Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102029**

ID профиля: **219116**

Вариант 23

Чистовик

№1

Пусть d — разность арифм. прогрессии.

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$S = \frac{a_1+a_6}{2}\cdot 6 = (2a_1+5d)3 = 6a_1+15d$

$a_{10} = a_{13} - 3d$ $\qquad a_{16} = a_{13} + 3d$

$a_{10}a_{16} = (a_{13}-3d)(a_{13}+3d) = a_{13}^2 - 9d^2$

$a_{11}a_{15} = (a_{13}-2d)(a_{13}+2d) = a_{13}^2 - 4d^2$

$a_{13}^2 - 9d^2 > S + 39 \Rightarrow 9d^2 - a_{13}^2 < -S - 39$

$a_{13}^2 - 4d^2 < S + 55$

$9d^2 - \cancel{a_{13}^2} + \cancel{a_{13}^2} - 4d^2 < \cancel{S} + 55 - \cancel{S} - 39$

$5d^2 < 16$

По условию $d > 0$, т.к. прогрессия возрастающая и $d \in \mathbb{Z}$, т.к. все числа в ней целые

Заметим, что этому неравенству удовлетворяет только один возможный $d = 1$. При $d=2$: $5\cdot 4 = 20 \not< 16$.

Отсюда заново запишем неравенства

$a_{13}^2 - 9 > 6a_1 + 15 + 39$

$a_{13}^2 - 4 < 6a_1 + 15 + 55$.

$a_{13} = a_1 + 12d = a_1 + 12 \Rightarrow a_{13}^2 = a_1^2 + 24a_1 + 144$

$a_1^2 + 24a_1 + 144 - 9 > 6a_1 + 54$ $\qquad a_1^2 + 24a_1 + 144 - 4 < 6a_1 + 70$

$\Updownarrow$

$a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0$ $\qquad a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0$

$(a_1+9)^2 > 0$ $\qquad (a_1+9)^2 < 11$

$\Updownarrow$ $\qquad \Updownarrow$

$a_1 \neq -9$ $\qquad \begin{cases} a_1 + 9 < \sqrt{11} < 4 \\ a_1 + 9 > -\sqrt{11} > -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 < -5 \\ a_1 > -13 \end{cases}$

Отсюда возможные a_1: $-12, -11, -10, -8, -7, -6$

Чистовик

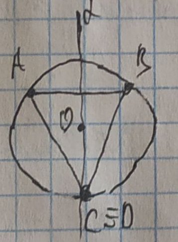
№2.

Заметим, что $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ заданы однозначно, причём они оба равнобедренные с основанием AB.
В таком случае прямая CD должна лежать в плоскости α, такой что $\alpha \perp AB$ и α пересекает AB в середине.
Такая плоскость — это ГМТ ~~которые~~ равноудалённых от A и B

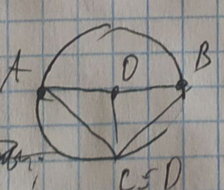
Рассмотрим как должны ~~быть~~ расположены т. A и B на цилиндре

Т.к. CD параллельно оси цилиндра и $CD \subset \alpha$, значит
α тоже параллельно оси цилиндра, либо ось цилиндра принадлежит α.

При этом точки A и B тоже принадлежат цилиндру. ~~Такое~~
Такое α может быть, только если A и B лежат ~~в~~
плоскости перпендикулярной оси цилиндра, т. е. лежат
на окружности.
Цилиндр вид сверху:



~~Отсюда~~
Раз AB хорда, то обязательно $D' \geq AB = 4$ (диаметр цилиндра)
Когда $D = AB = 4 \Rightarrow R = 2$



~~[illegible]~~

Расстояние AC по теореме Пифагора для трёхмерного
пространства $BC = AC = \sqrt{AO^2 + OC^2 + h_C^2}$ $\quad AD = BD = \sqrt{AO^2 + OC^2 + h_D^2}$

здесь h_D и h_C — расстояние от точек D и C соответственно до
плоскости перпендикулярного сечения цилиндра содержащей A и B.
Отсюда $h_C^2 = 36 - 8 = 28 \Rightarrow h_C = \sqrt{28}$ $\quad h_D = \sqrt{41}$, $CD = \left[\begin{array}{l} h_C + h_D \\ h_D - h_C \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} \sqrt{28} + \sqrt{41} \\ \sqrt{41} - \sqrt{28} \end{array}\right.$ два возм. расстояния.

2

Чистовик

№3

$(x-a)^2+(y-b)^2\le 8$ – уравнение окружности с центром в точке (a,b) и радиусом $\sqrt{8}$

a^2+b^2 – квадрат расстояния от центра координат до центра окружности

$$\min(4(b-a);8)=\begin{cases}8, & \text{если } b-a>2\\ 4(b-a), & \text{если } b-a\le 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 8, & \text{если } b-a>2\\ a^2+b^2\le 4(b-a), & \text{если } b-a\le 2\end{cases}$$

$a^2+b^2-4b+4a\le 0$

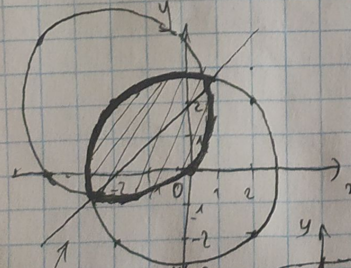
$a^2+2\cdot 2a+4+b^2-2\cdot 2\cdot b+4-8\le 0$

$(a+2)^2+(b-2)^2\le 8$

$\Downarrow$

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 8 & \text{если } b-a>2\\ (a+2)^2+(b-2)^2\le 8, & \text{если } b-a\le 2\end{cases}$$

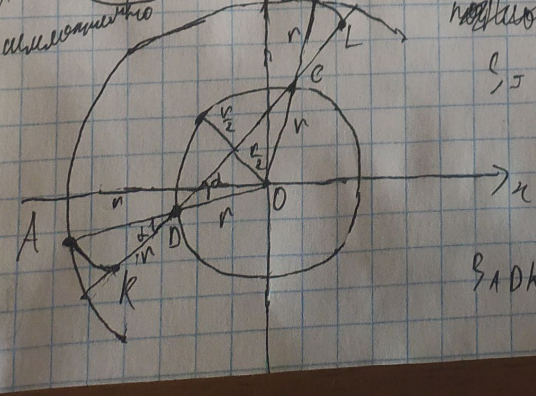
Изобразим на декартовой плоскости множество всех точек в которых может лежать центр окружности (a,b).



Это будет пересечение 2 окружностей радиусами $\sqrt{8}$ и центрами в $(0,0)$ и $(2;2)$.

$r=\sqrt{8}$

$\sin\alpha=\dfrac{\frac{r}{2}}{r}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{6}$



половина площади M это

$S=S_{AOB}+S_{ADK}+S_{BLC}-S_{ADOC}=$

$\angle AOB=\pi-2\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$

$S_{AOB}=\angle AOB\cdot 2r=\dfrac{2\pi}{3}r^2\cdot 4$

$S_{ADK}=S_{BLC}=\alpha\cdot r^2=\dfrac{\pi}{3}r^2$

(3)

Чистовик

$S_{\triangle DOC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot DC$; $DC = \sqrt{3}\, r \Rightarrow S_{\triangle DOC} = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$

Отсюда $S = \frac{8\pi}{3} r^2 + 2 \cdot \frac{\pi}{3} r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = \frac{10}{3} \pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$

Отсюда площадь фигуры M

$S_M = 2S = \left(\frac{20}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot r^2 = \left(\frac{20}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 8 = \frac{160}{3} \pi - 4\sqrt{3}$

Черновик

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8. \\ a^2+b^2 \le \min(4(b-a),\ 8) \end{cases}$$

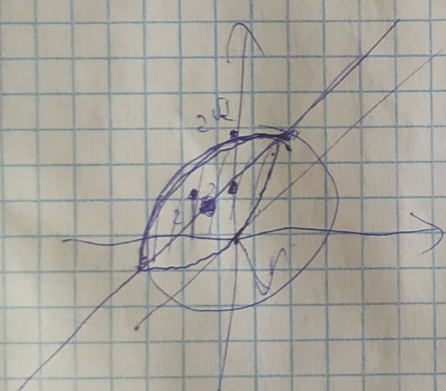
$$\min(4(b-a), 8) = \begin{cases} 8 & \text{если } b-a>2 \\ 4(b-a), & \text{если } b-a \le 2. \end{cases}$$

$a^2+b^2 \le 8$ если $b-a>2$

$a^2+b^2 \le 4(b-a)$

$b^2-2\cdot b\cdot 2+4+a^2+2\cdot a\cdot 2+4-8 \le 0$

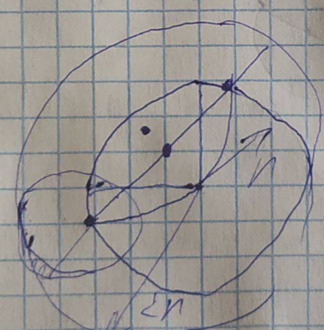
$(b-2)^2+(a+2)^2 \le 8.$



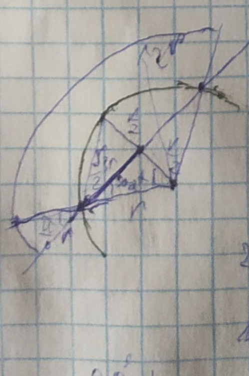
$3\pi r^2 - S$

$S = \sqrt{3}r \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$

$r=\sqrt{8}$



$3\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 =$



$S_0 = \frac{2\pi}{3}\cdot \cancel{\ } 4r^2$

$2\alpha \cdot \cancel{\ } 4r^2$

$\cos\alpha = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

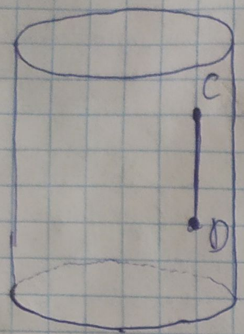
$90^\circ - \alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

$2\cdot\frac{\pi}{6}\cdot r^2 + \frac{2\pi}{3}\cdot 4r^2 = \pi r^2\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{3}\right) = 3\pi r^2$

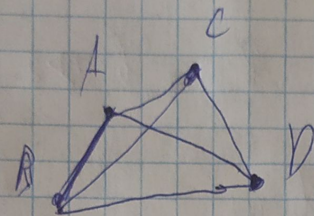
$6\pi r^2$

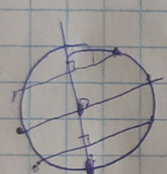
Черновик

$AC = BC \quad AD = BD$



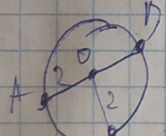
ABC и ABD – [illegible].





$D \geq AB = 4$

$R = 2$



$AC = \sqrt{2^2 + 2^2 + h^2} = \sqrt{36}$

$8 + h^2 = 36$

$h_c^2 = 28$

$AD = \sqrt{8 + h_D^2} = \sqrt{49}$

$h_D^2 = 41$

$CD = \left[\begin{array}{l} h_C + h_D \\ |h_D - h_C| \end{array}\right.$

11

Черновик

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = 6a_1 + 15b$

$a_{10} \cdot a_{16} > S + 39$

$a_{13} = a_1 + 12b$

$a_{13}^2 - 9b^2 > S + 39$

$a_{13}^2 - 4b^2 < S + 55$ $\Rightarrow 9b^2 - 4b^2 < 55 - 39 = 16$

$5b^2$

$b < \frac{4}{\sqrt{5}} < 2 \Rightarrow b = 1$

$2 < \sqrt{5} < 3$; $\frac{4}{3} < \frac{4}{\sqrt{5}} < \frac{4}{2} = 2$

$\frac{4}{\sqrt{5}}$

$b = 1$

$\begin{cases} a_1^2 + 12ba_1 + 144b^2 - 9b^2 > 6a_1 + 15b + 39 \\ a_1^2 + 12ba_1 + 144b^2 - 4b^2 < 6a_1 + 15b + 55 \end{cases}$

$a_1^2 + 12a_1 + 144 - 9 > 6a_1 + 15 + 39$

$39 + 15 = 54$

$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 81 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 70 < 0 \end{cases}$

$144 - 63 = 81$

$15 + 55 = 70$

$144 - 70 = 74$

$74 - 4 = 70$

$\frac{D}{4} = 9 - 81$

$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 81 > 0 \text{ — всегда} \\ a_1^2 + 6a_1 + 70 < 0 \end{cases}$

$a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0$

$(a_1 + 9)^2$

$(a_1^2 + 6a_1 + 9) = (a_1 + 3)^2$

$a_1^2 + 2 \cdot a_1 \cdot 9 + 9^2$

$(a_1 + 3)^2 + 72 > 0$

$-12, -11, -10, -8$

$(a_1 + 9)^2 < 11$

$(a_1 + 3)^2 + 61 < 0$

$a_1 + 9 < \sqrt{11}$

$a_1 + 9 < 4$

$a_1 > -13$

$a_1 + 9 > -4$

$a_1 < -5$

$a_1 + 9 > -\sqrt{11}$

Черновик

№1.

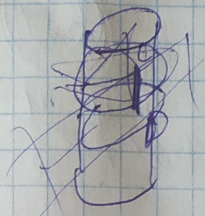
$b>0$

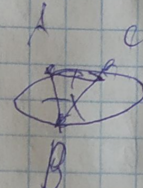
$a_1, b \in Z.$

$S = a + a+b + a+2b...$

$S = (a+a+5b)3$

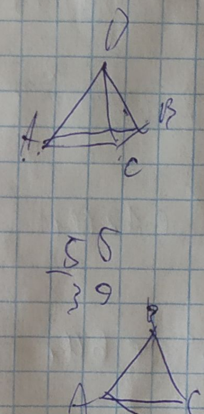
$a_n = a_{n-1}+b$





$a_{10}\cdot a_{16} = (a_{13}+3b)(a_{13}-3b) =$

$= a_{13}^2 - 9b^2$



$a_{11}\cdot a_{15} = a_{13}^2 - 4b^2$

$a_{13}^2 - 9b^2 > S + 39$

$a_{13}^2 - 4b^2 < S + 55.$

$4b^2 - a_{13}^2 > (55+S)(-1)$

$-5b^2 > 39-55 = -16$

$a_{13} = a_1 + 12b$

$b^2 < \frac{16}{5}$

$S = \frac{a_1+a_6}{2}\cdot 6 = 3a_1+3a_6 = 3a_1+3a_1+5b\cdot 3 = 6a_1+15b$

$a_1^2 + 12ba_1 + 144b^2 - 9b^2 > 6a_1+15b+39$

$a_1^2+12ba_1+144b^2-4b^2 < 6a_1+15b+55.$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102029**

ID профиля: **219116**

Вариант 23

$x = 9$

Черновик

$13 - 11 = 5$

$a = 25$

$b = 5$

$c = 5$

$\log_c b = \frac{1}{2}$

$\log_a c = 1$

$a = c$

$2 \log_{25} 5 = 1$

$\frac{1}{2\log_{25} 5} = 1$

$2x + 23 = x^2 + 8x + 16$

$x^2 + 6x - 7 = 0$

$x_1 x_2 = -7$

$x_1 + x_2 = -6$

-7

1

$x = -7$

$a = 27$

$b = 3$

$c = 3$

-11

$a = 23$

$b = 7$

$c = 1$

$23 - 16 = 7$

-8

28

4

7

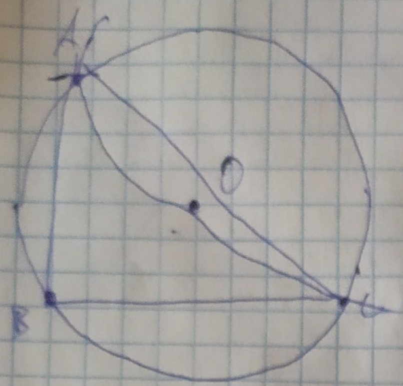
6

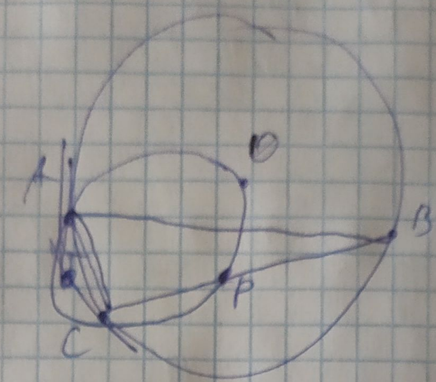
28

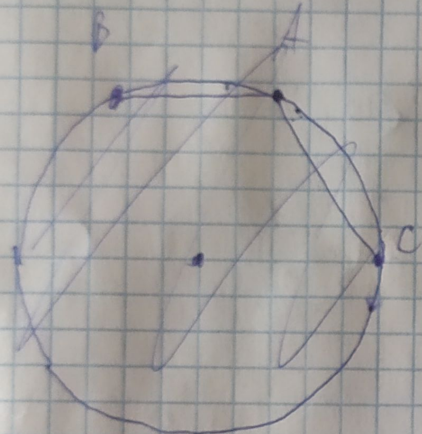
2

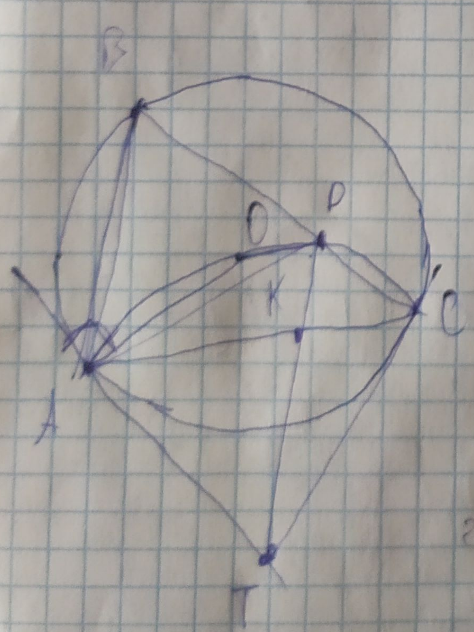
2

Черновик









$S_{APK} = 15$

$S_{CPK} = 13$

$\angle AOP + \angle PCA = OPC + OAC = 180^\circ$

$\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}}$

$2 \cdot 16 \cdot 8 = 16^2 = 2^8 = 256$

$x^4 + 16x^3 + 96x^2 + 256x + 256 = x$ ...

$x^4 + 16x^3 + 96x^2 + 256x$

$c = 2^{l} \cdot \ldots \; 15 \, \text{бар}$

$\ldots 18 \cdot 15 \, \text{бар} \cdot 2$

$+$

$\ldots 15 \cdot 18 \, \text{бар} \cdot 2$

$\log_{(x+\ldots)}(\ldots)$

$\log_{(x+\ldots)}(x+\ldots) = \log_{x+\ldots}(x+3)$

$\frac{\ln(x+\ldots)}{\ln(x+\ldots)}$

$2\log_{x+34}(2x+23)$; $\frac{1}{2}\log_{-x-4}(x+34)$; $\frac{1}{2}\log_{2x+23}(-x-4)$

$-x-4>0$

$x<-4$

$x>\frac{-23}{2}$

$a=x+34$

$b=2x+23$

$c=-x-4$ $\cancel{\log_a b \cdot \log_c a}$

$\log_c a = \frac{\ln a}{\ln c} = \frac{1}{\log_a c}$

$2\log_a b$; $\frac{1}{2}\log_c a$; $\frac{1}{2}\log_b c$

$$\begin{array}{r} 91 \\ \times\ 91 \\ \hline 91 \\ +\ 819 \\ \hline 8281 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 495 \\ \times\ 16 \\ \hline 2970 \\ +\ 495 \\ \hline 7920 \end{array}$$

$2\log_a b$; $\frac{1}{2\log_a c}$; $\frac{1}{2}\frac{\log_a c}{\log_a b}$

I $2\log_a b = \frac{1}{2}\frac{1}{\log_a c}$

$\sqrt{D} = \sqrt{91^2 - 4\cdot 495\cdot 4}$

$\log_a b \cdot \log_a c = \frac{1}{4}$

$2\log_a b + 1 = \frac{1}{2}\frac{\log_a c}{\log_a b}$

$4\log_a^2 b + 2\log_a b = \log_a c$

$\log_a b \cdot (4\log_a^2 b + 2\log_a b) = \frac{1}{4}$

$4\log_a^3 b + 2\log_a^2 b = \frac{1}{4}$

$\log_a^2 b \cdot (4\log_a b^4 + 2\log_a a^2) = \frac{1}{4}$

$\log_a^2 b \cdot \log_a(b^4 \cdot a^2) = \frac{1}{4}$

Черновик

$2 \log_a c \quad \frac{1}{2} \log_b a \quad 2 \log_c b$

$\underbrace{2 \log_a c}_{k} \quad \underbrace{\frac{1}{2 \log_a b}}_{l} \quad \underbrace{\frac{2 \log_a b}{\log_a c}}_{m}$

$m = \frac{2}{l \cdot k}$

$\begin{cases} k = l \\ l + 1 = m = \frac{2}{lk} = \frac{2}{l^2} \end{cases}$

$l + 1 = \frac{2}{l^2}$

$l^3 + l^2 - 2 = 0$

$l = 1$

$(l-1)(l^2 + 2l + 2) = 0$

$\begin{cases} k = m \Rightarrow m^2 = \frac{2}{l} \\ mk + 1 = l \end{cases}$

$\frac{2 + lk}{lk} = l$

$2 + lk = l^2 k$

$m^2 = l^2 - 2l + 1 = \frac{2}{l}$

$l^3 - 2l^2 + l - 2 = 0$

$8 - 2 \cdot 4 + 2 - 2 = 0$ V

$l = 2$

$(l-2)(l^2+1) = 0$

$l = 1$

$\frac{1}{2} = \log_a b$

$x^2 + 7x - 18 = 0$

$D = 49 + 4 \cdot 18 = 49 + 72 = 121$

$x = \frac{-7 \pm 11}{2}$

$x = -9$

$x + 34 = x^2 + 8x + 16$

$\sqrt{x+34} = -x-4$

$\frac{1}{2} = \log_{x+34}(-x-4)$

$-x-4 = 2x + 23$

$3x = -27$

$x = -9$

$(x+34)^{\frac{1}{2}} = -x-4$

$x + 34 = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x^3 + 64x^2 + 16 \cdot 8x + 16x^2 + 16 \cdot 8x + 16^2$

$23 \cdot 23 = 69 + 46 = 529$

$529 - 34 = 495$

Чистовик

№1.

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c)=22 \\ \text{НОК}(a,b,c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

очевидно, что числа a, b и c состоят только в форме $2^i\cdot 11^j$, где $1\le i\le 16$, $1\le j\le 19$, причём обязательно одно из чисел равно 22. (иначе $\text{НОД}(a,b,c)\ne 22$)

~~Тогда~~ Пусть $a=22$, тогда общее кол-во ~~троек~~ троек будет в 3 раза больше чем возможных пар $(b;c)$.

Рассмотрим случай когда ~~b~~ b или $c=2^{16}\cdot 11^{19}$

Пусть $b=2^{16}\cdot 11^{19}$, тогда $c=2^i\cdot 11^j$, где $1\le i\le 16$, $1\le j\le 19$.

Значит c можно выбрать $19\cdot 16$ способами.

если $c=2^{16}\cdot 11^{19}$, то $b=2^i\cdot 11^j$, но 1 вариант, когда $b=2^{16}\cdot 11^{19}$ мы уже рассмотрели, поэтому, когда b или $c=2^{16}\cdot 11^{19}$, можно подобрать $2\cdot 19\cdot 16-1$ способами.

Второй случай: когда 2^{16} и 11^{19} находятся в разных числах.

Пусть $b=2^{16}\cdot 11^j$ $\quad 1\le j<19$

$c=2^i\cdot 11^{19}$ $\quad 1\le i<16$

~~мыслим~~ возможных пар будет $18\cdot 15$; но можно поменять местами b и c, поэтому пару (b,c) можно, когда 2^{16} и 11^{19} в разных числах можно взять $2\cdot 18\cdot 15$ способами

Отсюда всего возможно выбрать (b,c) $2(18\cdot 15+19\cdot 16-1)$ способами. Значит тройку (a,b,c) можно выбрать

$3\cdot 2\cdot(18\cdot 15+19\cdot 16-1)$ способами. ~~Но из-за симметричности, в случае, когда $c=2^{16}\cdot 11^{19}$ и $b=\ldots$ $a=b=2^{16}\cdot 11^{19}$, ...~~

Чистовик
№2

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = 2\log_{x+34}(2x+23)$

$\log_{(x+4)^2}(x+34) = \frac{1}{2}\log_{|x+4|}(x+34) = \frac{1}{2}\log_{-x-4}(x+34)$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = 2\log_{2x+23}(-x-4)$

По ОДЗ ~~x+34>0~~ $x+34>0$ $2x+23>0$ $-4-x>0$ $\Rightarrow x<-4;\ x>-\frac{23}{2}$

Обозначим эти выражения как:

$a = x+34$

$b = -x-4$

$c = 2x+23$

Наши 3 числа будут: $2\log_a c$; $\frac{1}{2}\log_b a$; $2\log_c b$

$\underbrace{2\log_a c}_{k}$; $\underbrace{\frac{1}{2\log_a b}}_{l}$; $\underbrace{2\frac{\log_a b}{\log_a c}}_{m}$

Заметим, что $k\cdot l\cdot m = 2$.

Рассмотрим все возможные равные пары:

1) $\begin{cases} k=l \\ k+1=m \end{cases} \Rightarrow m = \frac{2}{k^2} \Rightarrow k+1 = \frac{2}{k^2} \Rightarrow k^3+k^2-2=0$

при $k=1$ верно $\Rightarrow$

$$\begin{array}{l|l} k^3+k^2-2 & k-1 \\ \hline k^3-k^2 & k^2+2k+2 \\ \quad 2k^2 & \\ \quad 2k^2-2k & \\ \qquad 2k-2 & \\ \qquad 2k-2 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$k^3+k^2-2=0$:

$(k-1)(k^2+2k+2)=0$, заметим, что $k^2+2k+2 = (k+1)^2+1$ что всегда >0, поэтому

у этого кубического ур-ия одно решение: $k=1$

$\cancel{2\log_{x+34}(2x+23) = 1 \Rightarrow (x+34)^{\frac{1}{2}} = 2x+23}$ $\quad l=1 \quad m=2$.

2

Чистовик

№ (продолжение)

~~$x+34 = 4x^2 + 92x + 23^2$~~

⇓

~~$4x^2 + 91x + ...$~~

$m=2 \Rightarrow 2\dfrac{\log_a b}{\log_a c} = 2 \Rightarrow \log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c \Rightarrow -x-4 = 2x+23$

⇓

$3x = -27$

⇓

$x = -9$

$x=-9$ подходит по ОДЗ

Далее заметим, что наша система симметрична и два числа всегда будут равны 1, а третье 2.

Значит есть возможные решения:

$\begin{cases} k=1 \\ m=1 \\ l=2 \end{cases} \Rightarrow$ ~~$2\log_{x+34}(2x+23) = 1$~~ ~~$(x+34)^{\frac{1}{2}} = 2x+23$~~

~~$x+34 = 4x^2 + 92x + 529$~~

~~$4x^2 + 91x + 495 = 0$~~

~~$D = ...$~~

или

$\begin{cases} k=2 \\ l=1 \\ m=1 \end{cases}$

⇓

$2\log_a c = 2$

⇓

$a = c$

⇓

$x+34 = 2x+23$

⇓

$x = 11$ не подходит по ОДЗ.

$m=1 \Rightarrow 2\log_c b = 1$

$c^{\frac{1}{2}} = b$

⇓

$c = b^2$

$2x+23 = x^2 + 16 + 8x$

⇓

$x^2 + 6x - 7 = 0$

⇓

$x_1 = -7$

$x_2 = 1$, не подходит по ОДЗ

$x_1 x_2 = -7$

$x_1 + x_2 = -6$.

Отсюда возможно взять $x=-7$ или $x=-9$.

3