# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102050**

ID профиля: **201411**

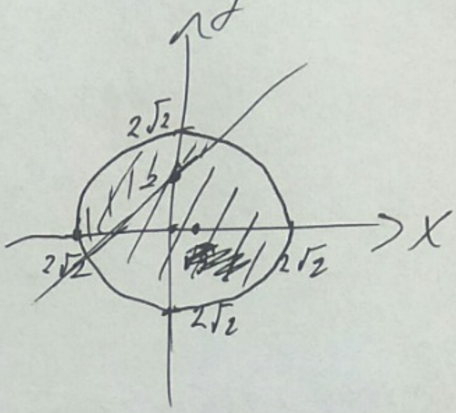
Вариант 23

черновик.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le \min(4b-4a;8)\end{cases}$$

$\underline{I}$: $8\le 4b-4a \Rightarrow b-a\ge 2$ $\quad b\ge 2+a$

$a^2+(2+a)^2\le a^2+b^2\le 8$




$2a^2+4a+4\le 8$

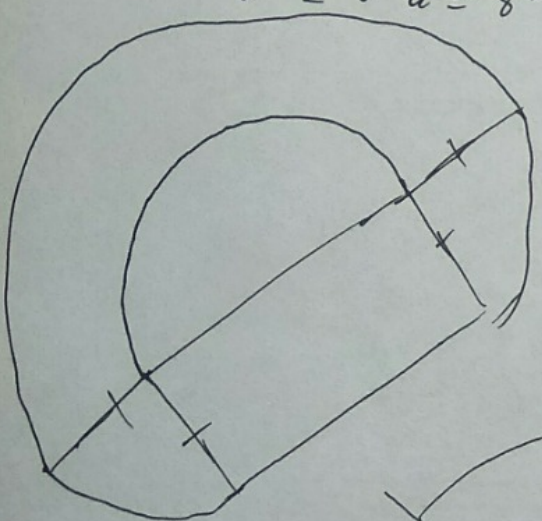
$\cancel{2a^2+2a-2\le 0}$ $\quad \frac{D}{4}=1+2=3$

$a\in[-1-\sqrt3;\sqrt3-1]$ $\quad a=-1\pm\sqrt3$

$b^2\le 8-a^2=8-1-3\pm2\sqrt3=4\pm2\sqrt3$

$16\cdot3=48$

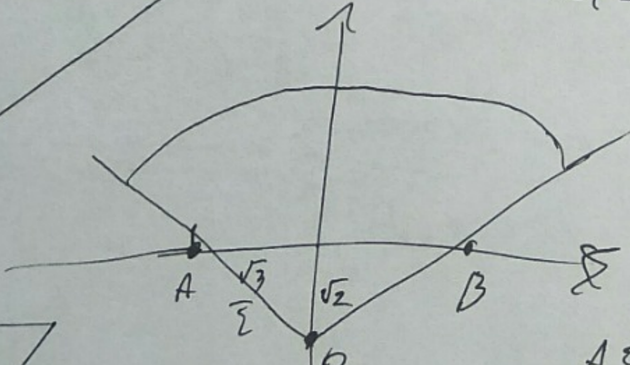
$$\begin{array}{r}+\,48\\ 6\\ \hline 54\end{array}$$

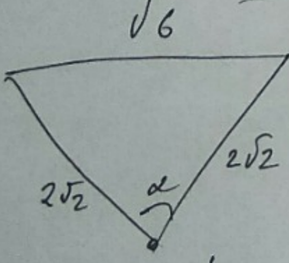


$16\cdot4=64$

$\frac{\sqrt6}{2}-\sqrt2=\sqrt2\left(\frac{\sqrt3}{2}-1\right)$

$2\sqrt2-2=\sqrt2\left(2-\frac{1}{\sqrt2}\right)=$

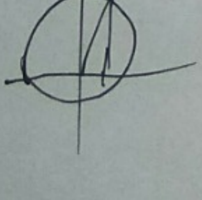



$AO=\sqrt{4+\frac34}=\frac12\sqrt{16+3}=\frac{\sqrt{19}}{2}$

$6=2\cdot4\cdot2-2\cdot4\cdot2\cos\alpha$

$\cos\alpha=1-\frac{3}{2\cdot4\cdot2}=1-\frac38=\frac58$



21102050 (U201411 M1300599)

чистовик

Математика 11кл

23 вариант

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(4b-4a;\ 8)\end{cases}$$

Первое выражение задает круг с центром $(a;b)$ и радиусом $2\sqrt{2}$

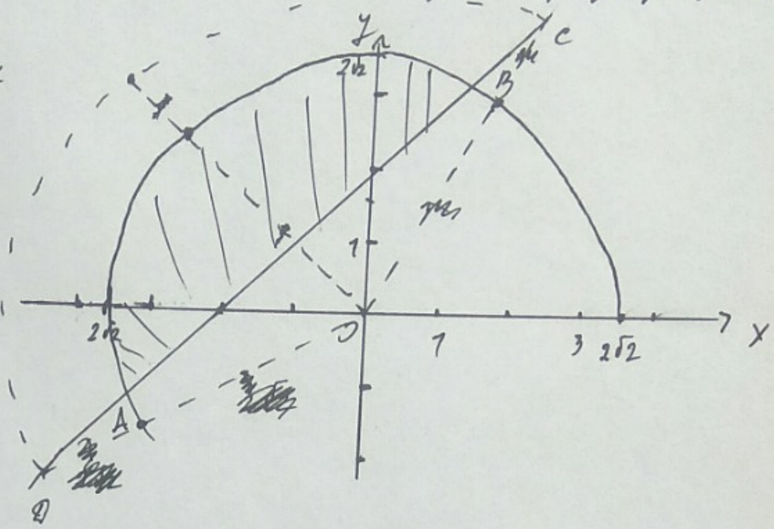
I $8\le 4b-4a \Rightarrow b\geq 2+a$

$a^2+b^2\le 8$

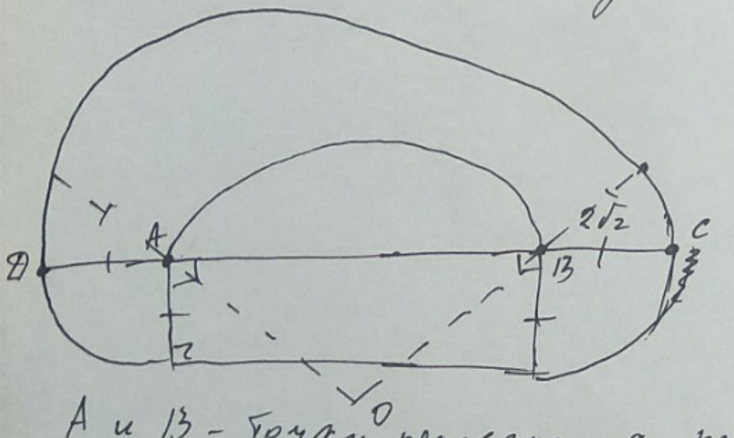
Обозначим точки с коорд. $(a;b)$, которые ~~[illegible]~~ удовлетворяют этим двум условиям

круг ~~[illegible]~~ $x^2+y^2\le 8$

прямая $y=2+x$




фигура, полученная ~~[illegible]~~ построением кругов (1) с центрами в данных точках имеет вид:




сверху: часть круга с радиусом $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ (центр в точке $(0;0)$) два кусочка окр. с рад $2\sqrt{2}$

снизу: две четверти окр. с радиусом $2\sqrt{2}$ и прямоугольник со сторонами $AB$ и $2\sqrt{2}$

A и B - точки пересечения прямой $y=x+2$ и окр. $x^2+y^2=8$

$x^2+(x+2)^2=8 \Rightarrow 2x^2+4x-4=0 \Rightarrow x^2+2x-2=0$ $\quad \frac{D}{4}=1+2=3$

$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{3}$

$y_{1,2}=2+x=1\pm\sqrt{3}$

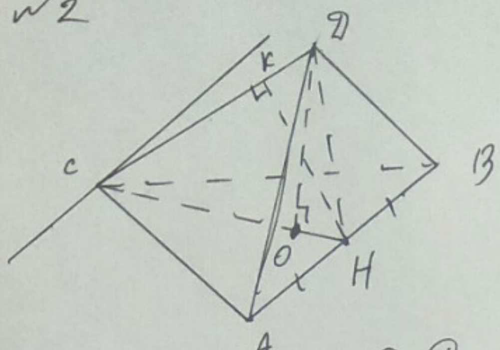
$AB^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=3+3=6 \Rightarrow CD=\sqrt{6}+2\cdot 2\sqrt{3}=\sqrt{6}+4\sqrt{3}$

21102050 (U201411 M1300599)

чистовик Математика 11кл.

23 вариант

№2




CD – общ. сторона
CA = CB
DA = DB

$\Rightarrow \Delta CDA = \Delta CDB \Rightarrow$ по 3 сторонам

$\Rightarrow \angle ACD = \angle BCD \Rightarrow$ перпендикуляр из т. D на грань ABC упадет на бисс. угла $\angle ACB$

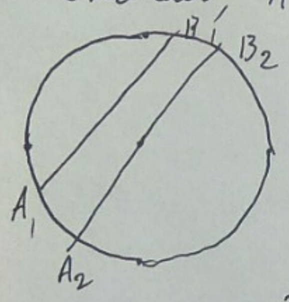
$DO \perp ABC$; $O \in CH$; $AC = CB$, $\angle ACH = \angle BCH$ $\Rightarrow CH \perp AB \Rightarrow CO \perp AB$

$AH = HB = 2$

$DO \perp ABC \Rightarrow CO$ – проекция CD на ABC $\Rightarrow$

$\Rightarrow CD \perp AB$ (по т. о трех перпендикулярах).

Значит, $AB \perp$ оси цилиндра. Если посмотреть на цилиндр сверху, то мы увидим окружность, AB будет ее хордой $\Rightarrow 2R \geq AB$



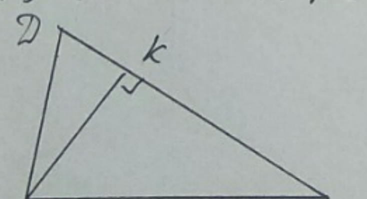

$R_{min} = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Равенство будет выполняться когда AB – диаметр окр. $\Rightarrow$ AB пересекается с осью цилиндра.

$AH = HB \Rightarrow H = AB \cap$ ось цил.

Значит, расстояние между CD и AB будет равно $R = 2$

(на рис. выше) $DH \perp AB$, $CH \perp AB$ $\Rightarrow CDH \perp AB$

проведем $HK \perp CD$; $HK \in CDH \Rightarrow HK \perp AB \Rightarrow$ HK равен расст. между AB и CD $\Rightarrow HK = 2$




$DH \perp AB \Rightarrow DH^2 = DB^2 + HB^2 = 49 + 4 = 53$

$CH \perp AB \Rightarrow CH^2 = AH^2 + AC^2 = 4 + 36 = 40$

$HK^2 = 4$

$DK^2 = HD^2 - HK^2 = 49 \Rightarrow DK = 7$

$KC^2 = HC^2 - HK^2 = 36 \Rightarrow KC = 6$

$DC = DK + KC = 13$

Ответ: $DC = 13$

Чистовик — Математика 11 кл.

23 вариант

№ 1

пусть $a_n = a_1 + (n-1)a$

Прогрессия возрастающая, состоит из целых чисел $\Rightarrow a_1, a \in \mathbb{Z}$, $a > 0$

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_6 = a_1 + a_1 + a + \ldots + a_1 + 5a = 6a_1 + 15a$

$a_{10} \cdot a_{16} = (a_1 + 9a)(a_1 + 15a) > S + 39$

$a_1^2 + 24a_1 a + 135a^2 > 6a_1 + 15a + 39 \quad (1)$

$a_{11} \cdot a_{15} = (a_1 + 10a)(a_1 + 14a) < S + 55$

$a_1^2 + 24a_1 a + 140a^2 < 6a_1 + 15a + 55 \;|\cdot(-1)$

$-a_1^2 - 24a_1 a - 140a^2 > -6a_1 - 15a - 55 \quad (2)$

(1)+(2): $135a^2 - 140a^2 > 39 - 55$

$a^2 < 3{,}2$

$a \in \mathbb{Z},\ a > 0$; $2^2 = 4 > 3{,}2$ $\Rightarrow 0 < a < 2$

$\underline{a = 1}$

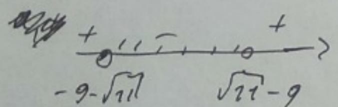
$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 54 & (1) \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 70 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \\ a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0 \end{cases}$$

$(a_1 + 9)^2 > 0$

$a_1 \neq -9$

$a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0 \qquad \frac{D}{4} = 9^2 - 70 = 11$

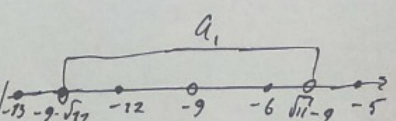
корни: $-9 \pm \sqrt{11}$




$-9 - \sqrt{11} < a_1 < \sqrt{11} - 9$

$\sqrt{9} = 3 < \sqrt{11} < 4 = \sqrt{16} \Rightarrow -13 < -9 - \sqrt{11} < -12$

$-6 < \sqrt{11} - 9 < -5$




$\Rightarrow -12 \le a_1 \le -6$

$a_1 \neq -9$

$a_1 \in \mathbb{Z}$

Ответ: ~~$a_1 \in [-12; -9) \cup (-9; -6]$~~.

$a_1 \in \{-12; -11; -10; -8; -7; -6\}$

Чистовик

Математика 11 кл.

23 вариант

№1

пусть $a_n = a_1 + (n-1)a$

Прогрессия возрастающая, состоит из целых чисел $\Rightarrow a_1, a \in \mathbb{Z}$

$a > 0$

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_6 = a_1 + a_1 + a + \ldots + a_1 + 5a = 6a_1 + 15a$

$a_{10} \cdot a_{16} = (a_1 + 9a)(a_1 + 15a) > S + 39$

$a_1^2 + 24a_1a + 135a^2 > 6a_1 + 15a + 39 \quad (1)$

$a_{11} \cdot a_{15} = (a_1 + 10a)(a_1 + 14a) < S + 55$

$a_1^2 + 24a_1a + 140a^2 < 6a_1 + 15a + 55 \; \mid \cdot(-1)$

$-a_1^2 - 24a_1a - 140a^2 > -6a_1 - 15a - 55 \quad (2)$

$(1)+(2): \quad 135a^2 - 140a^2 > 39 - 55$

$a^2 < 3,2$

$a \in \mathbb{Z},\ a > 0$

$2^2 = 4 > 3,2 \quad \Rightarrow 0 < a < 2$

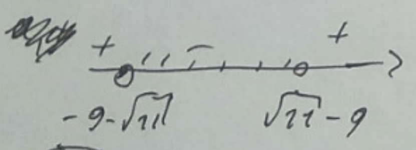
$a = 1$

$$\begin{aligned}(1)&: \begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 54 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 70 \end{cases} \\ (2)&: \end{aligned} \iff \begin{cases} a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \\ a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0 \end{cases}$$

$(a_1 + 9)^2 > 0$

$a_1 \neq -9$

$a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0 \qquad \frac{D}{4} = 9^2 - 70 = 11$

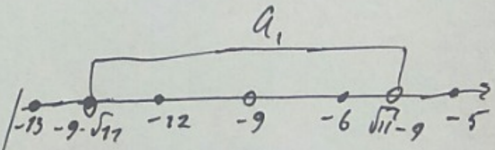



корни: $-9 \pm \sqrt{11}$

$-9-\sqrt{11} < a_1 < \sqrt{11} - 9$

$\sqrt{9} = 3 < \sqrt{11} < 4 = \sqrt{16} \Rightarrow -13 < -9 - \sqrt{11} < -12$

$-6 < \sqrt{11} - 9 < -5$




$\Rightarrow -12 \leq a_1 \leq -6$

$a_1 \neq -9$

$a_1 \in \mathbb{Z}$

Ответ: ~~$a_1 \in [-12; -9) \cup (-9; -6]$~~

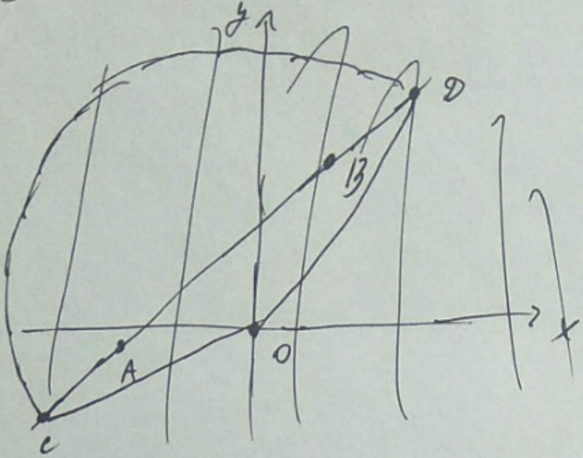
$a_1 \in \{-12; -11; -10; -8; -7; -6\}$

21102050 (U201411 M1300599)

~~чистовик~~ черновик ~~математика~~ гуру

~~№3 (продолжение)~~

23 вариант




$OC = OD = 4\sqrt{2}$

$CD = \sqrt{6} + 4\sqrt{3}$

$\angle COD = \alpha$

по т. косинусов:

$CD^2 = CO^2 + OD^2 - 2CO \cdot OD \cos\alpha$

$6 + 16 \cdot 3 + 24\sqrt{2} = 2 \cdot 16 \cdot 2 - 2 \cdot 16 \cdot 2 \cos\alpha$

$\cos\alpha = 1 - \dfrac{54 + 24\sqrt{2}}{64}$

Черновик

$a_n = a_1 + a(n-1) \quad a_1, a \in Z \quad a > 0$

$S = 6a_1 + a + 2a + 3 + 4 + 5 = 6a_1 + 15a$

$a_{10} a_{16} = (a_1 + 9a)(a_1 + 15a) > S + 39$

$a_1^2 + 24a_1 a + 135a^2 > 6a_1 + 15a + 39$

$a_{11} a_{15} = (a_1 + 10a)(a_1 + 14a) < S + 55$

$a_1^2 + 24a_1 a + 140a^2 < 6a_1 + 15a + 55$

$-a_1^2 - 24a_1 a - 140a^2 > -( \quad )$

$-5a^2 > 39 - 55 = -16$

$a^2 < 3,2$

$2^2 = 4 > 3,2 \Rightarrow \underline{a = 1}$

$\frac{135}{54}$ $\overline{81}$

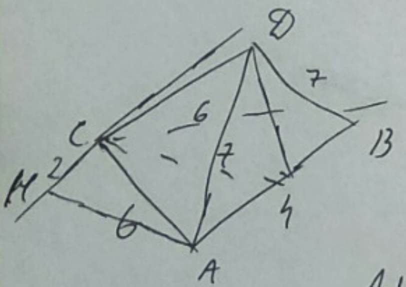
$a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 54$

$a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 70$

$a_1^2 + 18a_1 +$

$\frac{D}{4} = 81 - 70 = 11$

~~$a_1 = -10: S = -60 + 15 = -45$~~

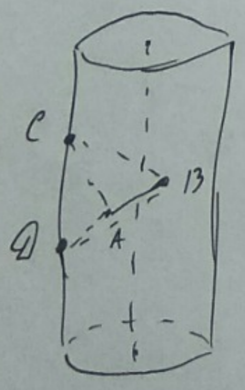



$76 = 2 \cdot 36 - 2 \cdot 36 \cos ACB$

$\cos ACB = 1 - \frac{76 \cdot 2}{2 \cdot 36 \cdot 9} = \frac{7}{9}$

~~Найдём $R = \frac{AB}{2} = 2$, $CD \perp AB$~~

$AH = \sqrt{36-4} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$




21102050 (U201411 M1300599)

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102050**

ID профиля: **201411**

Вариант 23

Черновик

$a = 2^{a_1} 11^{a_2}$ $\quad \max(a_1, b_1, c_1) = 16$

$b = 2^{b_1} 11^{b_2}$ $\quad \min(a_1, b_1, c_1) = 7$

$c = 2^{c_1} 11^{c_2}$ $\quad 16 \cdot 20 - 16 = 320 - 16 = 304$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$ $\quad x+4<0$, $x<-4$ $\quad x > -\frac{23}{2} = -11{,}5$

$\log_{(x+4)^2}(x+34)$ $\quad a = x+34$ $\quad x+34>0$, $x>-34$ $\quad x \neq -5$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-(x+4))$ $\quad b = 2x+23$ $\quad \sqrt{x+34} \neq 1$

$c = (x+4)$ $\quad x+34 \neq 1$ $\quad x \neq -33$

$\cancel{2\log_{x+34}(2x+23)}$

$\frac{1}{2}\log$ $\quad 2x \neq -22$, $x \neq -11$

$2\log_a b$ (1) $\quad$ I: (1) = (2)

$\frac{1}{2}\log_c a$ (2)

$2\log_b c$ (3)

$\cancel{2\log_a b - \frac{1}{2}\log_c a = 0}$

$\cancel{2\log_a b - \frac{1}{2\log_a c} = 0}$

$-\,256$
$\ \ 34$
$222$

$4^3 = 64$

$\cancel{4\log_a b \log_b c = 1 \Rightarrow 0}$

$c \neq 4$ ✓

$\frac{4!}{2\cdot 2} = 3! = 6$

$(\sqrt{x+34} - (x+4)^2)(2x+23-x+34) = 0$

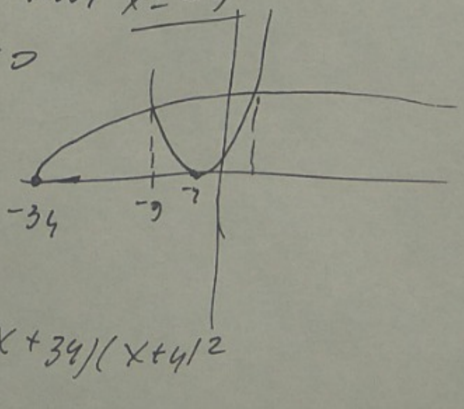
$x^4 + 16x^3 + 96x^2 + 256x + 16^2 = x+34$

$x^3 + 16x^3 + 96x^2 + 255x + 222 = 0$

$x=-9$

$x=-7$: $\sqrt{27}$

$x=-6$: $\sqrt{28}$




$x = -57$

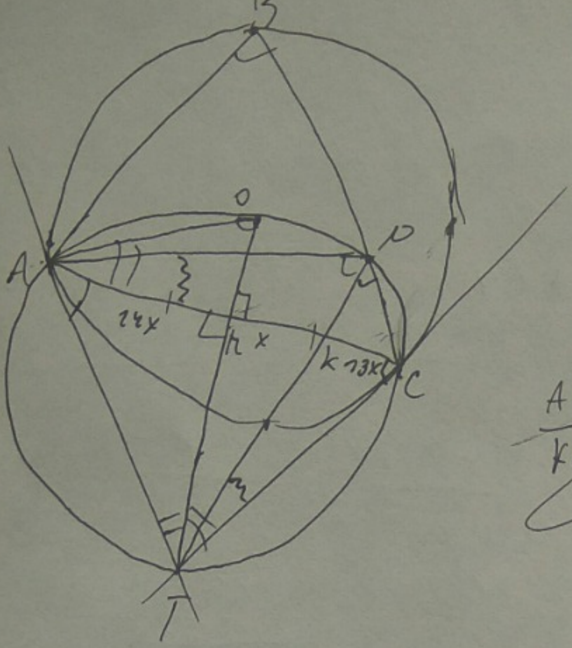
$(x^2+8x+16)^2$

$x^4 + 64x^2 + 16^2 + 16x^3 + 32x^2 + 128x$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = \log_{(x+4)^2}(x+34)(x+4)^2$

21102050 (U201411 M1300600)

Черновик




$S_{APK}=15$

$S_{CPK}=13$

$\Downarrow$

$\frac{AK}{KC}=\frac{15}{13}$

$\cancel{\frac{AK}{KC}=\frac{15}{13}=\frac{TK}{KP}}$

$13TK=15KP$

$TC^2=\cancel{TK\cdot TP=TK(TK+KP)=TK^2+}$

$S_{ABC}-?$

~~∠ATC=A+C-B~~

$\triangle TPC \sim \triangle APC$

$AMT \sim OMA$

$\frac{AM}{OM}=\frac{MT}{AM} \Rightarrow OM\cdot MT=AM\cdot MC$

$a_1\ b_1\ c_1$ $\quad$ $a_2\ b_2\ c_2$

3 2 $\quad$ X $\quad$ 3 2

$\cdot 16$ $\quad$ $\cdot 19$

$3\cdot2\cdot14+$ ~~...~~ $3+3=3\cdot2\cdot15$

$\times\ 18$
$\ \ \ 6$
$108$
$\times\ 90$
$9720$

$\frac{PC}{AP}=\frac{13}{15}$

~~∠AAC=C+A-B~~

~~∠ATC+∠~~

28

Чистовик | Математика, 11 кл.
23 вариант

№4

$НОК(a, b, c) = 2^{16} \cdot 11^{19}$ => числа $a, b, c$ можно представить в виде произведения чисел 2 и 11 в некоторой степени

$a = 2^{a_1} \cdot 11^{a_2}$, $b = 2^{b_1} \cdot 11^{b_2}$, $c = 2^{c_1} \cdot 11^{c_2}$, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in N$

$$\left.\begin{array}{l} НОК(a,b,c) = 2^{16} \cdot 11^{19} \\ НОД(a,b,c) = 2 \cdot 11 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} Макс(a_1, b_1, c_1) = 16 \\ Мин(a_1, b_1, c_1) = 1 \\ Макс(a_2, b_2, c_2) = 19 \\ Мин(a_2, b_2, c_2) = 1 \end{array}$$

Макс и Мин — максимальное и минимальное число из набора. Получается, что из чисел $a_1, b_1, c_1$ два уже заданы, а третье может принимать значения от 1 до 16 (оба включительно). Аналогично, из чисел $b_2, a_2, c_2$ два заданы, а третье принимает значения от 1 до 19.

~~Всего есть 19·16 = 304 способа выбрать эти два числа, значит число троек чисел, удовлетв. системе уравнений равно 304.~~

~~Ответ: 304~~

Выберем числа $a_1, b_1$ и $c_1$. Если неопр. число равно 2, 3, …, 15, то сделать это можно 14·3·2 способами (выбрать одно из чисел 2, 3, …, 15, поставить одно из трех (1, 16 и выбранное) чисел на место $a_1$ и одно из 2 ост. на место $b_1$).

Если неопределенное число равно 1, есть три способа выбрать $a_1, b_1$ и $c_1$ (одно из трех чисел равно 16, два ост. равны 1). Аналогично есть 3 способа выбрать эти числа если неопр. число равно 16.

Значит всего есть $14 \cdot 6 + 3 + 3 = 15 \cdot 6 = 90$ способов выбрать $a_1, b_1, c_1$.

Аналогично число способов выбора $a_2, b_2, c_2$ равно $3 \cdot 2 \cdot 17 + 3 + 3 = 6 \cdot 18 = 108$

Получается, что [illegible] можно выбрать $90 \cdot 108 = 9720$ способами



Ответ: 9720

Чистовик

Математика, 11 кл.
23 вариант

(1) $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$

(2) $\log_{(x+4)^2}(x+34)$

(3) $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$2x+23>0$
$x>-11{,}5$
$x+34>0$
$x>-34$
$-x-4>0$
$x<-4$

$\sqrt{x+34}\neq 1$
$x\neq -33$
$(x+4)^2\neq 1$
$x\neq -3 \quad x\neq -5$
$\sqrt{2x+23}\neq 1$
$x\neq -11$

Ограничения: $\begin{cases} x>-11{,}5 \\ x<-4 \\ x\neq -11 \\ x\neq -5 \end{cases}$

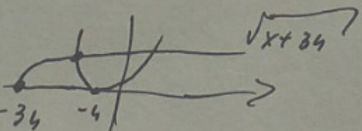
I: (1)=(2)

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)-\log_{(x+4)^2}(x+34)=0$

$\left(\sqrt{x+34}-(x+4)^2\right)(2x+23-x-34)=0$

$x=-11$
(не уд. огр.)

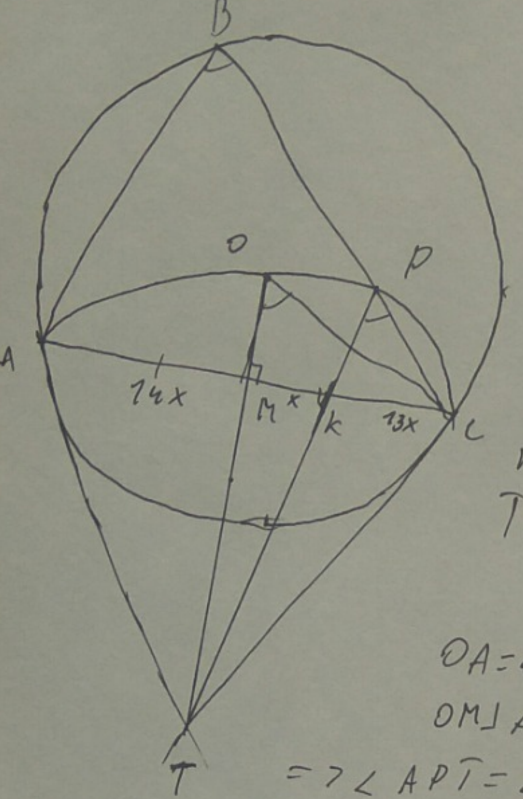
✓ $\sqrt{x+34}=(x+4)^2$
(имеет не больше 2 корней)




$x=-9$: $\sqrt{25}=(4-9)^2$ $\stackrel{?}{=}$

Чистовик Математика, 11 кл

№3 23 вариант




$S_{\Delta APK} = 15$ $S_{\Delta CPK} = 13$

$\angle AOC = \overset{\smile}{AC} = 2\angle ABC$

$\angle ATC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AC}_{больш} - \overset{\smile}{AC}) = \angle BAC + \angle BCA - \angle ABC$

$\angle AOC + \angle ATC = \angle BAC + \angle BCA + \angle ABC = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow AOCT$ - вписанный четырехугольник

O - центр опис. окр $\Delta ABC \Rightarrow O$ - т. пер. серед. перпенд. $\Delta ABC$; $OM \perp AC$; $AM = MC$

$TA$ и $TC$ - кас. к окр. ω $\Rightarrow TA = TC$, $AM = MC$ $\Rightarrow TM \perp AC$, $M \in OT$

$OA = OC$, $OM \perp AC$ $\Rightarrow \angle AOT = \angle COT \Rightarrow \overset{\smile}{AC} = \overset{\smile}{CT} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APT = \angle CPT = \angle COT = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle ABC$

~~∠PAC = ∠PTC (опир. на одну дугу), PC - общ ⇒ ΔAPC = ΔTPC, AC = TC = AT ⇒ ΔAPC - равноб.~~

$\angle CPT = \angle ABC$, $\angle BCA$ - общий $\Rightarrow \Delta CPK \sim \Delta CBA$ по 3 углам.

$\Delta APK$ и $\Delta PKC$ имеют общую высоту из P на AC $\Rightarrow$

$\Rightarrow AK : KC = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{15}{13} \Rightarrow KC : AC = \frac{13}{13+15} = \frac{13}{28}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{PKC}} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = S_{PKC} \cdot \frac{28^2}{13^2} = \frac{28^2}{13}$

(из подобия)

Ответ: а) $S_{\Delta ABC} = \frac{28^2}{13}$