}$ $\quad MC = \sqrt{28}$

з) $CD = |MD - MC| = \sqrt{41} - \sqrt{28}$

Ответ: $CD = \sqrt{41} - \sqrt{28}$

4

21102379 (U182383 M1300749)

Чистовик

3 а) $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8$ – множество заштрихованных окружностей $R = 2\sqrt{2}$ и $O(a;b)$

$a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8)$ – множество центров окружностей

б) Проведём работу со вторым неравенством

i) $a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8)$ $\quad -4a+4b < 8$

$b < 2+a$

$a^2+b^2 \le -4a+4b$

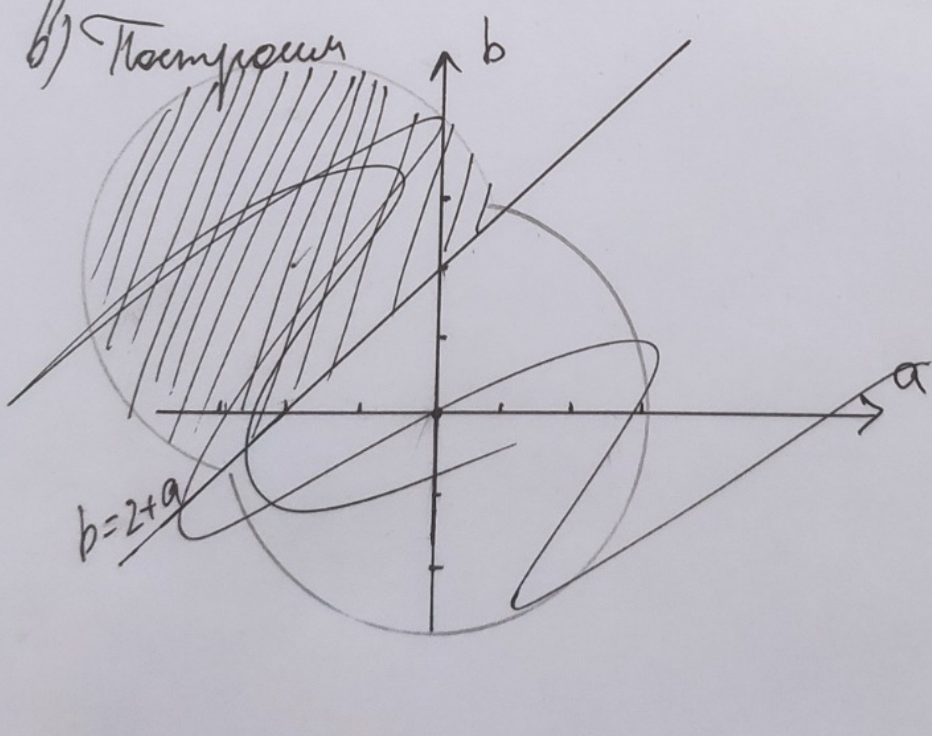
$(a^2+4a+4)+(b^2-4b+4) \le 8$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$

ii) $a^2+b^2 \le 8$ $\quad -4a+4b > 8$

$b > 2+a$

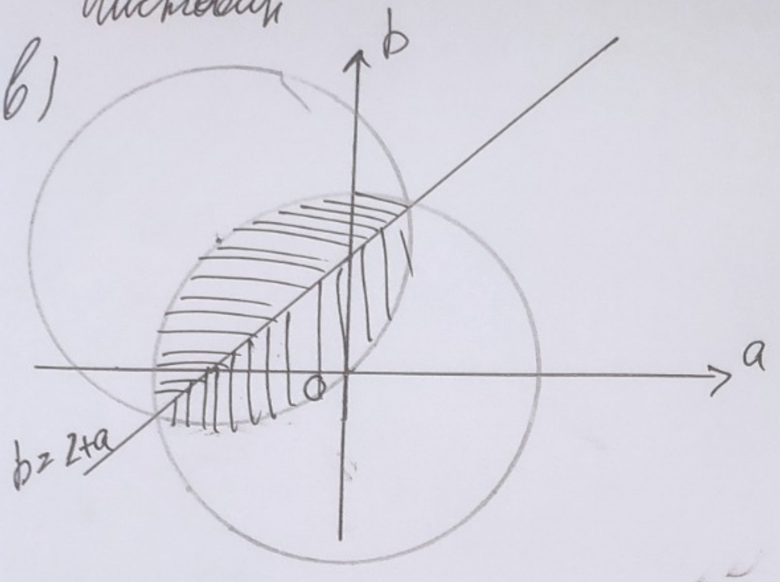
в) Построим



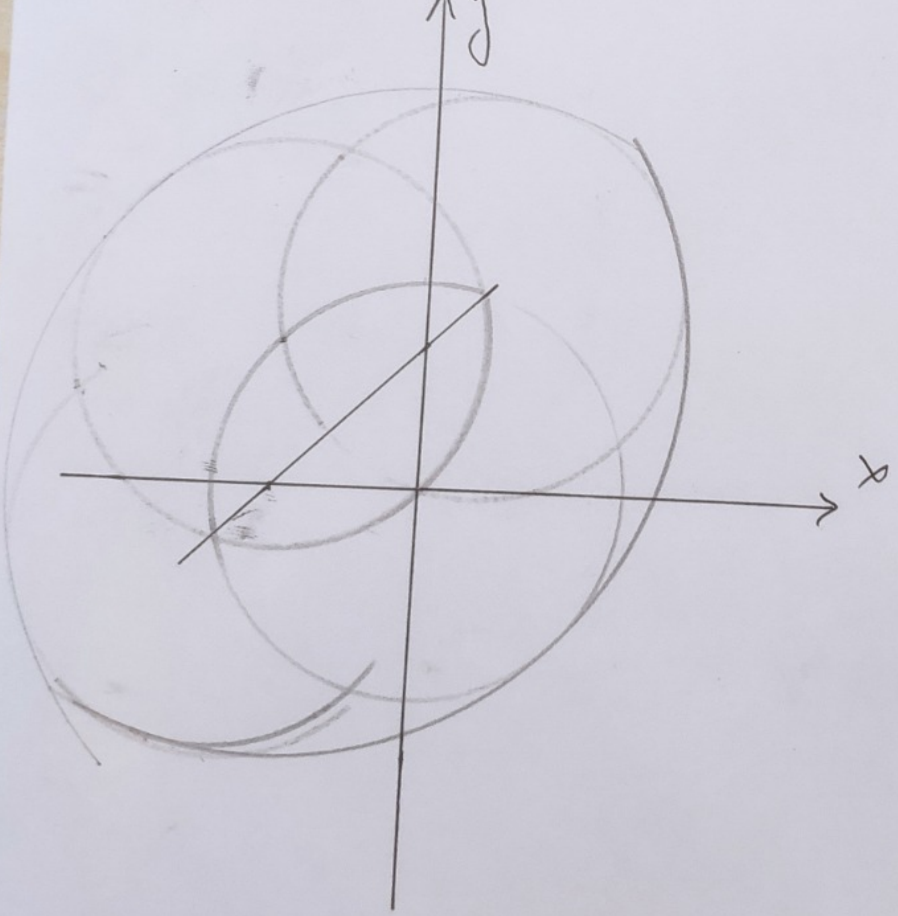
5

Чистовик

в)



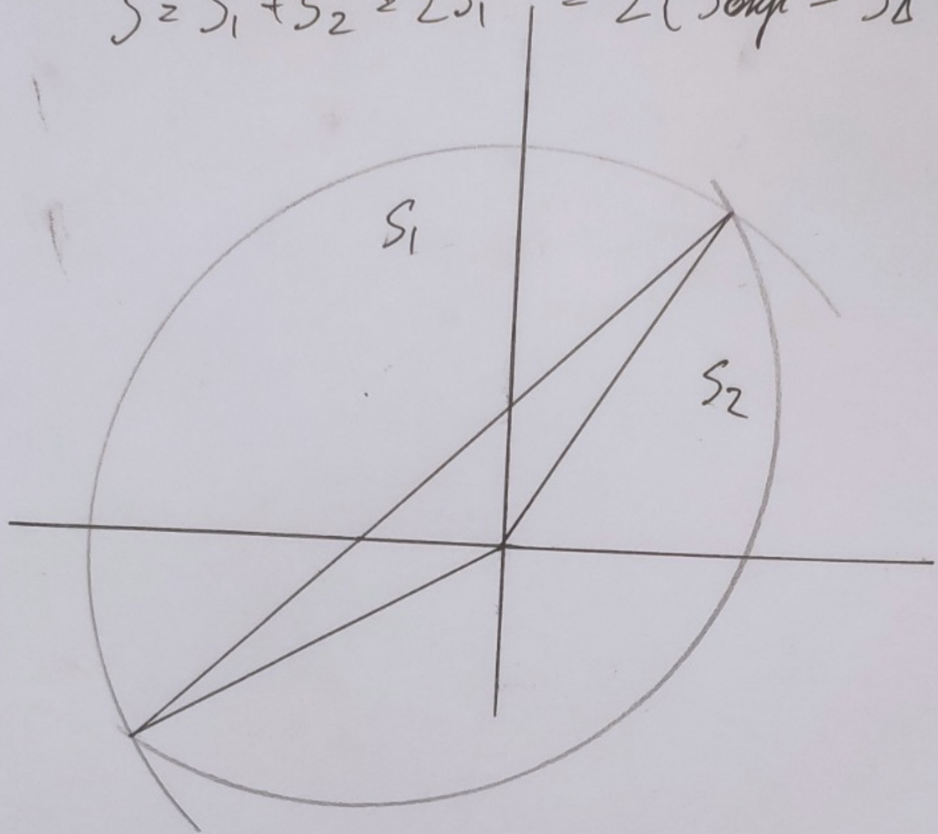
г) Все точки (a;b) являются центрами окр.



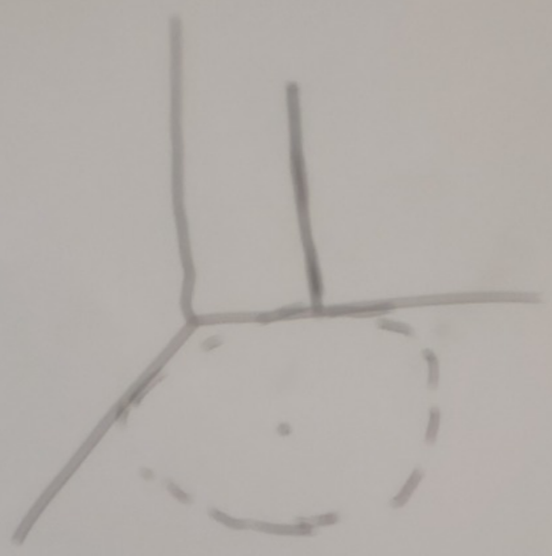
Чистовик

д) Эта фигура равна следующей фигуре

$S = S_1 + S_2 = 2S_1 = 2(S_{окр} - S_{\Delta})$



7



21102379 (U182383 M1300749)

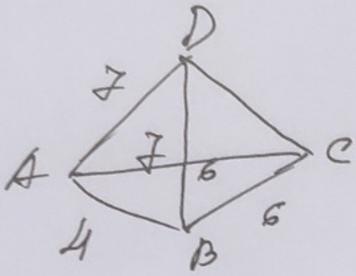
Черновик

$$\begin{array}{r} 39 \\ +\,15 \\ \hline 54 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \\ -\,54 \\ \hline 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \cdot\,18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

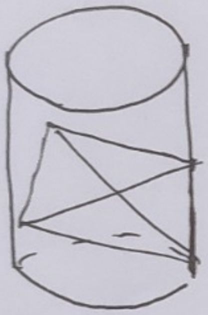
$(a_1+9)^2$



$D = 18^2 - 280$

81

$$\begin{array}{r} 324 \\ -\,280 \\ \hline 44 \end{array}$$



$x^2 + 24x + 140 < 6x + 70$

$x^2 + 18x + 70 < 0$

35

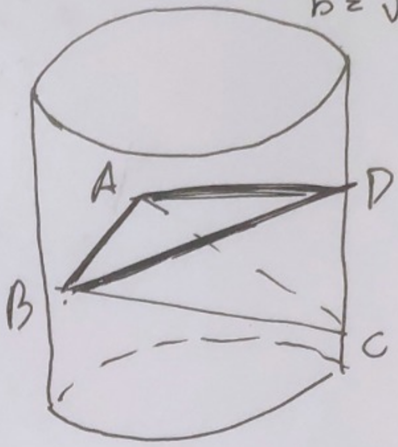
$\dfrac{-18 \pm 2\sqrt{11}}{2}$

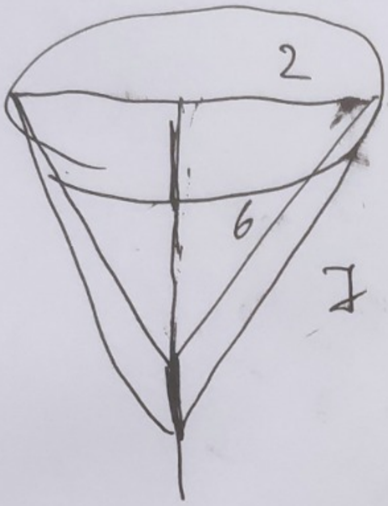
$-9 \pm \sqrt{11}$

$$\begin{array}{r} 3,2 \\ 3,2 \\ \hline 6,4 \\ 96 \\ \hline 10{,}24 \end{array}$$

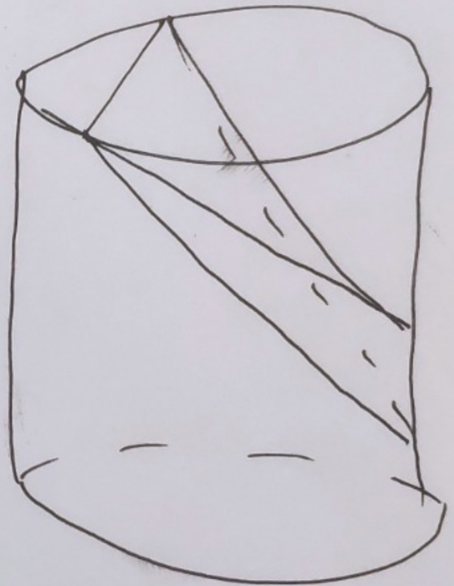
$81 - 162 + 70$

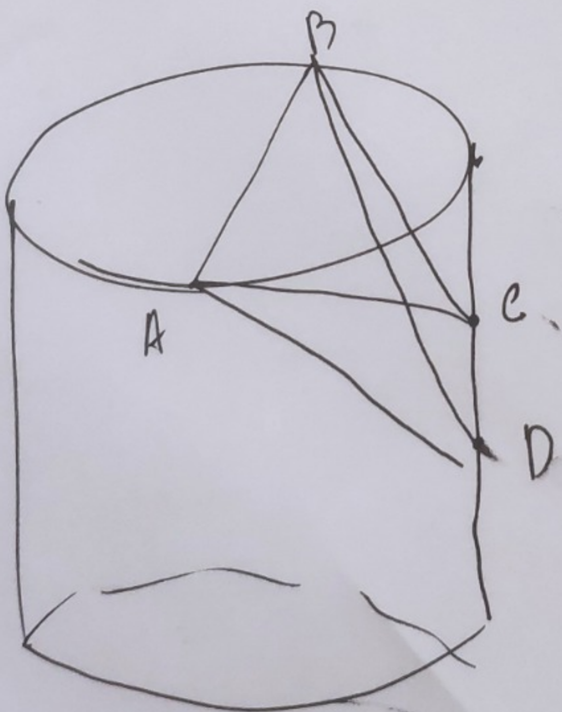
$a = \sqrt{36-4}$
$b = \sqrt{49-4}$

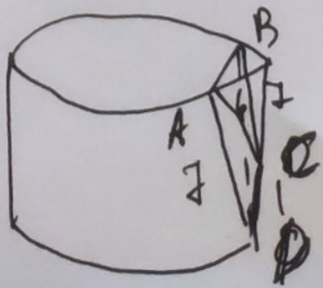


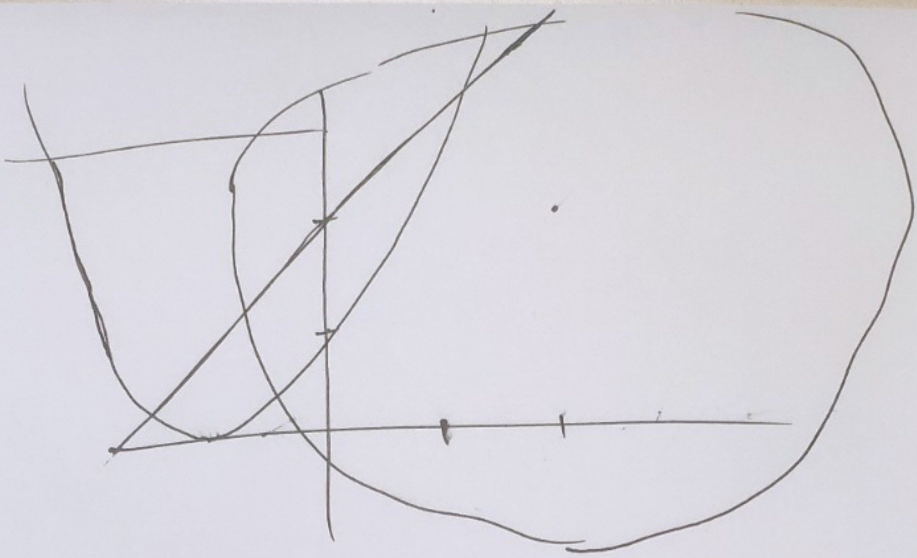


ha

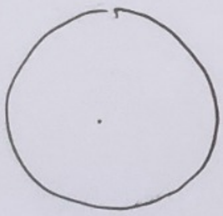




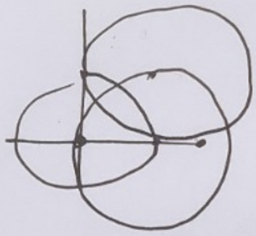




$a^2+b^2 \leq 8$

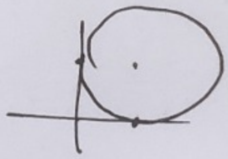


$(x-1)^2+(y-1)^2 \ngeq 1$



$(x-1)^2+(y-1)^2 \geq 1$

A(1,1)



$x^2+y^2 < 1$

Черновик

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8$

$a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8)$

1) $-4a+4b > 8$

$-a+b > 2$ $\quad b > 2+a$

$a^2+4+a^2+4a \le 8$

$2a^2+4a \le 4$

$a^2+2a \le 2$

$(a+1)^2 \le 3$

$a^2+b^2 < \min(-4a+4b; 8)$

$-4a+4b < 8$

$-a+b < 2$ $\quad b < 2+a$

$b < 2+a$

$a^2+b^2 \le -4a+4b$

$(a+2)^2 + (b-2)^2 \le 8$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102379**

ID профиля: **182383**

Вариант 23

Чистовик

3 4 a) $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 2\cdot 11 = 2^{x_2}\cdot 11^{x_{11}} \\ НОК(a;b;c) = 2^{16}\cdot 11^{19} = 2^{y_2}\cdot 11^{y_{11}} \end{cases}$

b) $a = 2^{\alpha_2}\cdot 11^{\alpha_{11}}$ $\qquad \min(\alpha_2, B_2, \gamma_2) = x_2 = 1$

$b = 2^{B_2}\cdot 11^{B_{11}}$ $\qquad \max(\alpha_2, B_2, \gamma_2) = y_2 = 16$

$c = 2^{\gamma_2}\cdot 11^{\gamma_{11}}$ $\qquad \min(\alpha_{11}, B_{11}, \gamma_{11}) = x_{11}$

$\max(\alpha_{11}, B_{11}, \gamma_{11}) = y_{11} = 19$

c) Посчитаем без учёта перестановок

$x = 1 \quad n_2 = 16$

$0 = 1 \quad n_{11} = 19$

~~Пусть~~

	2	11	2	11	2	11	2	11	2	11	2	11	
a	x	x	x	0	x	0	x	x	x	n_2	x	n_{11}	
b	n_2	n_{11}	n_2	n_{11}	n_2	x	n_2	0	n_2	x	n_2	0	
c	0	0	0	x	0	n_{11}	0	n_{11}	0	0	0	x	
?	16·19		16·19		16·19		16·19		16·19		16·19		6·16·19

В тройке у одного числа степень 2 = 0
степень 11 = 0
степень 2 = 16
степень 11 = 19
степень 2 ∈ [1 ; 16]
степень 2 ∈ [1 ; 19]

d) Учтём перестановки

$? = 6\cdot(6\cdot 16\cdot 19)$

Ответ: $? = 6^2\cdot 16\cdot 19 = 10944$

Чистовик

3 5 а) на ОДЗ $x \in (-11{,}5; -5) \cup (-5; -4)$

числа равны

$a = \log_{x+34}(2x+23)^2$, $b = \log_{(x+4)^2}(x+34)$, $c = \log_{2x+23}(x+4)^2$

б) Предположим a и b равны

$$\frac{1}{\log_{(x+34)}(x+4)^2} = \log_{(x+34)}(2x+23)^2$$

$$\log_{(x+34)}(2x+23)^2 \cdot \log_{(x+34)}(x+4)^2 = 1$$

только если $\log_{(x+34)}(2x\ldots)$ и $\log_{x+34}(x+4)^2$ обратные числа, только $(1;1)$ $(-1;-1)$, выполн при $x=-9$ $\in$ ОДЗ

При $x = -9$ $a = \log_{25} 5^2 = 1$

$b = \log_{25} 25 = 1$ подходит

$c = \log_5 25 = 2$

2

21102379 (U182383 M1300750)

Чистовик

в) $x+34=2x+23$ $\qquad$ $x+34=(x+4)^2$ $\qquad$ $(x+4)^2=2x+23$

$x=-9$ $\qquad$ $x^2+7x-18=0$ $\qquad$ $x^2+6x-7=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-9 \\ x=2 \notin \text{ОДЗ} \end{array}\right.$ $\qquad$ $\left[\begin{array}{l} x=1 \notin \text{ОДЗ} \\ x=-7 \end{array}\right.$

При $x=-7$

$$a=\log_{\sqrt{27}} 9=\frac{4}{3}\log_3 3=\frac{4}{3}$$
$$b=\log_9 27=\frac{3}{2}\log_3 3=\frac{3}{2}$$
$$c=\log_3 3=1$$

г) в пункте в) я искал такие x, чтобы у двух из чисел ($a|b|c$) были равные основания и равные значения при одном x. Из системы мы нашли -9 (на всякий случай проверил и -7)

(3.6) Чистовик

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{4}{7} = \alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{7}$ (α - острый)

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{16+49}{49} = \frac{65}{49}$$

$$\cos\alpha = \frac{7\sqrt{65}}{65} \qquad \sin\alpha = \frac{4\sqrt{65}}{65}$$

а) Угол между кас. и хордой равен половине дуги на которую он опирается $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACT = \angle CAT = \alpha$, $\angle AOC = 2\alpha$

Окр. описан. около $\triangle AOC$ и 4-ника $AOCT$ равны (это одна и та же окр.)

(4)

Черновик

2) $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$\frac{1}{\log_{2x+23} x+34} = \log_{2x+23}(-x-4)$

$1 = \log_{2x+23}(-x-4) \log x+34$

log

$\log_{(x+4)^2} x+34 - \log_{\sqrt{x+34}} 2x+23$

$0 = \log_{2x+23}(-x-4) \log_{2x+23}(x+34) - 1$

$t =$

$0 = \log x+34$

21102379 (U182383 M1300750)

з 5. $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, Черновик

$\log_{(x+4)^2}(x+34)$,

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$,

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x+23>0 \\ x+34\neq 1 \\ x+34>0 \\ -x-4>0 \\ (x+4)^2\neq 1 \\ 2x+23\neq 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x>-11{,}5 \\ x\neq -33 \\ x<-4 \\ x\neq -5 \\ x\neq -3 \\ x\neq -11{,}5 \end{cases}$$

1)

$$2\log_{x+34}(2x+23) = \frac{1}{2}\log_{|x+4|}(x+34)$$

$$\log_a c \cdot \log_a b = 1 \qquad \frac{\log_a b}{\log_c a} = 1$$

$$\frac{\log_b c}{\log_b a} \cdot \frac{\log_b b}{\log_b a} = 1 \qquad \cancel{\log_c a = \log_{b} c}$$

-33, $-11{,}5$, -5, -4, -3

$x \in (-11{,}5; -5) \cup (-5; -4)$

$$\log_{x+34}(2x+23)^2 \qquad \log_{(x+4)^2} x+34 \qquad \log_{2x+23}(x+4)^2$$

$$\frac{1}{\log_{2x+23} x+34} \qquad \frac{\log_b c}{\log_b a} = \log_b a$$

$$2x+23 = \frac{1}{(x+4)^2}$$

$$\cancel{\log_{(x+4)^2} x+34 = 1}$$

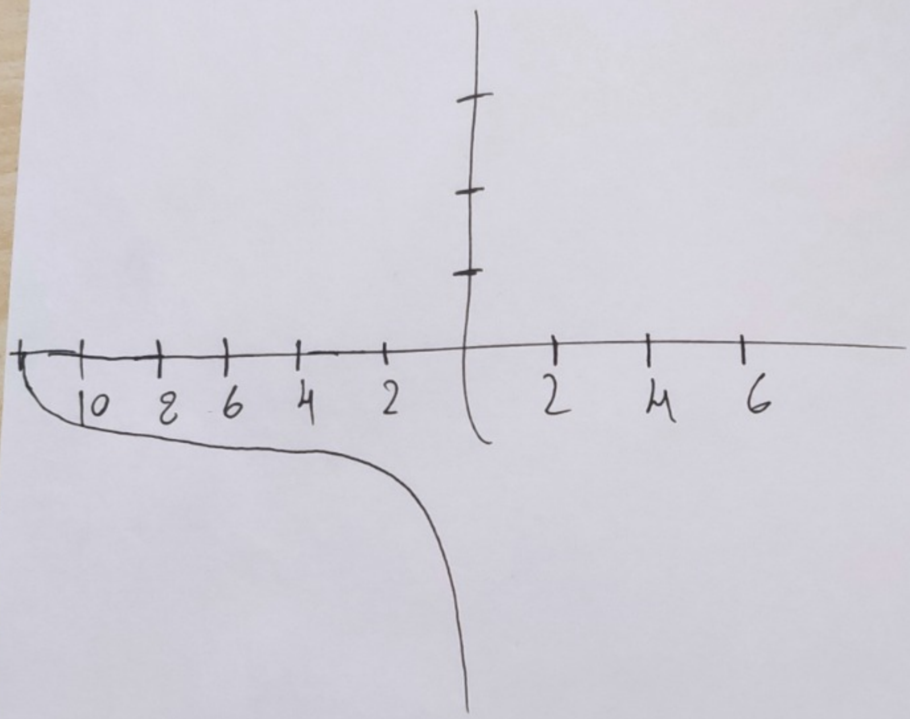
$$\frac{1}{\log_{x+34}(x+4)^2} = \log_{x+34} 2x+23$$

$$1 = \log_{x+34} 2x+23 \cdot \log_{x+34}(x+4)^2$$

21102379 (U182383 M1300750)

Черновик

1) $\log_{\sqrt{x+34}} (2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34)$



з. 5 Черновик

а) $2\log_{x+34}(2x+23) = 2_{2x+23}(-x-4) \quad |:2$

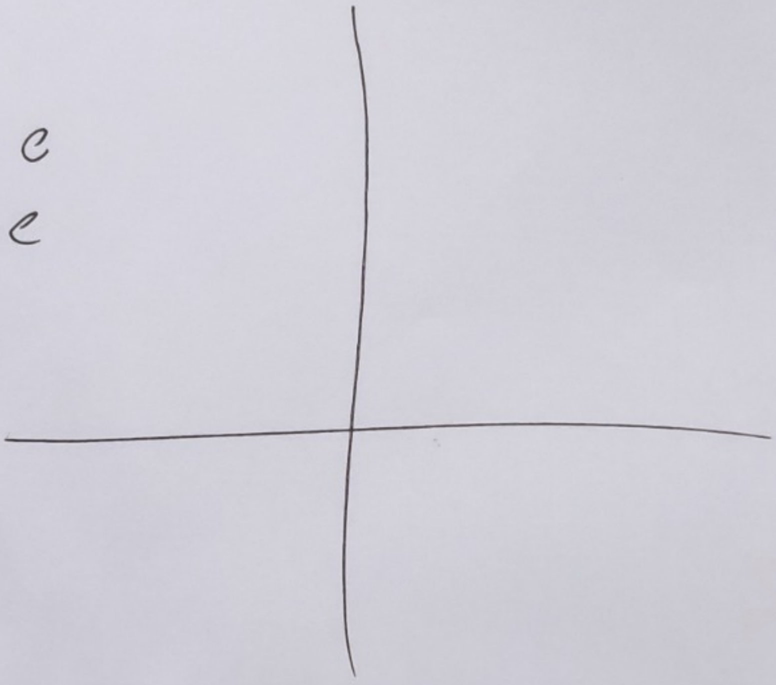
$$\frac{1}{\log_{2x+23} x+34} = \log_{2x+23}(-x-4)$$

$$1 = \log_{2x+23}(-x-4)^{\log_{2x+23}(x+34)}$$

$a = b$

$a + 1 = c$

$b - 11 = c$



4. $НОД(a!b!c) = 22$

$НОК(a!b!c) = 2^{16} \cdot 11^{19}$

Черновик

~~a+b~~ $a = 2^{\alpha_2} \cdot 11^{\alpha_{11}}$

$b = 2^{\beta_2} \cdot 11^{\beta_{11}}$

$c = 2^{\gamma_2} \cdot 11^{\gamma_{11}}$

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \ldots \alpha_{11}, \beta_{11}, \gamma_{11} \geq 1$

16 19

	2	11	2	11	2	11	2	11	2	11	2	11
a	X	X	X	0	X	0	X	X	X		X	
b						X		0		X		0
c	0	0	0	X	0		0		0	0	0	X

0 3 3

2 2 = 36

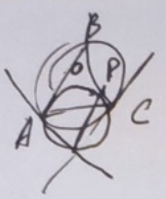
~~abc~~

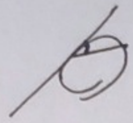
1 2 3 321 312 132 213 231

4 5 6

19
16
114
19
304

304
− 36
1824
9120
10944



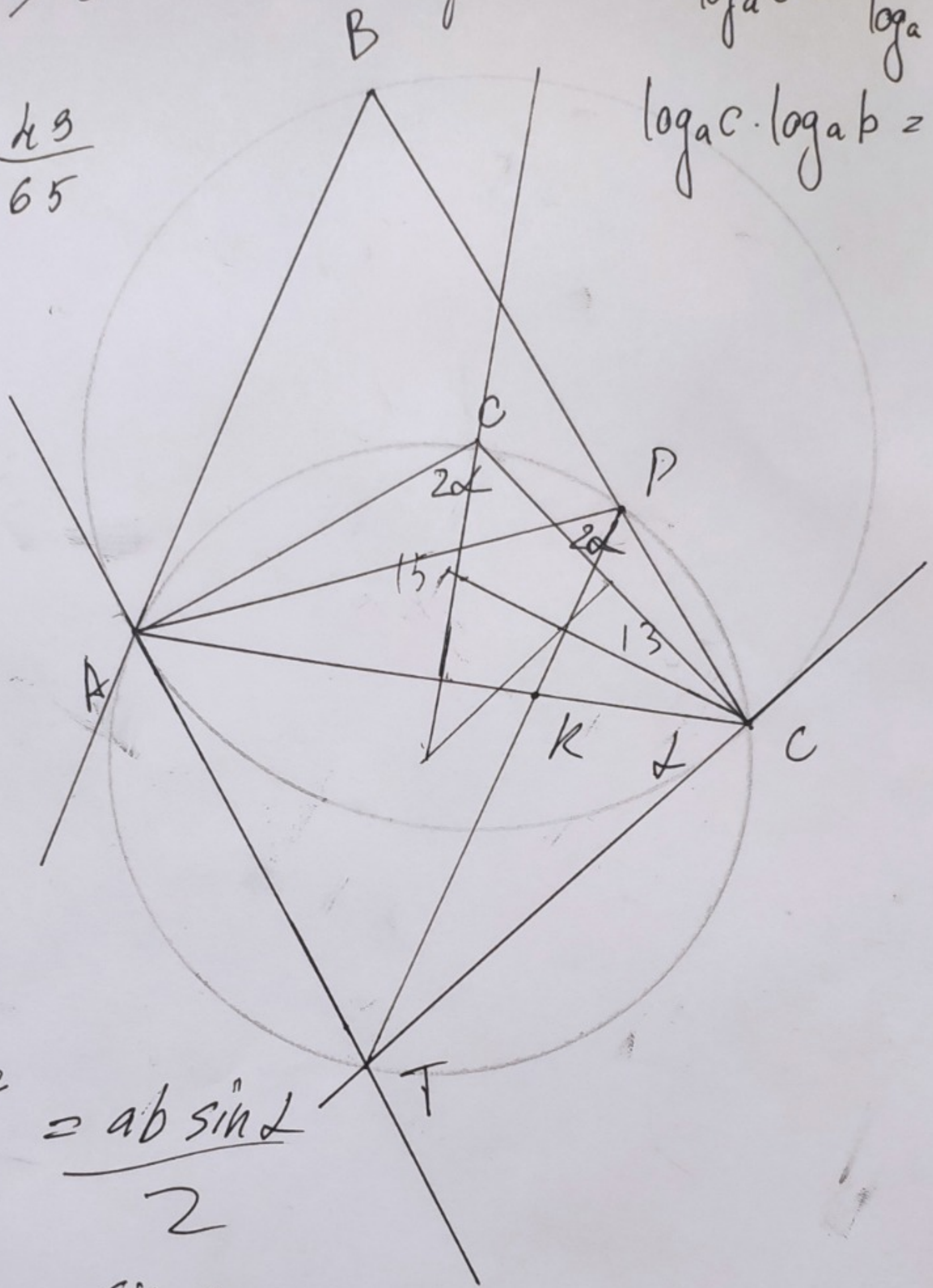


Черновик

$$\log_a c = \frac{1}{\log_a b}$$

$$\log_a c \cdot \log_a b = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{49}{65}$$



$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{ab \sin \alpha}{2}$$

$$c = 2R \cdot \sin \alpha$$

$$tg^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{\sin^2 \alpha + co}{}$$

$$\frac{16}{49} + \frac{49}{49} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$