Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101893**

ID профиля: **810874**

Вариант 23

Чистовик (1)

1.

$a_{11}\cdot a_{15} = (a_{10}+d)(a_{16}-d) < S+55$ (d - разность прогрессии)

$a_{10}a_{16} + d(a_{16}-a_{10}) - d^2 < S+55$

$a_{10}a_{16} > S+39 \Rightarrow$ можно заменить большее меньшим и неравенство не потеряет смысл.

$\cancel{S}+39+d(a_{16}-a_{10})-d^2 < \cancel{S}+55$

$a_{16}-a_{10} = a_1+15d - a_1 - 9d = 6d$

$6d^2 - d^2 < 16$

$5d^2 < 16$

$d^2 < \frac{16}{5}$, т.к. прогр. возраст., $d > 0$

$d < \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow d < \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow d = 1$, т.к. d - целое.

$S = \frac{a_1+a_6}{2}\cdot 6 = \frac{a_1+a_1+5d}{2}\cdot 6 = 6a_1+15d = 6a_1+15$

$$\begin{cases} a_{10}a_{16} > 6a_1+54 \\ a_{11}a_{15} < 6a_1+70 \end{cases}$$

$(a_1+9)(a_1+15) > 6a_1+54$

$a_1^2+24a_1+135 > 6a_1+54$

$a_1^2+18a_1+81 > 0$

$(a_1+9)^2 > 0$

$a \neq -9$

$(a_1+10\cancel{d})(a_1+14) < 6a_1+70$

$a_1^2+24a_1+140 < 6a_1+70$

$a_1^2+18a_1+70 < 0$

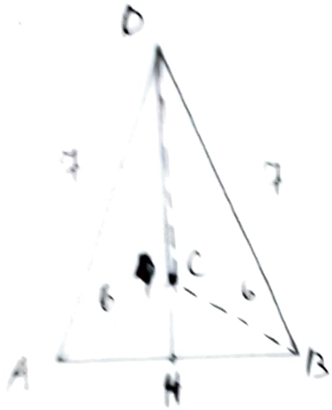
$D = 81-70 = 11$

$a_1 = \frac{-9\pm\sqrt{11}}{1}$

целые числа на промежутке $(-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11})$ — $-12, -11, -10, -9, -8, -7, -6$

т.к. -9 не подходит, Ответ: $a_1 \in \{-12, -11, -10, -8, -7, -6\}$

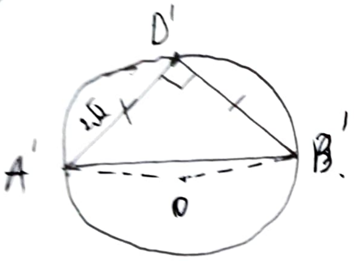
2.



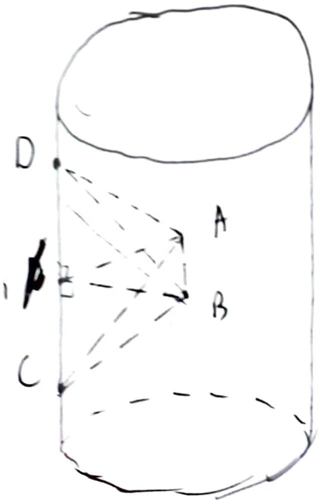
Дано: $ABCD$ – тетраэдр, $AD = BD = 7$, $AB = 4$, $AC = BC = 6$.

Найти: CD

Решение: $\triangle DAB$ – равнобедр $\Rightarrow$ DH – высота и медиана. $\triangle ACB$ – равнобедр $\Rightarrow$ CH – высота и медиана. По теореме о трёх перпендикулярах $AB \perp DCH$, т.к. $AB \perp (DCH)$. Т.к. DC параллельно оси цилиндра, а ось цилиндра перпендикулярна основанию, то $DC \perp$ основанию. С другой стороны $DC \perp AB \Rightarrow AB \parallel$ основанию цилиндра. Это значит, что проекция AB на ось цилиндра равна стороне AB. Рассмотрим вид сверху на тетраэдр и цилиндр относительно оси.



Нам известно, что A и B лежат на бок. поверхности цилиндра, значит $A'B'$ – хорда окружности. Радиус будет наименьшим, когда $A'B'$ – диаметр, иначе по нер-тву треугольника $A'O + B'O > A'B' \Rightarrow 2r > 4$. Значит, AB – диаметр. $\triangle A'DB'$ – прямоугольный, т.к. $\angle A'D'B'$ опирается на диаметр. $A'D' = 2\sqrt{2} = A'B'$. Проведём через AB плоскость, параллельную основаниям цилиндра. Она пересекает DC в точке D_1, $\triangle BD_1D$, $\triangle BD_1C$ – прямоуг. $CD = CD_1 + DD_1$. $CD_1^2 = 36 - 8 = 28$, $DD_1^2 = 49 - 8 = 41$. $CD = 2\sqrt{7} + \sqrt{41}$. Другой случай когда D_1 не лежит на CD, тогда $CD = DD_1 - CD_1 = \sqrt{41} - 2\sqrt{7}$



Ответ: $CD = \sqrt{41} \pm 2\sqrt{7}$

Чистовик (3)

3. $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8) \end{cases}$

Первое неравенство задаёт бесконечное множество кругов площадью 8π. Второе неравенство имеет два случая:

$a^2+b^2 \le -4a+4b$, при $a-b \ge -2$

$a^2+4a+4+b^2-4b+4 \le 8$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$ – ~~окружность~~ круг с радиусом $2\sqrt{2}$

$(a+2)^2 \le 8$

$-2\sqrt{2} \le a+2 \le 2\sqrt{2}$

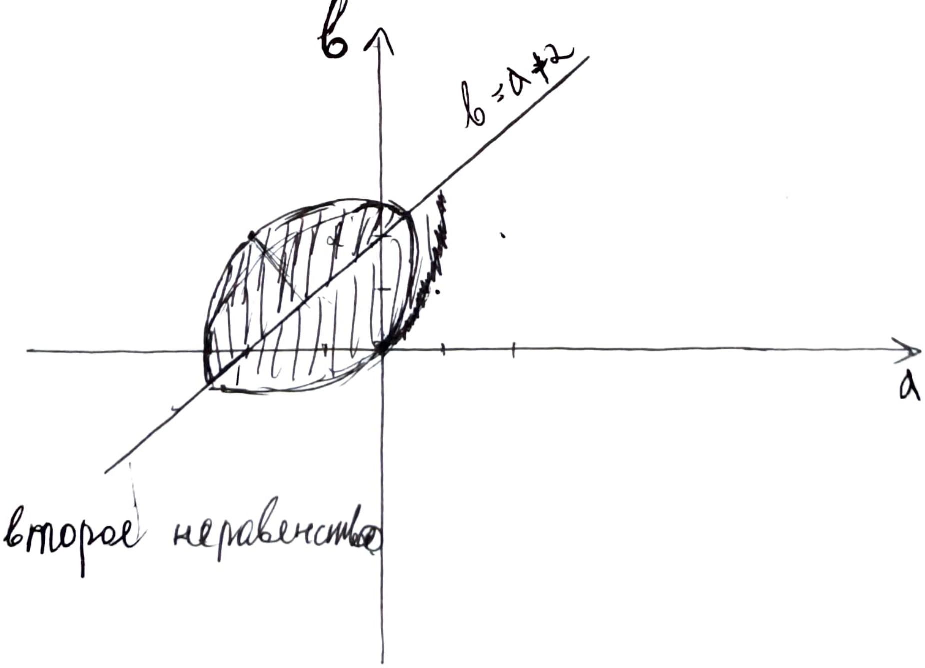
$-2\sqrt{2}-2 \le a \le 2\sqrt{2}-2$

$(b-2)^2 \le 8$

$-2\sqrt{2} \le b-2 \le 2\sqrt{2}$

$-2\sqrt{2}+2 \le b \le 2\sqrt{2}+2$

$a^2+b^2 \le 8$ при $a-b \le -2$



задаёт второе неравенство

Черновик

$a_{10} \cdot a_{16} > S + 39$

$(a_1 + 9d)(a_1 + 15d) > S + 39$

$a_1^2 + 9da_1 + 15da_1 + 135d^2 > 6a_1 + 15d + 39$

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$

$6a_1 + 15d$

$\frac{a_1 + a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = 6a_1 + 15d$

$135 - 54 = 81$

$a_{11} \quad a_{15}$

$(a_{10} + d)(a_{16} - d) < S + 55$

$a_{10}a_{16} + a_{16}d - a_{10}d - d^2 < S + 55$

$S + 39 + a_{16}d - a_{10}d - d^2 < S + 55$

$6d \cdot d - d^2 < 55 - 39$

$5d^2 < 16$

$d^2 < \frac{16}{5}$

$d < \frac{4}{\sqrt{5}} < 2 \Rightarrow d = 1$

$(a_1 + 9)(a_1 + 15) > S + 39 > 6a_1 + 54$

$a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 54$

$a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0$

$a_1 + a_2 = -18$

$a_1 a_2 = 81$

$(a_1 + 9)^2 > 0$

$a_1 \neq -9$

-22

$(-12 + 9)(-12 + 15) > 6a_1 + 54$

$-3 \cdot 3$

$-9 > -18$

$\min(-4a + 4b, 8)$

$(-4(b - a), 8)$

$(a_1 + 10)(a_1 + 14) < S + 55$

$a_1^2 + 24a_1 + 140 < S + 55 < 6a_1 + 70$

$a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0$

$D = 81 - 70 = 11$

$a_1 = \frac{-9 \pm \sqrt{11}}{1} = -9 \pm \sqrt{11}$

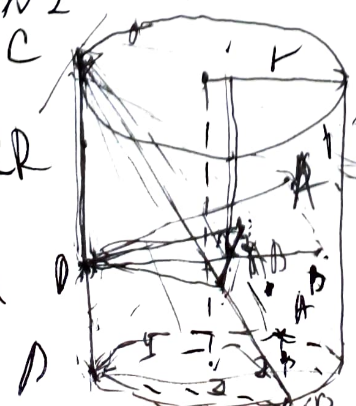
$-9 - \sqrt{11} \quad -9 \quad -9 + \sqrt{11}$

$-12, -11, -10, -8, -7, -6$

$32 - 4 = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

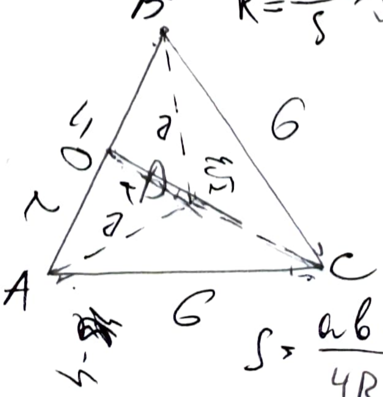
$36 - 4 = -9 - 5$

$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$



$\frac{AB}{\sin\alpha} = 2R$

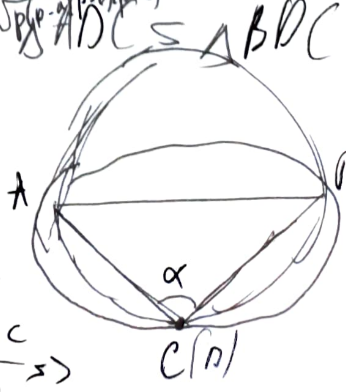
$R = \frac{AB}{2\sin\alpha}$

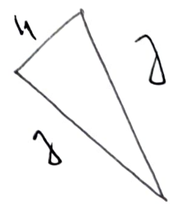


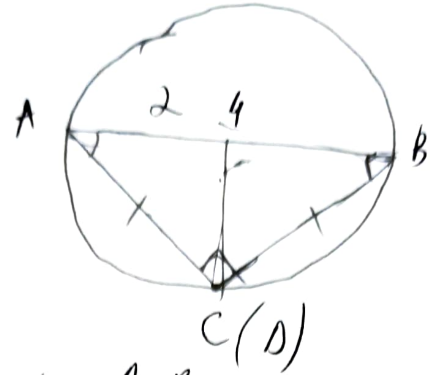
$R = \frac{abc}{S} = \frac{abc}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow$

$\triangle ABDC$







Отрезок AB

3.

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8$ 8π

$a=1,\ b=1$ $2\sqrt{2}$

$(x-1)^2+(y-1)^2 \le 8$

$a-b\le 0$

$0 \le a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8)$

$a^2+b^2 \le -4a+4b$ $\boxed{-4(a-b)\le 8}$ $\boxed{a-b\le -2}$

a^2+4a+b^2-4b $a^2+b^2\le 8$ $a-b \ge -2$ $a^2+b^2\le 8$

$a^2+4a+4+b^2-4b+4 \le 8$ $a^2\le 8$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$

$a \ge -2\sqrt{2}-2$ $-2\sqrt{2}\le a\le 2\sqrt{2}$ $a\le 2\sqrt{2}$

$b \le 2\sqrt{2}+2$ $-2\sqrt{2}\le b\le 2\sqrt{2}$ $b\ge -2\sqrt{2}$

$a^2+b^2\le 8$

$a-b \ge -(4\sqrt{2}+4)$ $a-b\le 4\sqrt{2}$

$a<1$ $b>1$

$a-b \ge -4\sqrt{2}-4$

$\begin{cases} a\ge -2\sqrt{2} \\ b\le 2\sqrt{2}\end{cases}$

$(a+2)^2\le 8$ $b<3$

$a\le 2\sqrt{2}-2$

$(a+2-\sqrt{8})(a+2+\sqrt{8})$ $a+2\le 2\sqrt{2}$

$a+2-\sqrt{2}\le 0$

$-2\sqrt{2}-2\le a\le 2\sqrt{2}-2$ $a^2+b^2=a-b+2$ $b\ge -2\sqrt{2}+2$

$a-b\ge -4\sqrt{2}$

$b-2\le 2\sqrt{2}$

$a=\sqrt{8}-2$ $a-b\le 4\sqrt{2}-4$ $[-4\sqrt{2}; -2)$

$-2\sqrt{2}+2\le b\le 2\sqrt{2}+2$

$a-b\le 4(\sqrt{2}-1)$

$a=-\sqrt{8}-2$

$a-b\ge -2$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101893**

ID профиля: **810874**

Вариант 23

Чистовик (1)

5. $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)\cdot\log_{(x+4)^2}(x+34)\cdot\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=$

$=\log_{x+4}(2x+23)\cdot 2\log_{(2x+23)}(-x-4)=2$ $\Rightarrow$ произведение всех логарифмов равно 2. Нам необходимо, чтобы два из них были равны, а третий отличался на 1, пусть равные логарифмы a, тогда:

$a\cdot a\cdot(a+1)=2$

$a^3+a^2-2=0$

$a=1$

Пусть $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=1$, тогда $x+34=(2x+23)^2$

$x+34=4x^2+92x+529$

$4x^2+91x+495=0$

$D=8281-7920=361=(19)^2$

$x_{1,2}=\frac{-91\pm 19}{8}=\left[\begin{array}{l}\frac{-110}{8}\\ -\frac{72}{8}=-9\end{array}\right.$, Проверка $\log_{\sqrt{-\frac{110}{8}+34}}\left(-\frac{110}{8}\cdot 2+23\right)$ $\wedge$ 0

значит $\frac{-110}{8}$ не подходит

$x=-9$: $\log_{\sqrt{34-9}}5=\log_{25}(-9+34)=\log_{\sqrt{2\cdot(-9)+23}}(9-4)$

+1

Пусть теперь $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=1$

$2x+23=x^2+8x+16$

$x^2+6x-7=0$

$x_1=1$ - не подходит, т.к. $-1-4<0$

$x_2=-7$

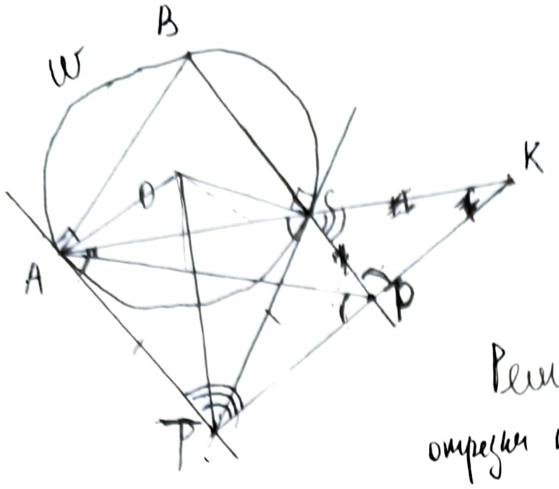
$x=-7$: $\log_{\sqrt{9}}3=1$ $\log_9(-7+34)=\frac{3}{2}$ - не подходит.

~~Ответ~~: $\log_{(x+4)^2}(x+34)=1$ имеет корень -9, который мы нашли и 2, который не подходит, т.к. $-2-4<0$

Ответ: $x=-9$

Чистовик (2)

6.



Дано: $\triangle ABC$ вписан в окружность w, O - центр. P, C, O, A - лежат на одной окружности. $S_{\triangle APK} = 15$, $S_{\triangle CPK} = 13$.

Найти: $S_{\triangle ABC}$ и AC, если $tg \angle ABC = \frac{4}{3}$

Решение. $TAOC$ - дельтоид ($TA = TC$ как отрезки кас. $OA = OC = r$), $OA \perp AT \Rightarrow \angle AOC + \angle ATC = 180^\circ$. С другой стороны, $\angle AOC + \angle APC = 180^\circ$, т.к. $APCO$ - вписанный четырёхуг. $\Rightarrow T$ лежит на одной окружности с A, O, C, P. OT - диаметр этой окружности. Тогда $KC \cdot KA = KP \cdot KT$

$\angle CPK = \angle APT$, т.к. $\angle TPC + \angle TAC = 180^\circ$, $\angle TPC + \angle CPK = 180 \Leftrightarrow \angle CPK = \angle TAC = \angle APT$ $\triangle KPC \sim \triangle KAT$ $\left(\frac{KC}{KT} = \frac{KP}{KA}, \angle CPK = \angle TAK\right)$ $\angle KCP = \angle ATC$

$\Rightarrow$ ~~$\angle PKC = \angle TAC$ и $\triangle CPK$ - равнобедр. $\triangle TAK$ - равнобедр.~~

$$\frac{AP \cdot PC}{2} \cdot \sin(180 - 2\angle TAC) = \frac{AP \cdot PC}{2} \cdot 2\sin\angle TAC \cdot \cos\angle TAC = 2 \quad (S_{\triangle ACP} = 2)$$

$$AP \cdot PC \cdot \sin\angle TAC \cdot \cos\angle TAC = 2 \qquad AP \cdot PK \cdot \sin\angle TAC = 13$$

$$\frac{PC \cos\angle TAC}{PK} = \frac{2}{13}$$

Чистовик (3)

4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=22 \\ НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

Очевидно, что числа a, b, c состоят из двух множителей – $2^x \cdot 11^y$, $x\le 16$, $y\le 19$

хотя ~~бы~~ в одном из 3 чисел должно быть только 1 двойка и только 1 11. Всего вариантов, где будут 1 двойка и 11 – $3\cdot 3=9$.

Также одно из чисел обязательно должно иметь множитель 2^{16} или 11^{19}. Таких вариантов ~~~~ $2\cdot 2=4$. Оставшееся число может иметь любую степень двойки (≤ 16 и ≤ 19) и одиннадцати. То есть $16\cdot 19$.

Всего: $9\cdot 4\cdot 16\cdot 19=10944$.

Ответ: 10944.

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, $\log_{(x+4)^2}(x+34)$, $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$a \cdot b \cdot c = 2$ 16

$2\log_{x+34}(2x+23)$ $\log_{x+4}\sqrt{x+34}$, $2\log_{2x+23}(-x-4)$

$2\log_{x+34}(2x+23) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_{x+34} x+4} = \log_{x+4}(2x+23)$ $x \neq 3$ $x \neq -11$ $\neq -33$

$-x-4>0$

$\log_{2x+23}(x+4)^2 \cdot \frac{1}{\log_{2x+23}(x+4)} = 2$ -7 -6 -5 $x<-4$

$x+4>0$

$2\log_{x+34}(2x+23) \cdot \frac{1}{2}\log_{(x+4)^2}(x+34)$ $x \neq -33$ $x>-4$

$x>-34$

-10 $\log_{24}$ $\log_6 24$ $x>-11,5$

-9

-8 $2\log_3 6$ $\log_{2x+23}(x+4)^2 + 1 =$

-7 $\log_3 36$

-6 $= \log_{2x+23}(x+4)^2 \cdot (2x+23)$

-5

$a \cdot b \cdot c = 2$ $\log_{\sqrt{x}}$

$a \cdot a \cdot (a+1) = 2$ $\sqrt{x+34} = 2x+23$

$a^3 + a = 2$ $x+34 = 4x^2 + 92x + 529$

$6+4=2$ $a^3 + a - 2 = 0$ $4x^2 + 91x + 495 = 0$

$a = 1$ $D = 91 \cdot 91 - 495 \cdot 16 =$

$(x+4)^2 = x+34$ $= 8281 - 7920 =$

$x^2 + 8x + 16 = x + 34$ $= 361 = 19^2$

$x^2 + 8x - 18 = 0$ $x_1 = \frac{-91 \pm 19}{8} = \left[\frac{-110}{8} \right.$

$x_1 + x_2 = -3$ $x_1 = -6$

$x_1 x_2 = -18$ $x_2 = 3$

$D = 9 + 72 = 81 = 9^2$ $x^2 + 7x - 18 = 0$

$x_1 = \frac{-3 \pm 9}{2} = \left[\begin{array}{l} -6 \\ 3 \end{array} \right.$ $x_1 + x_2 = -7$

$x_1 x_2 = -18$

$x_1 = -9$

$x_2 = -2$

$$\begin{array}{r} \times\ 23 \\ 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times\ 91 \\ 91 \\ \hline 91 \\ 819 \\ \hline 8281 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times\ 19 \\ 19 \\ \hline 171 \\ 19 \\ \hline 361 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times\ 495 \\ 16 \\ \hline 2970 \\ 495 \\ \hline 7920 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times\ 304 \\ 36 \\ \hline 1824 \\ 912 \\ \hline 10944 \end{array}$$

3·3 Черновик

4. $НОД(a, b, c) = \boxed{22}$ $a = 22k$ $b = 22m$ $c = 22n$.

$НОК(a, b, c) = 2^{16} \cdot 11^{19}$

$a \cdot b \cdot c = 2^{16} \cdot 11^{19}$

$1 \quad 1 \quad 1 \qquad 7 \cdot 8 \qquad 56$

$16 \Rightarrow 3^{15} \cdot 13$

13

202 2□2 2 1

$3 \cdot 2$

15 мест.

$2□2 \cdot 3 \cdot 2□2 \cdot 2 \cdot 2□□2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2□2□2$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

$16 \cdot 18 \cdot 17$

$18 \cdot 17 = 126 + 18 \cdot 10 = 306$

$306 \cdot 21 = 306 + 6120 = 6426$

$15 \quad 15 \cdot 14 = 210 \cdot 18 \cdot 17 = 210 \cdot 306 = 6426$

1 двойка и 1 11 у каких-то

14·13

7 чисел

$9 \cdot 14 \cdot 17$

$17 \cdot 14 = 68 + 170 = 238$

$238 \cdot 9 = 2142$

$3 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 17 = 2142$

2142

$238 \cdot 9 = 2142$

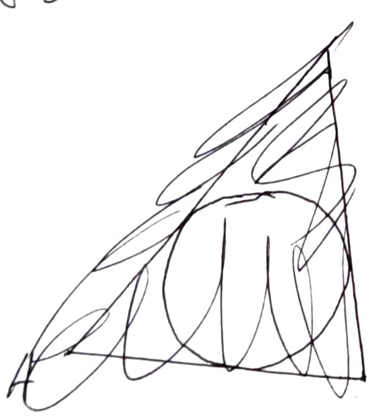
$2142 + 238 = 2380$

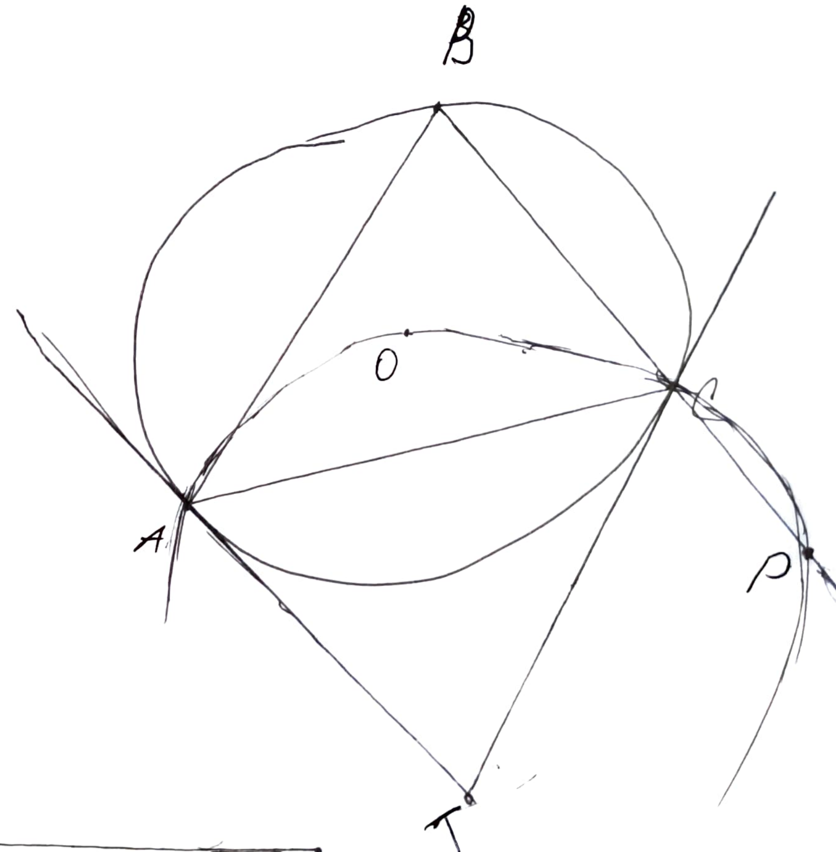
$2242 + 238 = 2520$

$-x - 4 > 0$

~~$x < -4$~~

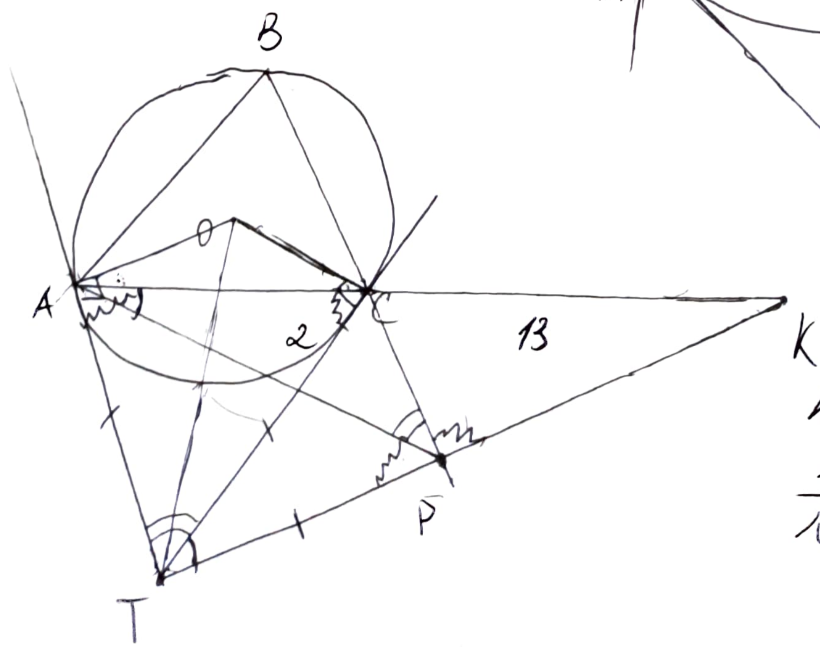
6.





$S_{\triangle APC} =$

$= 2$



$KC \cdot KA = KP \cdot KT$

$\frac{KC}{KP} = \frac{KT}{KA}$