Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102000**

ID профиля: **851268**

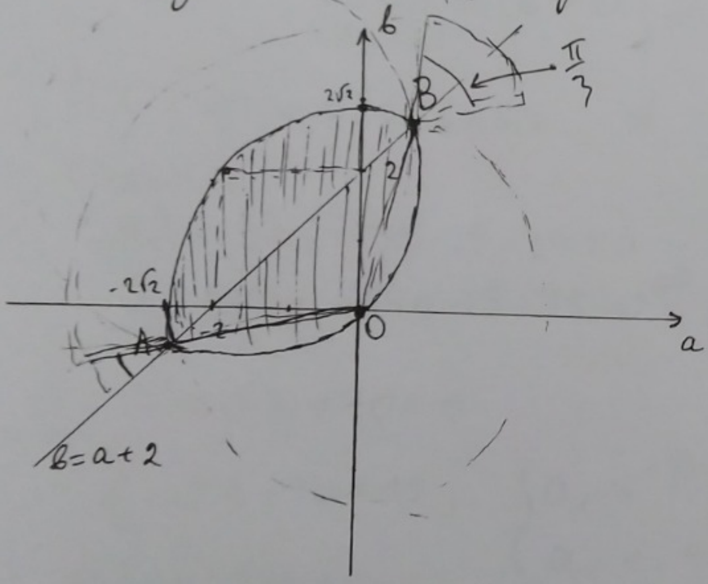
Вариант 23

[3]. $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le \min(-4a+4b,8)\end{cases}$ Чистовик.

$\min(-4a+4b,8)=\begin{cases}8, -4a+4b\ge 8 \Leftrightarrow b\ge a+2 \quad (1)\\ -4a+4b,\ b< a+2 \quad (2)\end{cases}$

$\begin{cases}\text{Для (1)}\quad a^2+b^2\le 8,\ b\ge a+2\\ \text{Для (2)}\quad a^2+b^2\le -4a+4b \Leftrightarrow (a+2)^2+(b-2)^2\le 8,\ b<a+2\end{cases}$

На пл-ти Oab полученная система задаёт часть круга с центром (0;0) и радиусом $2\sqrt{2}$, лежащую выше прямой $b=a+2$, и часть круга с центром (-2;2) и радиусом $2\sqrt{2}$, лежащую ниже прямой $b=a+2$.



Первое нер-во исходной системы задаёт круг с центром (a;b) и радиусом $2\sqrt{2}$. Итого, имеем множество всех кругов радиусами $2\sqrt{2}$ и центрами, лежащими в изображённом на пл-ти Oab множестве.

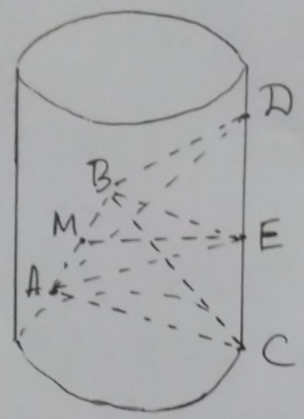
Заметим, что фигура M симметрична отн. пр. $y=x+2$. Из $\begin{cases}a^2+b^2=8\\ b=a+2\end{cases}$ находим координаты т. A и B: $A(-1-\sqrt{5};1-\sqrt{5})$, $B(-1+\sqrt{5};1+\sqrt{5})$, откуда $AB=2\sqrt{2}$, по теореме синусов $\angle AOB=\frac{5\pi}{6}$ (т.к. он тупой). Тогда площадь сегмента, радиус которого на $2\sqrt{2}$ больше радиуса изображённого, равна $R^2\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{1}{4}\right)=\frac{40\pi}{3}-8$, площадь второго такая же, итого $\frac{80\pi}{3}-16$. К ним добавим 2 сегмента окр-ти с центрами A и B и радиусами $2\sqrt{2}$ и углами $\frac{\pi}{6}\cdot 2=\frac{\pi}{3}$

Итого, имеем $\frac{80\pi}{3}-16+2\left(\frac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}\right)=\frac{80\pi}{3}+\frac{8\pi}{3}-16-4\sqrt{3}=$

21102000 (U851268 M1304362)

Чистовик.

2.



Т.к. CD ∥ оси цилиндра, то CD ⊥ его основанию.
По усл-ю △ABD и △ABC равнобедренные. Пусть M – середина AB, тогда DM ⊥ AB и CM ⊥ AB.
Через т. A и B проведём сеч-е, параллельное основанию цил-ра, которое перес. CD в точке E. CD ⊥ его пл-ти, поэтому по теореме о 3-х перпендикулярах ME ⊥ AB ⇒ ⇒ △ABE – равнобедренный. Тогда CD ⊥ (AEB), поэтому пл-ть (ABE) ∥ основанию цилиндра и радиус цилиндра (R) радиус окр-ти, описанной вокруг △ABE.
Пусть $2\alpha = \angle$ ~~ABE~~ AEB. По теореме синусов

$R = \frac{AB}{2\sin 2\alpha}$, R минимален при $2\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$.

Тогда $\angle AEM = \angle BEM = 45^\circ$, $ME = AM = 2$, $AE = BE = 2\sqrt{2}$
(△ABE – прямоуг.)

Из △AMD ~~$AD = \sqrt{AM^2 + MD^2}$~~ $MD = \sqrt{AD^2 - AM^2} = \sqrt{49-4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Из △AMC $MC = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{36-4} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Из △EMC $CE = \sqrt{CM^2 - ME^2} = \sqrt{32-4} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

Из △EMD $DE = \sqrt{DM^2 - ME^2} = \sqrt{45-4} = \sqrt{41}$

$CD = EC + ED = 2\sqrt{7} + \sqrt{41}$

Ответ: $2\sqrt{7} + \sqrt{41}$.

21102000 (U851268 M1304362)

Чистовик.

$\boxed{1.}$ Для арифм. прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$, где d – разность ($d>0$, d – целое по усл.)

$$S = \frac{a_1+a_6}{2}\cdot 6 = \frac{a_1+a_1+5d}{2}\cdot 6 = 6a_1+15d$$

$$a_{10}a_{16} = (a_1+9d)(a_1+15d) > S+39 \Leftrightarrow (a_1+9d)(a_1+15d)>6a_1+15$$

$$\Leftrightarrow a_1^2+(24d-6)a_1+135d^2-15d-39>0$$

$$a_{11}a_{15} = (a_1+10d)(a_1+14d) < 6a_1+5d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1^2+(24d-6)a_1+140d^2-15d-55<0$$

Пусть $m = a_1^2+(24d-6)a_1+140d^2-15d-55<0$,

тогда $\begin{cases} m-5d^2+16>0 \\ m<0 \end{cases} \Rightarrow -5d^2+16>0 \Rightarrow d^2<\frac{16}{5}$

Из натуральных d подходит только $d=1$

Имеем

$$\begin{cases} a_1^2+18a_1+135-15-39>0 \\ a_1^2+18a_1+140-15-55<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+18a_1+81>0 \\ a_1^2+18a_1+70<0 \end{cases}$$

верно всегда для $a_1 \neq -9$

$$a_1^2+18a_1+70<0$$

$\frac{D}{4} = 81-70=11$, $\begin{cases} a_1 > -9-\sqrt{11} \\ a_1 < -9+\sqrt{11} \end{cases} \xRightarrow[\sqrt{11}>3]{\sqrt{11}<4} \begin{cases} a_1 > -9-4 \\ a_1 < -9+4 \end{cases}$

Окончательно:

$\begin{cases} a_1 > -13 \\ a_1 < -5 \\ a_1 \neq -9 \end{cases} \Rightarrow$ Ответ: $a_1 \in \{-12; -11; -10; -8; -7; -6\}$.

Черновик

$$\begin{cases} a^2+b^2=8 \\ b=a+2 \end{cases}$$

$a^2+a^2+4a+4=8$

$2a^2+4a-4=0$

$a^2+2-2=0$

$\frac{D}{4}=1+4=\sqrt{5} \quad a=-1\pm\sqrt{5}$

$A(-1-\sqrt{5};\ 1-\sqrt{5})$

$B(-1+\sqrt{5};\ 1+\sqrt{5})$

$|AB|=\sqrt{(-1-\sqrt{5}+1-\sqrt{5})^2+(1-\sqrt{5}-1+\sqrt{5})^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\sin\alpha=\frac{AB}{2R}=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{5\pi}{6}$

$S=-\frac{1}{2}R^2\cdot\frac{1}{2}+\frac{5\pi}{6}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\pi R^2=R^2\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{1}{4}\right)=$

$=\frac{8}{12}=\frac{2}{3} \qquad R=4\sqrt{2}$

$\frac{32}{12}=\frac{8}{3}\cdot 5=80$

$S=R^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\sin\alpha}{2}\right)=8\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}$

Черновик

(1) $a_n = a_1 + d(n-1),\ d>0$ $\qquad d \in \mathbb{N}$

$S = \frac{a_1+a_6}{2}\cdot 6 = \frac{a_1+5d+a_1}{2}\cdot 6 = 6a_1+15d$

$a_{10}a_{16} = (a_1+9d)(a_1+15d) = a_1^2+24a_1d+135d^2 > 6a_1+15d+39$

$a_1^2+(24d-6)a_1+135d^2-15d-39>0$

$a_{11}a_{15} = (a_1+10d)(a_1+14d) = a_1^2+24a_1d+140d^2 < 6a_1+15d+55$

$a_1^2+(24d-6)a_1+140d^2-15d-55<0$

$f(x) = x^2+(24d-6)x+140d^2-15d-55<0$

$g(x) = f(x)-5d^2+16>0$ $\quad \Rightarrow -5d^2+16>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2 < \frac{16}{5}$

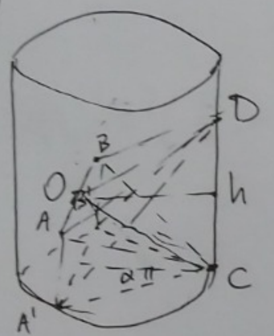
$d\in\mathbb{N} \Rightarrow d=1$

$a_1^2+18a_1+140-15-55<0$

$a_1^2+18a_1+70<0$

$\frac{D}{4} =$ __ __ __

(2)



$AB=4 \quad CD-?$

$AC=BC=6$

$AD=BD=7$

$\triangle ABC$:

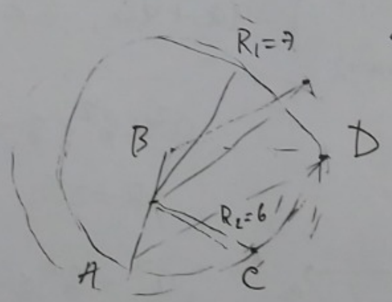
$R \to \min$

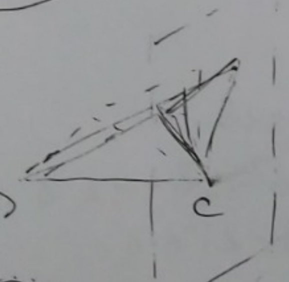
$R = \frac{AB'}{2\sin\alpha} = \frac{AB}{2\sin\alpha}$

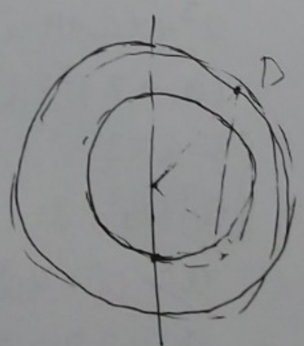
$\sin\alpha = \frac{AB}{A'C}\cdot 2$

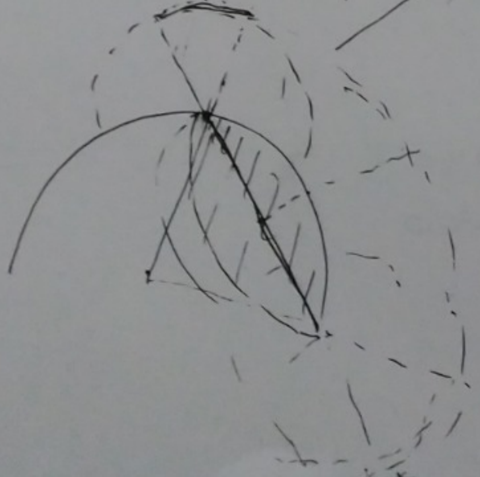
d min

$\cos\alpha \to \min$



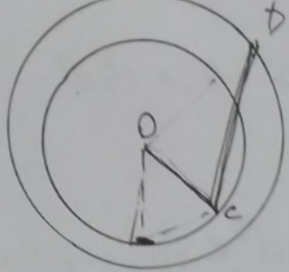






21102000 (U851268 M1304362)

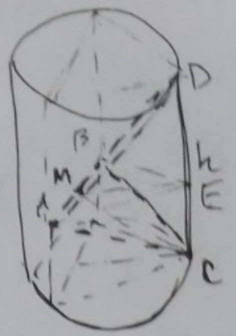
Черновик



$R = \frac{AB}{2\sin 2\alpha} = $

$6^2 - 2^2 = 32 = CO$

$49^2 - 2^2 = 45 = DO$



$R = \frac{AB}{2\sin 2\alpha} \to \min \Rightarrow \sin 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

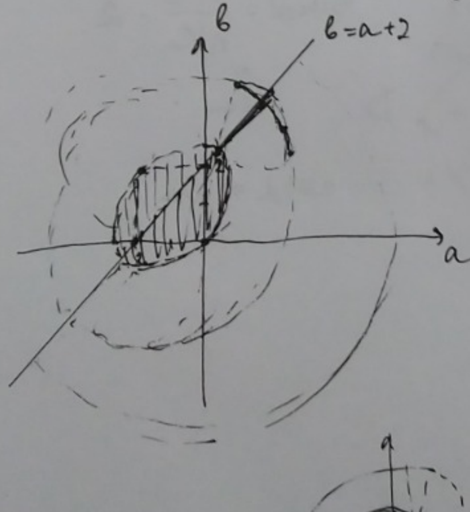
$ME = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{8}}$

3

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 8 \\ a^2 + b^2 \le \min(-4a+4b, 8) \end{cases}$$

$a^2 + b^2 \le \min(-4a+4b, 8)$

$$\min(-4a+4b, 8) = \begin{cases} 8, & -4a+4b \ge 8 \Leftrightarrow b \ge a+2 \\ -4a+4b, & b < a+2 \end{cases}$$



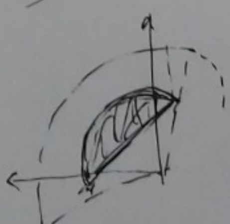
$a^2 + b^2 \le 8$ - окр-ть

$R = 2\sqrt{2}$

$a^2 + b^2 \le -4a + 4b$

$a^2 + 4a + 4 + b^2 - 4b + 4 \le 8$

$(a+2)^2 + (b-2)^2 \le 8$



$$\begin{cases} b = a+2 \\ a^2 + b^2 = 8 \end{cases}$$

$a^2 + a^2 + 4a + 4 = 8$

$a^2 + 2a - 2 = 0$

$\frac{D}{4} = 1 + 4 = \sqrt{5}$

21102000 (U851268 M1304362)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102000**

ID профиля: **851268**

Вариант 23

[4] Чистовик

НОК$(a;b;c) = 2^{16}\cdot 11^{19}$

НОД$(a;b;c) = 22$ ⇒ a, b и c делятся только на 2 и 11.

Пусть $a = 2^{\alpha_1}\cdot 11^{\alpha_2}$

$b = 2^{\beta_1}\cdot 11^{\beta_2}$

$c = 2^{\gamma_1}\cdot 11^{\gamma_2}$

НОД$(a;b;c)=22 \Rightarrow \begin{cases}\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=1\\ \min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=1\end{cases}$

~~НОД~~

НОК$(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19} \Rightarrow \begin{cases}\max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=16\\ \max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_1)=19\end{cases}$

Если принять $\alpha_2=1$, $\beta_2=19$, то имеем 16 троек $(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$: $(1;19;1), (1;19;2), \ldots, (1;19;19)$;

При $\alpha_2=1$, $\gamma_2=19$ имеем $(1;1;19), (1;2;19), \ldots, (1;19;19)$.

Всего подобных способов выбрать минимум и максимум $3\cdot 2 = 6$, для каждого из них имеем 19 троек.

При этом дважды посчитаны 6 троек: $(1;19;19), (1;1;19), (1;19;1), (19;1;1); (19;1;19), (19;19;1)$,

поэтому получаем $6\cdot 19 - 6 = 18\cdot 6$ троек $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$

Аналогично получаем $6\cdot 16 - 6 = 15\cdot 6$ троек $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$

Для любой пары троек $((\alpha_1;\beta_1;\gamma_1),(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2))$ задана тройка чисел (a,b,c), поэтому получаем

$18\cdot 6\cdot 15\cdot 6 = 108\cdot 90 = 9720$ троек.

Ответ: 9720.

Чистовик

5 Пусть

$u=\sqrt{x+34}$, $v=\sqrt{2x+23}$, $w=-x-4$, тогда даны числа

$\log_u v^2$, $\log_{w^2} u^2$, $\cancel{\log_u w}$ $\log_v w$

$\log_w u$

$$\log_u v^2 \cdot \log_w u = \frac{\log_u v^2}{\log_u w} = \log_w v^2 = \frac{2}{\log_v w}$$

$$\log_u v^2 \cdot \log_v w = \frac{2\log_v w}{\log_v u} = \frac{2}{\log_w u}$$

$$\log_w u \cdot \log_v w = \frac{\log_w u}{\log_w v} = \log_v u = \frac{1}{\log_u v} = \frac{2}{\log_u v^2}$$

Если $\log_u v^2 = \log_w u = t$, то

$\log_v w = \frac{2}{t^2} = t+1 \Leftrightarrow t^3+t^2-2=0$ — это ур-е имеет

только корень $t=1 \Rightarrow$ $\cancel{\log_v w}$ $\log_u v^2 = 1$

$$\log_{\sqrt{x+34}} 2x+23 = 1 \Rightarrow 2x+23 = \sqrt{x+34} \Rightarrow x=-9$$

Аналогично $\log_w u = \underbrace{\log_u v^2 + 1}_{=\log_u w+1}$ при $\log_w u = 1$

$$\log_{-x-4} \sqrt{x+34} = 1 \Rightarrow -x-4 = \sqrt{x+34} \Rightarrow x=-9$$

$$\log_v w = 1 \Rightarrow \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x+23} = -x-4 \Rightarrow x^2+8x+16 = 2x+23 \Rightarrow$$

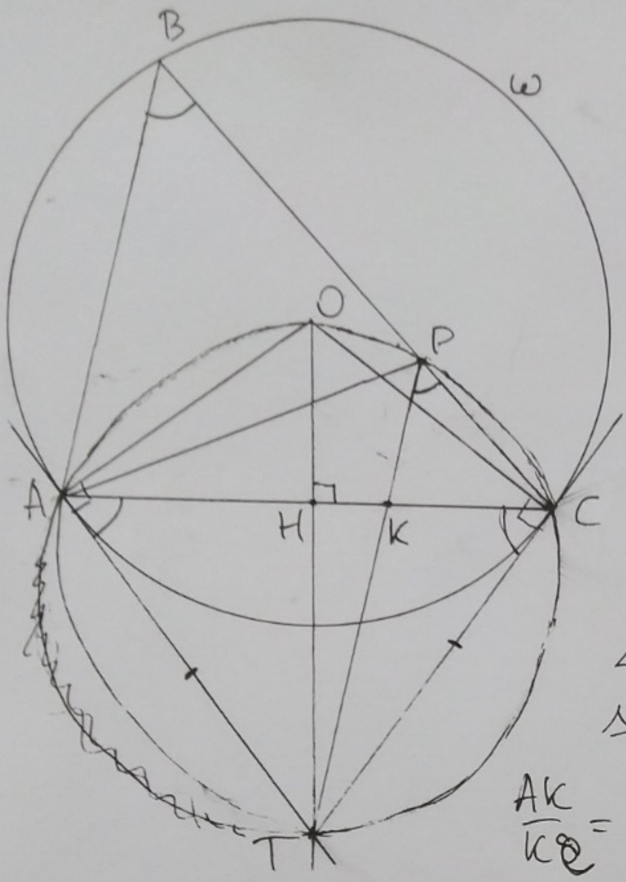
$$\Rightarrow x^2+6x-7=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=1 \text{ (не подх. по ОДЗ)} \end{array}\right.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -x-4>0 \\ 2x+23>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-4 \\ x>-11{,}5 \end{cases}$$

Ответ: $-9; -7$.

6

Чистовик



$S_{APK} = 15$

$S_{CPK} = 13$

AT и CT - касательные $\Rightarrow$

$\Rightarrow AO \perp AT$, $CO \perp CT \Rightarrow$ вокруг AOCT можно описать окр-ть, $AT = CT$

$\angle ABC = \angle ACT = \angle CAT$ как углы между касательными и хордой AC.

$\angle \cancel{A}CPT = \angle CAT$ (опираются на $\cup CT$)

$\triangle AKT \sim \triangle CKP \Rightarrow \frac{AT}{CP} = \frac{AK}{KC} = 13$

$\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{15}{13}$

$\angle ABP = \angle TPC \Rightarrow AB \parallel PT \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CKP$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CPK}} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 = \left(\frac{28}{13}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{28^2}{13} = \frac{784}{13}$

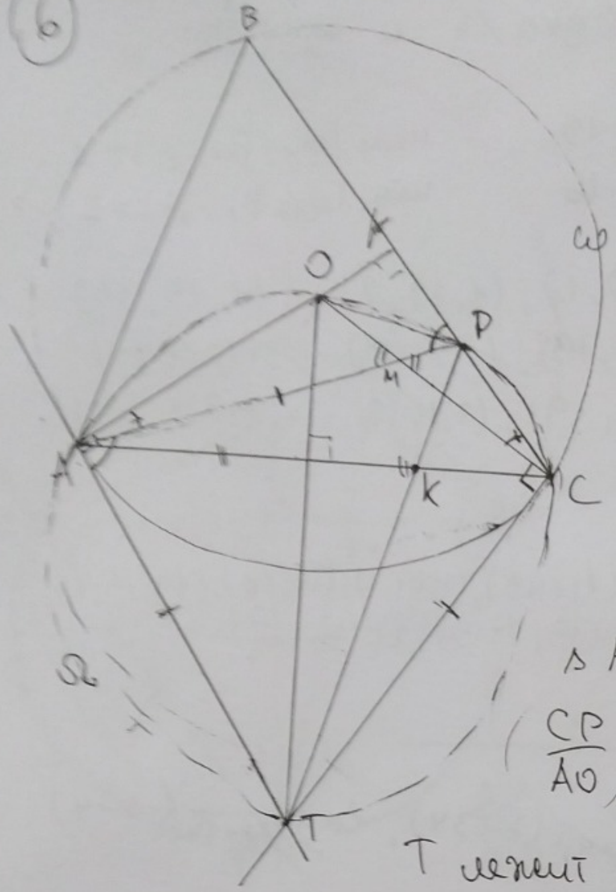
$\angle ABC = \operatorname{arcctg} \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{HT}{AH} = 2\frac{HT}{AC} = \frac{4}{7}$

$\triangle ABC \sim \triangle CPK \Rightarrow \frac{AB}{KP} = \frac{BC}{PC} = \frac{AC}{KC} = \frac{28}{13}$

$S_{APC} = 28$

Черновик

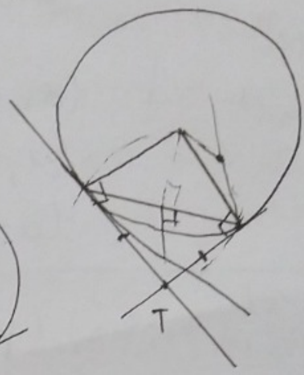
(6)

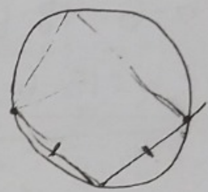


$S_{APK}=15$

$S_{CPK}=13 \Rightarrow \frac{AK}{KC}=\frac{15}{13}$

а) S_{ABC} - ?





$\triangle AOM \sim \triangle CPM$

$\frac{CP}{AO}=\frac{CM}{AM}=\frac{OM}{PM}$

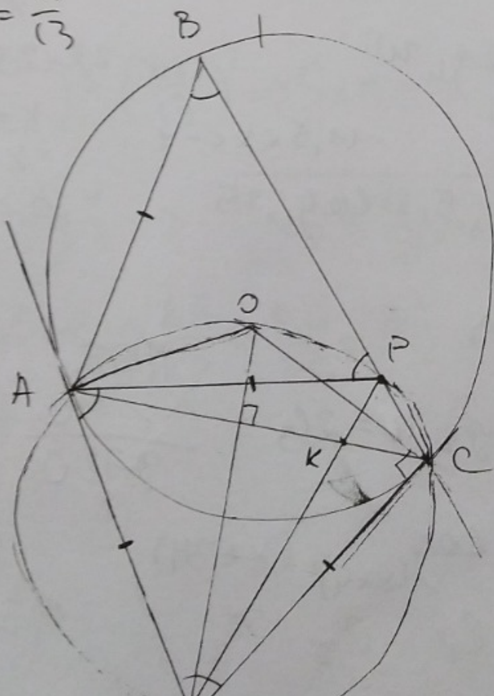
T лежит на Ω

$AT=PT=CT$

$\frac{1}{2}\cdot PH\cdot AK=15$

$\frac{AT}{CP}=\frac{AK}{KC}=\frac{15}{13}$

$AT \parallel BC$



~~$\angle ABP=\angle PAT$ (между х. и касат.)~~

$\angle ABP=\angle PAT$

$AB=AP$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times\, 28 \\ \hline 224 \\ 56 \\ \hline 784 \end{array}$$

(4) $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 22 \Rightarrow \text{Все} \vdots \text{на } 2 \text{ и } 11, \text{ причём} \\ НОК(a;b;c) = 2^{16}\cdot 11^{19} \quad \text{одно} \vdots 4 \text{ и одно} \vdots 121 \end{cases}$

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 11^{\alpha_2}$ $\quad \max(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 19 \quad \min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 1$

$b = 2^{\beta_1}\cdot 11^{\beta_2}$ $\quad \max(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 16 \quad \min(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 1$

$c = 2^{\gamma_1}\cdot 11^{\gamma_2}$ $\quad (1, 19, \gamma_2): (1,19,1), (1,19,2), \dots, (1,19,19)$

$(1, \beta_2, 19): (1,1,19), (1,2,19), \dots, \cancel{(1,19,19)}$

$(\alpha_2, 1, 19): \cancel{(1,1,19)}, (2,1,19), \dots, (19,1,19)$

$((\alpha_1;\alpha_2), (\beta_1;\beta_2), (\gamma_1;\gamma_2))$

Дважды посчитаны $(1;1;19), (1;19;1), (19;1;1), (19;19;1), (19;1;19); (1 - -)$

$19\cdot 6 - 6 = 18\cdot 6$

$16\cdot 6 - 6 = 15\cdot 6 \quad 18\cdot 15\cdot 36$

(5) $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23), \log_{(x+4)^2}(x+34), \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$u = \sqrt{x+34}, \ v = \sqrt{2x+23}, \ w = -x-4$

ОДЗ: $-x-4>0$

$x < -4$

$2x+23 \neq \pm 1$

$x \neq -12 \quad x \neq -11$

$2x+23>0$

$x > -11{,}5$

$\cancel{\log_{u^2} v, \ \log_{w^2}}$

$\log_u v^2, \ \log_{w^2} u^2, \ \log_u w$

$-11{,}5 < x < -4$

1) $\log_u v^2 = \log_u w$ $\quad \log_5 5 = \log_{5^2} 25$

$v^2 = w$

$2x+23 = -x-4 \quad x = -9$

$l_1 l_3 = \frac{2\log_v w}{\log_v u} = 2\log_v w = 2l_3$

$\begin{array}{r} 108 \\ \times\ 90 \\ \hline 9720 \end{array}$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34)$

$l_1 \quad l_2 \quad l_3$

$l_1^2 = \frac{2}{l} \Rightarrow l_2 = \frac{2}{l_1^2}$

$l_1 l_3 = \cancel{\frac{2\log_v w}{\log_v u}} =$ log

$l_1 l_2 = \log_w v^2 = 2\log_v w = \cancel{2l_3}\ \frac{2}{l_3}$

$l_2 l_3 = \log_u v = \frac{1}{2} l_1$

$l_1 l_3 = 2$