Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102268**

ID профиля: **359757**

Вариант 23

Чистовик

Задание 2

рассмотрим цилиндр с радиусом 1.

Обозначим высоты от C и D до плоскости с AB через с и d.

по т. Пифагора:

$$\frac{d}{2}+22+\cancel{22}\,22=\frac{AD}{2}=49$$

$$\frac{d}{2}+22+22=3{,}5=49.$$

$$d=41.$$

$$\frac{c}{2}+22+22=\frac{AC}{2}=36$$

$$c=27.$$

Отрезки BC и BD можно отложить в одну из двух сторон и тогда нужно рассматривать два варианта расположения с и d.

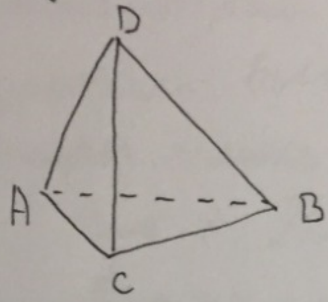
1) $CD=d-c=41-27=14$

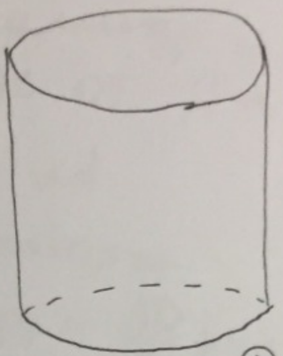
2) $CD=d+c=41+27=68$

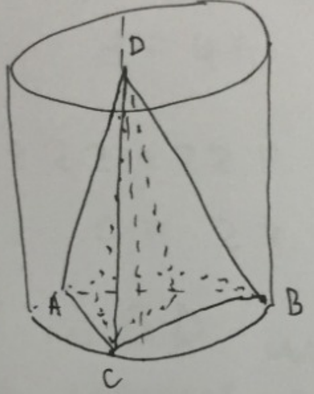
Ответ: 14; 68.

Чистовик

Задание 2







Дано:
$AB = 4$
$AC = CB = 6$
$AD = DB = 7$.

CD - ?

Для начала проведем серединную плоскость к отрезку AB => точки C и D лежат в этой плоскости (дано). Т.к. точки C и D лежат в этой плоскости, то мы можем утверждать, что отрезок CD параллелен оси цилиндра. Отрезок AB перпендикулярен CD, значит AB перпендикулярен оси цилиндра

AB может быть перпендикулярно оси цилиндра только в том случае, если AB параллельно основанию цилиндра.

При проекции AB сохранит свою длину. Половина хорды не превосходит радиус =>

$$r \geq \frac{AB}{2} \Rightarrow r \geq 2$$

Чистовик

Задание 1

Т.к. a_1 - целое число, то
$$\left[\begin{array}{l} a_1 = -12 \\ a_1 = -11 \\ a_1 = -10 \\ a_1 = -8 \\ a_1 = -7 \\ a_1 = -6. \end{array}\right.$$

выпадают, потому что присутствуют только в одном нер-ве.

Ответ: -12; -11; -10; -8; ~~[illegible]~~

Чистовик

Задача 1

Пусть a_1 – первый член арифметической прогрессии, x – разность прогрессии, $x > 0$

$a_1 \dots a_n$, x – целые числа.

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

$$S = 6a_1 + 15x.$$

$$\begin{cases} a_{10} a_{16} > S + 39 \\ a_{11} a_{15} < S + 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 9x)(a_1 + 15x) > S + 39 \\ (a_1 + 10x)(a_1 + 14x) < S + 55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15xa_1 + 9xa_1 + 135x^2 > S + 39 \\ a_1^2 + 14xa_1 + 10xa_1 + 140x^2 < S + 55 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} a_1^2 + 24xa_1 + 135x^2 > S + 39 \\ a_1^2 + 24xa_1 + 140x^2 < S + 55 \end{cases}$$

вычтем из второго нер-ва первое.

$$(S + 55) - (S + 39) > (a_1^2 + 24xa_1 + 140x^2) - (a_1^2 + 24xa_1 + 135x^2)$$

$$16 > 5x^2, \text{ причем } x > 0$$

Значение x, при котором неравенство будет истинным $\Rightarrow$ $\boxed{x = 1}$

подставим x в неравенства:

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 15 + 39 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 15 + 55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 - \sqrt{11} < a < -9 + \sqrt{11} \\ -12 \le a \le -8 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1^2 + 18a_1 + 71 > 0 \\ a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a_1 \in (-9 - \sqrt{11}; -9 \dots) \cup$$

$$\cup (-9 \dots; -9 + \sqrt{11})$$

Черновик.

$$\begin{cases} a_1^2 + 24xa_1 + 135x > S + 39. \\ a_1^2 + 24xa_1 + 140x < S + 55. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24xa_1 + 135x > 6a_1 + 15x + 39 \\ a_1^2 + 24xa_1 + 140x < 6a_1 + 15x + 55. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24xa_1 - 6a_1 + 120x - 39 > 0 \\ a_1^2 + 24xa_1 + 125x - 6a_1 - 55 < 0. \end{cases}$$

$\cancel{a_1^2 + 24xa_1 - 6a_1 + 120}$

$$\begin{cases} a_1^2 - 6a_1 + 24xa_1 + 120x - 39 > 0 \\ a_1^2 - 6a_1 + 24xa_1 + 125x - 55 < 0 \end{cases}$$

$a_1(a_1 - 6) + 24x(a_1 + \ldots) - 39 > 0$

$a_1(a_1 - 6) + 24x(a_1 + \ldots) - 55 < 0.$

$(a_1 + 24x)(a_1 + \ldots) - 39 > 0$ min - минимум.

$(a_1 + 24x)(a_1 - 6)(a_1 + \ldots) - 55 < 0.$

$(x-a)^2 = A^2$

$(y-b)^2 = B^2$

$$\left[\begin{array}{l} a_1 = -24x \\ a_1 = 6. \\ a_1 = -\ldots \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 8. \\ a^2 + b^2 \leq \min(-4a + 4b, 8) \end{cases}$$

S_n - ?

a, b - вещественные

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 8 \\ a^2 + b^2 - \min(-4a + 4b, 8) \leq 0 \end{cases}$$

Черновик.

① $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6.$

$a_{10} a_{16} > S + 39$

$a_{11} a_{15} < S + 55.$

a_1 - ? все возможные значения

$a_{10} \cdot a_{10} + X. > S + 39.$

$a_{10} + X \cdot a_{10} + 5X$ ~~тогда~~ $< S + 55$

$a_{10}(1.1 + x) > S + 39.$

$a_{10}(1 + 1.X + 5x)$

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$

$a_2 = a_1 + X.$

$a_3 = a_1 + 2X.$

$a_4 = a_1 + 3X.$

$a_5 = a_1 + 4X$

$a_6 = a_1 + 5X.$

$S = a_1 + a_1 + X + a_1 + 1X + a_1 + 2X + a_1 + 3X + a_1 + 4X + a_1 + 5X.$

$\boxed{S = 6a_1 + 15X.}$

$a_{10} a_{16} > S + 39$

$(a_1 + 9X) \cdot (a_1 + 15X) > S + 39.$

$a_{11} a_{15} < S + 55.$

$(a_1 + 10X)(a_1 + 14X) < S + 55$

$$\begin{cases} (a_1 + 9x)(a_1 + 15X) > S + 39. \\ (a_1 + 10x)(a_1 + 14x) < S + 55 \end{cases}$$

$a_1^2 + 15xa_1 + 9xa_1 + 135x > S + 39.$

$a_1^2 + 14xa_1 + 10xa_1 + 140x < S + 55.$

15
15) 2
30
30) 4
60
60) 3
120

21102268 (U359757 M1300307)

Черновик.

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + x$

$a_3 = a_1 + 2x$

$a_4 = a_1 + 3x$

$a_5 = a_1 + 4x$

$a_6 = a_1 + 5x$

$a_7 = a_1 + 6x$

$a \in (-12{,}3 ; -12{,}1) \cup (-5{,}8 ; -5{,}6)$

$\min(x; y)$

$a_n = a_1 + (n-1)x.$

$a_1 \ldots a_6$ – целые числа.

$S = a_1 + a_1 + x + a_1 + 2x + a_1 + 3x + a_1 + 4x + a_1 + 5x.$

$S = 6a_1 + 15x$

$\min(-4a + 46,\ 8)$

$$\left.\begin{array}{l} x = -4a + 46 \\ y = 8 \end{array}\right) \min.$$

$$\begin{array}{l} x = 46 - 4a \\ y = 8 \end{array} \iff \begin{array}{l} x = 4(6 - a) \\ y = 8. \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB = 4, \\ AC = CB = 6 \\ AD = DB = 7. \end{array}\right) + \text{тетраэд.}$$

вписан в цилиндр.

все вершины на бок. пов.

CD – ?

$a_{10}\ a_{16} > S + 39.$

$a_{11}\ a_{15} < S + 55.$

a_1 – ?

все возможные.

21102268 (U359757 M1300307)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102268**

ID профиля: **359757**

Вариант 23

Чистовик (9)

Задание 6

Т.к. $S_{\triangle APK} = 15$, а $S_{\triangle CPK} = 13$, то

$\frac{AK}{KC} = \frac{15}{13}$, а $\frac{AP}{PC} = \frac{15}{3}$.

Рассмотрим $\triangle ABP$. Его площадь относится к $S_{\triangle APC}$, как $\frac{15}{13}$. Тогда

$ABP = \frac{15}{13}(15+13) = \frac{28 \cdot 15}{13}$.

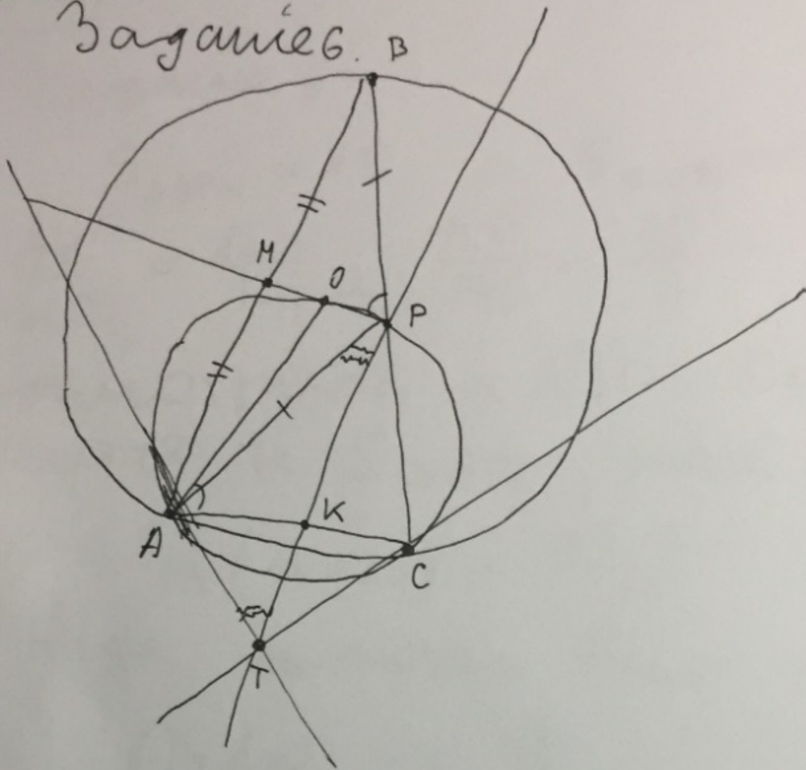
Тогда площадь всего $= 28 \cdot \frac{28}{13}$.

Ответ: $28 \cdot \frac{28}{13}$.

Чистовик

(8)

Задание 6.



Рассмотрим угол AOC. $\angle AOC = \frac{\angle ABC}{2}$

Тогда $\angle OAC = \frac{\angle AOC}{2} = 90° - \angle ABC$. Если окр. AOC пересекает отрезок BC в точках P и C, то $\angle OPB = \angle OAC = 90 - \angle ABC$.

Отсюда следует, что $OP \perp AB$, тогда OP – серединный перпендикуляр, проведенный к AB.

Обозначим M, как середину AB. ($AM = MB$), тогда $AP = BP$.

$$\frac{AP}{PC} = \frac{\sin ATP}{\sin PTC} = \frac{AK}{KC} \; (\triangle ATC - р/б)$$

Получаем, что $\frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC}$

21102268 (U359757 M1300308)

Чистовик

⑦

Задание 5

2) $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=1$

$$2x+23=\sqrt{x+34}$$

$$(2x+23)^2=x+34.$$

$$4x^2+91x+495=0.$$

$$D=91^2-4\cdot4\cdot495=361$$

$$x_{1,2}=\frac{-91\pm19}{8}$$

$$x_1=-\frac{110}{8}$$

$$x_2=-9$$

Проверка:

$$\log_{(x-13-\frac{6}{8})^2}\left(20\tfrac{1}{9}\right)=1$$

видим, что это некорн.

при $x=-9$:

$\log_{\sqrt{34-9}}(2\cancel{8}3-18)=1$ истина.

$\log_{(-9+4)^2}(34-9)=1$ истина.

$\log_{\sqrt{23-18}}(9-4)=2$ истина.

Ответ: -9.

Чистовик) ⑥

Задание 5

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$; $\log_{(x+4)^2}(x+34)$; $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$-x-4>0$
$x+4<0$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = 2\log_{x+34}(2x+23)$

$\log_{(x+4)^2}(x+34) = \frac{1}{2}\log_{-x-4}(x+34)$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = 2\log_{2x+23}(-x-4)$

Пусть $x+34=a$
$2x+23=b$
$-x-4=c$, тогда получим:

$2\log_a b$; $\frac{1}{2}\log_c a$; $2\log_b c$

Рассмотрим их произведение:

$2\log_a b \cdot \frac{1}{2}\log_c a \cdot 2\log_b c = 2$

Пусть 2 числа равны t, а другое $t+1$.

$t \cdot t \cdot (t+1) = 2$.

$t^2 \cdot (t+1) = 2$ $(t-1)(t^2+2t+2)=0$.

$\boxed{t=1}$

$$\left[\begin{aligned} &\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = 1 \\ &\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = 2 \end{aligned}\right.$$

1) $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = 2$

$2x+23 = x+34$ $x+4<0 \Rightarrow x \neq 11$

$x = 11$

21102268 (U359757 M1300308)

Чистовик

Задание 4

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=22 \\ НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=2\cdot 11 \\ НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

Из условия следует, что a, b, c могут делиться только на 2 и 11.

Пусть a делится на 2 в a_1
b делится на 2 в b_1
c на 2 в c_1
(степени вхождения)

Тогда самое маленькое из $a_1; b_1; c_1$ будет 1 ($\min(a_1; b_1; c_1)=1$)
а максимальное - 16 ($\max(a_1; b_1; c_1)=16$)
А третье число может быть любым, которое входит в промежуток от 1 до 16.
Каждый из этих вариантов можно переставить 3! способами, кроме (1;1;16) и (1;16;16). Получается, что всего $16\cdot 3!-3-3=$
$=90$.
Посчитаем степень вхождения 11 таким же способом $19\cdot 3!-3-3=108$.
Выбрав степени вхождения 2 и 11 однозначно восстановим a, b, c $\Rightarrow$ $90\cdot 108=9720$

Ответ: 9720

Черновик.

НОД$(a;b;c) = 22$

НОК$(a;b;c) = 2^{16} \cdot 11^{19}$

НОД - наиб. общ. делитель.

НОК - наим. общ. кратное.

a, b, c. - натуральные числа

$a =$

$b =$

$c =$

чтобы получить НОД 22, должно быть число больше 2 знаков.

22, 44, 66, 88, 110,

$$\begin{array}{r} 88 \\ +\,22 \\ \hline 110 \end{array}$$

$$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34)$$

$$\varnothing$$

$$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log.$$

$$\log_{(x+4)^2}(x+34) = \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$$

$x = -5$

$x = -33$

Черновик

$НОД(a, b, c) = 2 \cdot 11$

$НОК(a, b, c) = 2^{16} \cdot 11^{19}$

простые дел - 2 и 11

$\min(a_1; b_1; c_1) = 1$

$\max(a_1; b_1; c_1) = 16$

$16 \cdot 3! - 3 - 3 = 90$ способов.

$17 \cdot 3! - 3 - 3 = 102$ способа

$90 \cdot 102$

Замени 0,53.

$\sqrt{x+34} > 0$

$\sqrt{x+34} \neq 1$ ~~$X \neq -33$; -34; $-\frac{23}{2}$~~

$2x + 23 > 0$. $\left(-\frac{23}{2}; +\infty\right)$

$(x+4)^2 > 0$

$(x+4)^2 \neq 1$ $x \neq -3$.

Пусть $x + 34 = a$

$2x + 23 = b$

$x + 4 = c$.

$\log_{\sqrt{a}} b$; $\log_{c^2} a$; $\log_{\sqrt{b}}(-c)$