Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101835**

ID профиля: **256812**

Вариант 23

Чистовик

Задача №1

1

$a_1 = c$

$a_2 = c+d$

$a_3 = c+2d$

$a_4 = c+3d$

$a_5 = c+4d$

$a_6 = c+5d$

$\dots$

$a_i = c+(i-1)d$

возрастающая арифметическая прогрессия $\Rightarrow d>0$

$a_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_1 \in \mathbb{Z} \rightarrow c \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow (c+d) \in \mathbb{Z} \rightarrow d \in \mathbb{Z}$

$c, d \in \mathbb{Z}$

$S = a_1 + a_2 + \dots + a_6 = 6c + d\cdot(1+2+3+\dots+5) = 6c + \frac{5\cdot 6}{2} d = 6c+15d$

$a_{10} = c+9d$

$a_{16} = c+15d$

$\Rightarrow a_{10}\cdot a_{16} = (c+9d)(c+15d) > S+39$

$a_{11} = c+10d$

$a_{15} = c+14d$

$\Rightarrow a_{11}\cdot a_{15} = (c+10d)(c+14d) < S+55$

$$\begin{cases}(c+9d)(c+15d) > S+39\\(c+10d)(c+14d) < S+55\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c^2+24cd+9\cdot 15d^2 > S+39\\c^2+24cd+140d^2 < S+55\end{cases}$$

$$\begin{cases}S+39 < c^2+24cd+9\cdot 15d^2\\c^2+24cd+140d^2 < S+55\end{cases}$$

$S+39+c^2+24cd+140d^2 < S+55+c^2+24cd+9\cdot 15d^2$

$\cancel{S}+39+\cancel{c^2}+\cancel{24cd}+140d^2 < \cancel{S}+55+\cancel{c^2}+\cancel{24cd}+9\cdot 15d^2$

$39+140d^2 < 55+135d^2$

$5d^2 < 16$

$1 < \frac{16}{5} < 4 \qquad 1 < \sqrt{\frac{16}{5}} < 2$

$$\begin{cases}5d^2 < 16\\d>0\\d\in\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d^2 < \frac{16}{5}\\d>0\\d\in\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d^2 < \frac{16}{5} < \frac{20}{5}\\d>0\\d\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\begin{cases}0<d<\sqrt{\frac{16}{5}}\\d\in\mathbb{Z}\end{cases} \longrightarrow d=1$$

$d=1$

Чистовик

Продолжение №1

(2)

$d=1$

$$\begin{cases} 1)\ a_{10}\cdot a_{16} > S+39 \\ 2)\ a_{11}\cdot a_{15} < S+55 \end{cases}$$

1) $a_{10}\cdot a_{16}=(C+9d)(C+15d)=(C+9)(C+15)$

$S=6C+15d=6C+15$

$a_{10}\cdot a_{16}>S+39$

$(C+9)(C+15)>6C+15+39$

$C^2+135+24C>6C+15+39$

$C^2+120+18C>39$

$C^2+18C+81>0$

$(C+9)^2>0 \Longrightarrow C\neq -9$

2) $a_{11}\cdot a_{15}=(C+10d)(C+14d)=(C+10)(C+14)$

$a_{11}\cdot a_{15}<S+55$

$(C+10)(C+14)<6C+15+55$

$C^2+140+24C<6C+70$

$C^2+18C+70<0$

$D=18^2-4\cdot 70=44$

$C=\dfrac{-18\pm\sqrt{44}}{2}=-9\pm\sqrt{11}$

$-9-4<-9-\sqrt{11}<-9-3$

$-13<-9-\sqrt{11}<-12$

$-9+3<-9+\sqrt{11}<-9+4$

$-6<-9+\sqrt{11}<-5$

$$\begin{cases} C\in\mathbb{Z} \\ C\in(-9-\sqrt{11};-9+\sqrt{11}) \\ -13<-9-\sqrt{11}<-12 \\ -6<-9+\sqrt{11}<-5 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} C\in\mathbb{Z} \\ -12\le C\le -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C\in\mathbb{Z} \\ -12\le C\le -6 \\ C\neq -9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} C=-6 \\ C=-7 \\ C=-8 \\ C=-9 \\ C=-10 \\ C=-11 \\ C=-12 \end{array}\right. \\ C\neq -9 \end{cases} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} C=-6 \\ C=-7 \\ C=-8 \\ C=-10 \\ C=-11 \\ C=-12 \end{array}\right.$$

$a_1=C$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} a_1=-6 \\ a_1=-7 \\ a_1=-8 \\ a_1=-10 \\ a_1=-11 \\ a_1=-12 \end{array}\right.$

Чистовик

Задача №3

$$\begin{cases} 1)\ (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ 2)\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8) \end{cases}$$

2) $a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8)$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le -4a+4b \\ a^2+b^2 \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+4a+b^2-4b \le 0 \\ a^2+b^2 \le 8 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

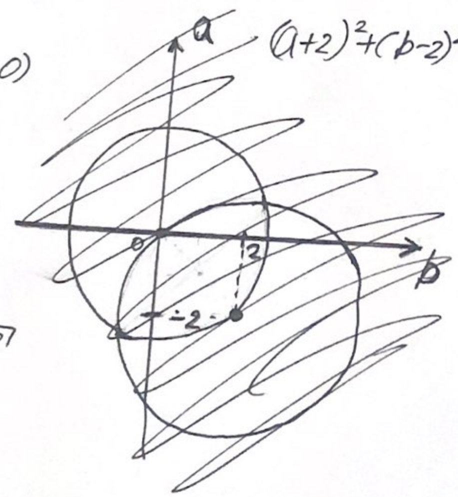
$$\begin{cases} a^2+4a+4+b^2-4b+4 \le 4+4 \\ a^2+b^2 \le 8 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} (a+2)^2+(b-2)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le 8 \end{cases}$$

Найдём точки пересечения этих кругов

2 круга с центрами $(0;0)$ и $(-2;2)$, радиусами $\sqrt{8}$



$(a+2)^2+(b-2)^2=8=a^2+b^2$

$(a+2)^2+(b-2)^2=a^2+b^2$

$\Downarrow$

$4a-4b+8=0$

$a-b+2=0$

$b=a+2$

$a^2+(a+2)^2=8$

$2a^2+4a+4=8$

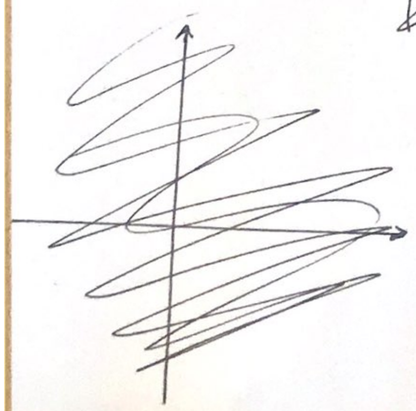
$2a^2+4a-4=0$

$a^2+2a-2=0$

$D=4+8=12$

$a=\frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{2}=-1\pm\sqrt{3}$

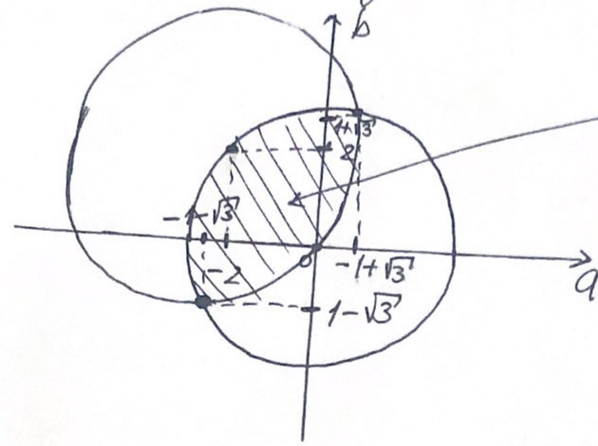
$\Leftarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-1+\sqrt{3} \\ b=1+\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1-\sqrt{3} \\ b=1-\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$



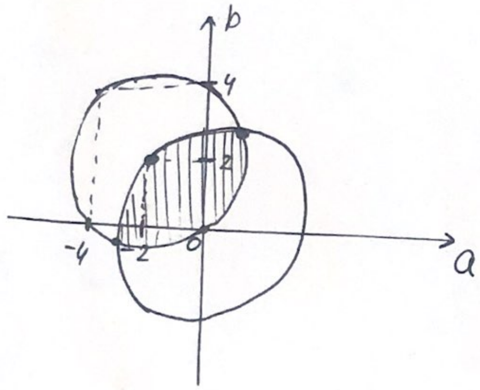
Чистовик

Продолжение №3

9

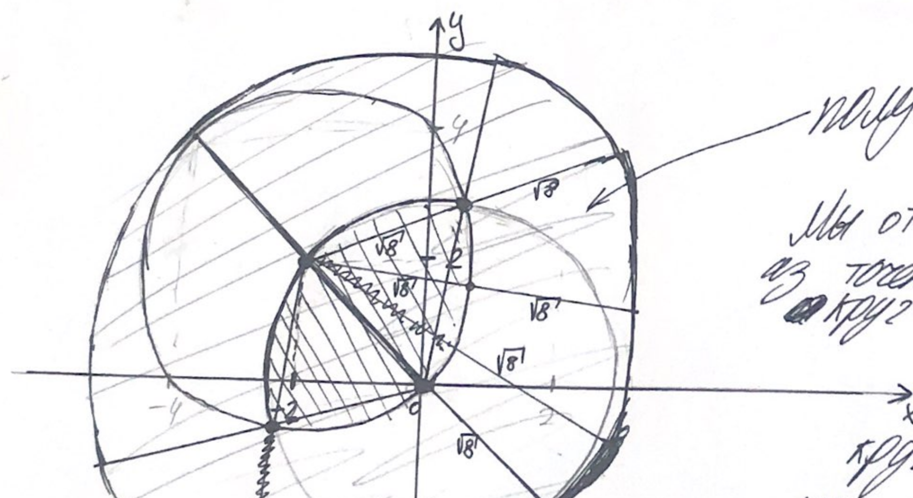


доступное множество 1
(a, b)



$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8$

окружность с центром
в (a, b) и $r=\sqrt{8}$



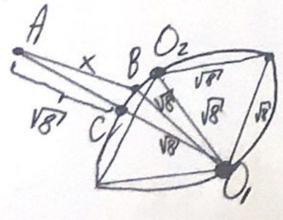
получаемое множество 2

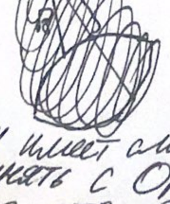
Мы откладываем от каждой из точек множества 1 круг с $r=\sqrt{8}$.

Т.к. множ. 1 — пересечение двух кругов с $r=\sqrt{8}$, то круги, откладываемые от внутренних точек "поглотятся"

$\Downarrow$ Множество 1 будет входить в множество 2

Можем откладывать только от граничных точек.





Причём имеет смысл брать точку на части окр. 1, соединять с O_1, проводить прямую и откладывать вне отр. $CA = r = \sqrt{8}$.

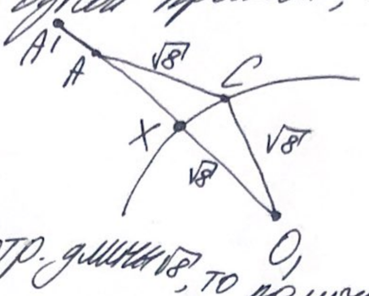
Чистовик Продолжение №3 (5)

Это будет "верхняя огибающая" ("граница области")

Если A, C, O_1 брать не на одной прямой, то по нер-ву Δ:

$O_1A < \sqrt{8} + \sqrt{8} = 2\sqrt{8}$

$O_1A < 2\sqrt{8}$



$AO_1 \cap \omega_1 = X$

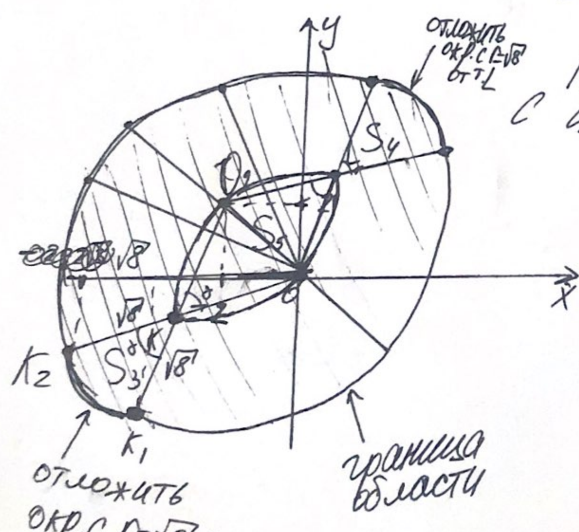
Тогда если отложить от т. X отр. длины $\sqrt{8}$, то получим т. A': $XA' = \sqrt{8}$

$XA = AO_1 - XO_1 < 2\sqrt{8} - \sqrt{8} = \sqrt{8}$

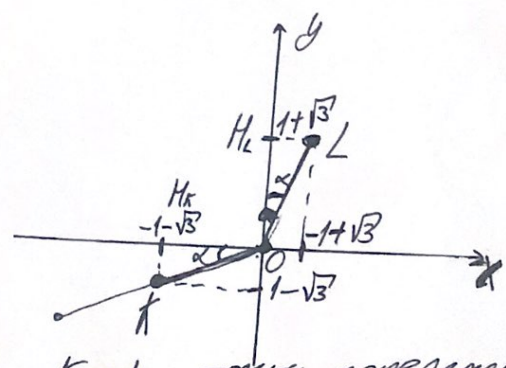
$XA < \sqrt{8}$

$\Rightarrow XA < XA'$ смогли получить точку дальше.

Чтобы найти границу:
соединяем O_1 со всеми точками участка ω_1 и продлеваем на $\sqrt{8}$ (откладываем отр. $\sqrt{8}$)
Аналогично соединяем O_2 со всеми точками участка ω_2 и откладываем отр. длины $\sqrt{8}$



Получаем 2 части кругов с центрами в $(0;0)$ и $(-2;2)$ и $r = 2\sqrt{8}$.



K и L — точки пересечения

$H_KO = 1+\sqrt{3} = H_LO$

$LH_L = H_KK = \sqrt{3} - 1$

$\angle H_KOK = \angle H_LOL = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}\right)$

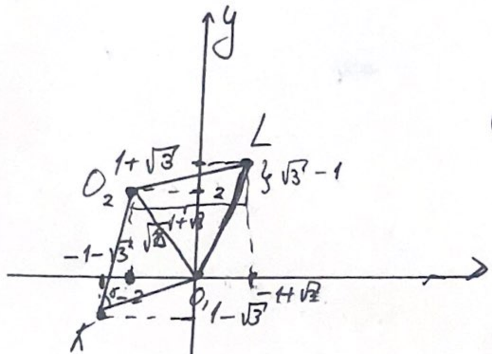
Чистовик Продолжение №3 (6)

$$\beta = 2\alpha + \frac{\pi}{2} = 2\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{2} = 2\mathrm{arctg}\left(\frac{3+1-2\sqrt{3}}{3-1}\right) + \frac{\pi}{2} =$$
$$= 2\mathrm{arctg}(2-\sqrt{3}) + \frac{\pi}{2}$$

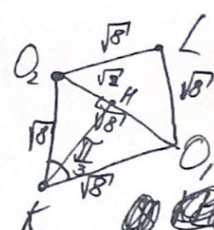
$$S_1 = \pi \cdot (2\sqrt{8})^2 \cdot \frac{2\mathrm{arctg}(2-\sqrt{3}) + \frac{\pi}{2}}{2\pi} = 16 \cdot \left(2\mathrm{arctg}(2-\sqrt{3}) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$S_2 = \pi \cdot (2\sqrt{8})^2 \cdot \frac{2\mathrm{arctg}(2-\sqrt{3}) + \frac{\pi}{2}}{2\pi}$$

S_5 – площадь п/ма O_2KO_1L



$KO_1 = O_2K = O_2L = LO_1 = \sqrt{8}$
$O_2O_1 = \sqrt{8}$



$$S_3 = \pi \cdot (\sqrt{8})^2 \cdot \frac{\gamma}{2\pi} = 4\gamma = 4 \cdot \frac{\pi}{3}$$
$$S_4 = 4\gamma = 4 \cdot \frac{\pi}{3}$$

$\gamma = \frac{\pi}{3}$

$$S_{O_2KO_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{8})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 8 = 2\sqrt{3}$$

$$S_5 = 2S_{O_2KO_1} = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

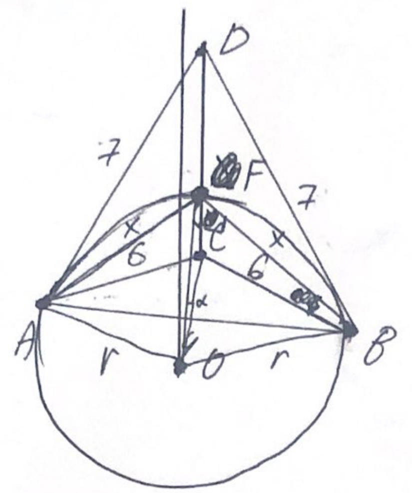
$$S_{общ} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 - S_5 = 32 \cdot 2\mathrm{arctg}(2-\sqrt{3}) +$$
$$+ 16\pi + 8 \cdot \underbrace{\gamma}_{\frac{\pi}{3}} - 4\sqrt{3} = 64\mathrm{arctg}(2-\sqrt{3}) + 16\pi + \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

Ответ: $S_{общ} = 64\mathrm{arctg}(2-\sqrt{3}) + \frac{56\pi}{3} - 4\sqrt{3}$

Чистовик

Задача №2

$A, B, C, D \in$ боковой поверхности цилиндра



Проведём пл. $\alpha \parallel$ основанию цилиндра через отр. AB

пл. $\alpha \cap CD = F$

$\triangle ACD = \triangle BCD$ (по III пр.: $AC = BC = 6$; $AD = BD = 7$; DC – общ.)

r – радиус цилиндра

r – радиус опис. окр. $\triangle AFB$

$DC \parallel$ оси цилиндра

$\Downarrow$ ось цилиндра $\perp$ пл. α

$DC \perp$ пл. α

$\Downarrow$

$\angle OFC = 90°$

$AF = x = FB$

$OF = AO = OB = r$

$\angle OFC = \alpha$

$\frac{FC}{r} = tg\alpha \Rightarrow FC = r\,tg\alpha$

$x = \sqrt{36 - r^2 tg^2\alpha}$

$r \to max \Rightarrow x \to max$

min r, если пл. ABC = пл. α

$\Downarrow$

$DC \perp$ пл. $ABC \Rightarrow DC \perp CB \Rightarrow DC = \sqrt{7^2 - 6^2} = \sqrt{49-36} = \sqrt{13}$

Ответ: $DC = \sqrt{13}$

$(C+9d)(C+15d) > S+39$

$(C+10d)(C+14d) < S+55$

$S+55 > C^2+140d^2+24Cd$

$\cancel{S}+55+\cancel{C^2}+\cancel{24Cd}+135d^2 > \cancel{C^2}+140d^2+\cancel{24Cd}+\cancel{S}+39$

$55-5d^2 > 39$

$5d^2 < \underbrace{55-39}_{16}$

$\begin{array}{r} 55 \\ -39 \\ \hline 16 \end{array}$

$0 < d < 2$ $\quad 0 < d^2 < \frac{16}{5} < 4$

$d=1$

$\frac{16}{5} < 4$

$C^2+24C+135 > S+39 = 6C+\underbrace{15+39}_{54}$

$\begin{array}{r} 135 \\ -54 \\ \hline 81 \end{array}$

$C^2+18C+81>0$ $\quad (C+9)^2>0$

$C \neq -9$

$C^2+24C+140 < \underbrace{S+55}_{6C+\underbrace{15+55}_{70}}$

$C^2+18C+70<0$

$\begin{array}{r} 18 \\ \times 20 \\ \hline 360 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 360 \\ -36 \\ \hline 324 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 324 \\ -280 \\ \hline 44 \end{array}$

$324-280=44$

$\frac{-18 \pm 2\sqrt{11}}{2}$

$-9+4=-5$ ✗

$-9+3=-6$ ✓

$-9 \pm \sqrt{11}$

$-9-4=-13$ ✗

$-9-3=-12$ ✓

$-6 \quad -7 \quad -8 \quad \cancel{-9} \quad -10 \quad -11 \quad -12$

c^2+18c

$c^2+24cd+140d^2 < 6c+70$

$c^2+18c+70<0$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ +18 \\ \hline 324 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 70 \\ \times 4 \\ \hline 280 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ -280 \\ \hline 44 \end{array}$$

$a^2+b^2 \leqslant \min(-4a+4b, 8)$

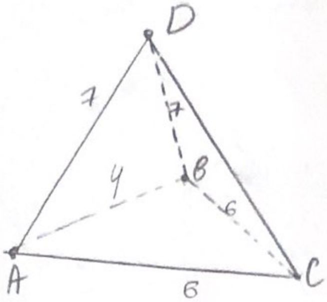
$\Downarrow$

$\begin{cases} a^2+b^2 \leqslant -4a+4b \\ a^2+b^2 \leqslant 8 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} a^2+4a+b^2-4b \leqslant 0 \\ a^2+b^2 \leqslant 8 \end{cases}$

$(a+2)^2+(b-2)^2-8 \leqslant 0$

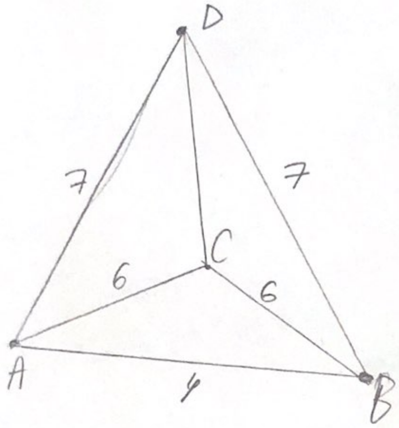


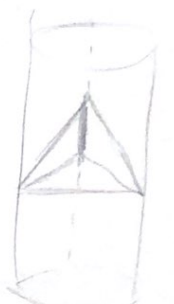
$\begin{cases} (a+2)^2+(b-2)^2 \leqslant 8 \\ a^2+b^2 \leqslant 8 \end{cases}$

$c = \dfrac{-18 \pm \sqrt{44}}{2} =$

$= -9 \pm \sqrt{11}$

$-9+\sqrt{}$

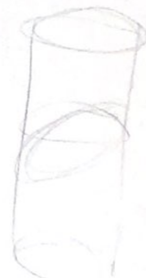




$$\begin{array}{r} 135 \\ -54 \\ \hline 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 120 \\ -39 \\ \hline 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ +39 \\ \hline 120 \end{array}$$



$4\cdot(9^2-70) =$
$= 4\cdot 11$

$-9-3=-12$
$-9-4=-13$
$-9+4=-5$
$-9+3=-6$

$55-39=16$

$$\begin{array}{r} 55 \\ -39 \\ \hline 16 \end{array}$$

$a_1 = c$

$a_2 = c+d$

$a_3 = c+2d$

$a_4 = c+3d$

$a_5 = c+4d$

$a_6 = c+5d$

$6c+d\cdot(\overbrace{1+2}^{3}+\overbrace{3+4}^{7}+5) =$

$= 6c+d\cdot \underbrace{\dfrac{5\cdot 6}{2}}_{15} = 6c+15d$

$55-39=16$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 9 \\ \hline 135 \end{array}$$

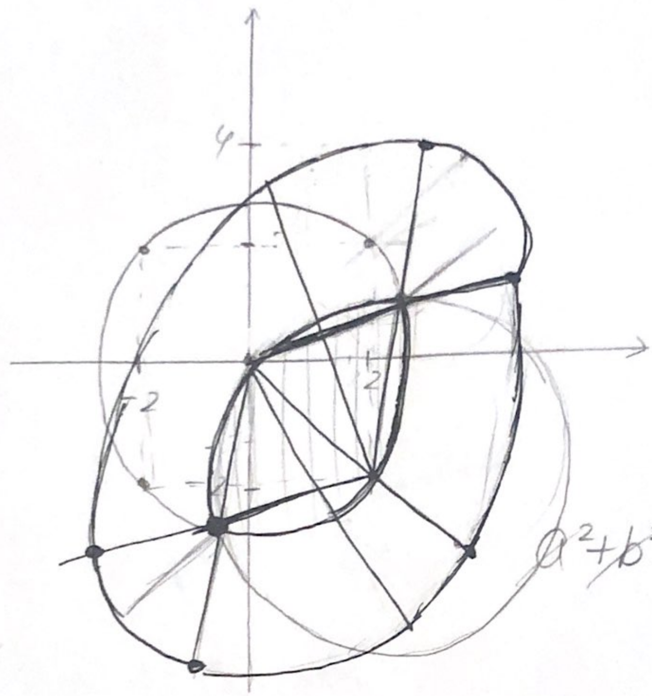
$$\begin{array}{r|l} 70 & 5 \\ -5 & \overline{16} \\ \hline 30 & \end{array}$$

$150-15=135$

$a_{10} = c+9d \qquad a_{16} = c+15d \qquad a_{11} = c+10d \qquad a_{15} = c+14d$

$(c+9d)(c+15d) = c^2+24cd+9\cdot15d^2 > 6c+15d+39$

$(c+10d)(c+14d) = c^2+140d^2+24cd < 6c+15d+55$



$$\cancel{a^2}+\cancel{b^2}=\cancel{a^2}+4a+4+\cancel{b^2}-4b+4$$

$$a-b+2=0$$

$$b=a+2$$

$$a^2+(a+2)^2=8$$

$$2a^2+4+4a=8$$

$$2a^2+4a-4=0$$

$$a^2+2a-2=0$$

$$D=4+8=12$$

$$a=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{2}=-1\pm\sqrt{3}$$

$$a=-1+\sqrt{3}$$

$$b=1+\sqrt{3}$$

$$\cancel{1+3+1+3}$$

$$8$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 3 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$48+8=56$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101835**

ID профиля: **256812**

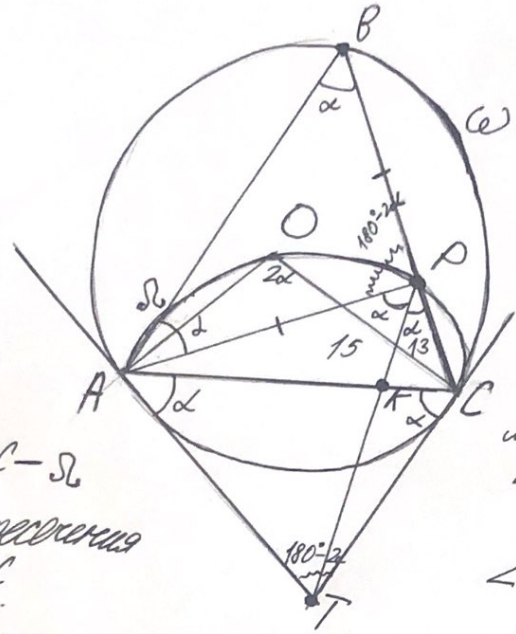
Вариант 23

Чистовик

①

Задача№6

а)



$\angle ABC = \alpha$

AT и CT – касательные из т. T к окр ω

$\Downarrow$

$\angle CAT = \underbrace{\angle BAC}_{\alpha} = \angle ACT$

(По теореме об угле между касательной и хордой)

опис. окр. $\triangle AOC$ – Ω

P – точка пересечения окр. Ω и отр. BC

$\angle AOC = 2\alpha$ (центральный угол, опирающийся на $\cup AC$ окр. ω)

$\angle ATC = 180° - \angle TAC - \angle ACT = 180° - 2\alpha$

$\angle AOC = 2\alpha \quad \angle ATC = 180° - 2\alpha$

$\angle AOC + \angle ATC = 2\alpha + 180° - 2\alpha = 180°$

$\Downarrow$

$AOCT$ – впис. четырёхуг. $\Rightarrow$ A, O, C, T лежат на одной окр.

Через 3 точки (A, O, C) можно провести только одну окр. (Ω)

$\Downarrow$

$T \in \Omega$

$\Downarrow$

A, O, P, C, T лежат на одной окр Ω

$\Downarrow$ $\Rightarrow \angle APC = 2\alpha$

$APCT$ – впис. четырёхуг. $\Rightarrow$ $\angle CPT = \angle CAT = \alpha$

$\angle CPT = \alpha \Rightarrow \angle CPK = \alpha$

$\angle ABC = \alpha$

$\triangle BCA \sim \triangle PCK$ ($\angle CPK = \alpha = \angle ABC$; $\angle BCA$ – общий)

$k = \frac{BC}{PC}$ $\Leftarrow$ Пусть они подобны с коэффициентом k

$\Downarrow$

Чистовик Продолжение б (2)

$k = \frac{BC}{PC}$

$\frac{S_{BCA}}{S_{PCK}} = k^2$

$S_{PCK} = 13$ $\Rightarrow S_{BCA} = k^2 \cdot 13$

AH – высота из т. A на BC $AH = h$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} h \cdot BC$

$S_{APC} = \frac{1}{2} h \cdot PC$ $\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{BC}{PC} = k$

$S_{ABC} = k \cdot S_{APC} = k \cdot (15+13) = k \cdot 28$

$k \cdot 28 = S_{ABC} = k^2 \cdot 13$

$\Downarrow$

$k \cdot 28 = k^2 \cdot 13 \Rightarrow 28 = k \cdot 13 \Rightarrow k = \frac{28}{13}$

$S_{ABC} = \frac{28^2}{13} = \frac{784}{13}$

$\angle APB = 180° - \angle APC = 180° - 2\alpha$

$\angle BAP = 180° - \angle APB - \angle ABP =$
$= 180° - 180° + 2\alpha - \alpha$

$\angle BAP = \alpha$

$\angle BAP = \angle PAB = \alpha$

$\Downarrow$

ΔBPA – равнобедр. $\Rightarrow AP = BP$

Ответ: $S_{ABC} = \frac{28^2}{13} = \frac{784}{13}$

б)

$\angle ABC = arctg \frac{4}{7}$

$\alpha = arctg \frac{4}{7}$

$tg\alpha = \frac{4}{7}$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha > 0$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{4}{7}$

$4\sqrt{1-\sin^2\alpha} = 7\sin\alpha$

$16 - \sin^2\alpha = 49\sin^2\alpha$

~~$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{53}} = \frac{7}{\sqrt{53}}$~~

~~$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{53}} \cdot \frac{7}{\sqrt{53}} = 2 \cdot \frac{14}{53} = \frac{14}{53}$~~

~~$AP = x$~~

Чистовик Продолжение №6

③

$S_{APK} = \frac{1}{2} AP \cdot PK \cdot \sin\alpha$

$S_{CPK} = \frac{1}{2} CP \cdot PK \cdot \sin\alpha \Rightarrow \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AP}{CP}$

$\Downarrow$

$\frac{15}{13} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AP}{CP}$

$CP = x \Rightarrow AP = \frac{15}{13}x$

$S_{APC} = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{13} x \cdot x \cdot 2 \cdot \frac{14}{53} =$

$= \frac{15}{13} x^2 \cdot \frac{14}{53}$

$S_{APC} = 15 + 13 = 28 \Rightarrow 28 = \frac{15}{13} x^2 \cdot \frac{14}{53}$

$\Downarrow$

$2 = \frac{15}{13} x^2 \cdot \frac{1}{53}$

$x^2 = \frac{2 \cdot 13 \cdot 53}{15}$

Т. cos для $\triangle APC$:

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP \cdot PC \cdot \cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{49}{53} - 1 = \frac{98 - 53}{53} = \frac{45}{53}$

$AC^2 = \left(\frac{15}{13} x\right)^2 + x^2 - 2 \cdot \frac{15}{13} x \cdot x \cdot \frac{45}{53} =$

$= \frac{15^2}{13^2} \cdot \frac{2 \cdot 13 \cdot 53}{15} + \frac{2 \cdot 13 \cdot 53}{15} - 2 \cdot \frac{15}{13} \cdot \frac{2 \cdot 13 \cdot 53}{15} \cdot \frac{45}{53} =$

$= \frac{15}{13} \cdot 2 \cdot 53 + \frac{13}{15} \cdot 2 \cdot 53 - 4 \cdot 45 = 2 \cdot 53 \cdot \left(\frac{15}{13} + \frac{13}{15}\right) - 4 \cdot 45 =$

$= 2 \cdot 53 \cdot \frac{197 \cdot 2}{13 \cdot 15} - 4 \cdot 45 = 4\left(\frac{53 \cdot 197}{13 \cdot 15} - 45\right) = 4 \cdot 1666$

$AC = \sqrt{4 \cdot 1666} = 2\sqrt{1666}$

Ответ: $AC = 2\sqrt{1666}$

Чистовик

Продолжение №6

$16 = 65\sin^2\alpha$

$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{65}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{65}} \cdot \frac{7}{\sqrt{65}} = \frac{28}{65} \cdot 2$

$S_{APC} = \frac{1}{2} AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{15}{13} x \cdot x \cdot \cancel{2} \cdot \frac{28}{65} =$

$= \frac{x^2}{13^2} \cdot 28$

$S_{APC} = 28 \Longrightarrow \frac{x^2}{13^2} \cdot 28 = 28$

$x^2 = 13^2 \Longrightarrow x = 13 \Rightarrow AP = \frac{15}{13}x = 15$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{49}{65} - 1 = \frac{33}{65}$

Т. cos для $\triangle APC$:

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP \cdot PC \cdot \cos 2\alpha$

$AC^2 = 15^2 + 13^2 - 2 \cdot 15 \cdot 13 \cdot \frac{33}{65} = 15^2 + 13^2 - 2 \cdot \cancel{5} \cdot 3 \cdot \cancel{13} \cdot \frac{33}{\cancel{13 \cdot 5}} =$

$= 15^2 + 13^2 - 2 \cdot 3 \cdot 33 = 196 = 14^2$

$AC = 14$

Ответ: $AC = 14$

ЧИСТОВИК

5

Задача №4

$НОД(a,b,c)=22=2\cdot 11 \Rightarrow a \vdots 22$

$b \vdots 22$

$c \vdots 22$

$НОК(a,b,c)=2^{16}\cdot 11^{19}$

$d=НОД(a,b,c)=2\cdot 11$

$a=k_1\cdot d$

$b=k_2\cdot d$

$c=k_3\cdot d$

$abc=k_1k_2k_3\cdot d^3$

$НОК(a,b,c)=k_1k_2k_3\cdot d \Rightarrow abc=НОК(a,b,c)\cdot d^2$

$\Downarrow$

$abc=2^{16}\cdot 11^{19}\cdot 2^2\cdot 11^2=$

$=2^{18}\cdot 11^{21}$

НОК(a,b,c) делится только на 2^{16} и 11^{19}

$\Downarrow$

a, b, c могут делиться только на степень 2 или 11.

Т.к. если бы делились на ещё какое-то p, то $k_1 \cdot k_2 k_3 \vdots p \Rightarrow НОК(a,b,c)=\underbrace{k_1\cdot k_2\cdot k_3}_{\vdots p}\cdot d \vdots p$

пр-е.

$\Downarrow$

$a=2^{t_1}\cdot 11^{s_1}$

$b=2^{t_2}\cdot 11^{s_2}$

$c=2^{t_3}\cdot 11^{s_3}$

$НОД(a,b,c)=2^{\min(t_1,t_2,t_3)}\cdot 11^{\min(s_1,s_2,s_3)}=2^1\cdot 11^1$

$НОК(a,b,c)=2^{\max(t_1,t_2,t_3)}\cdot 11^{\max(s_1,s_2,s_3)}=$

$=2^{16}\cdot 11^{19}$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \min(t_1,t_2,t_3)=1 \\ \min(s_1,s_2,s_3)=1 \\ \max(t_1,t_2,t_3)=16 \\ \max(s_1,s_2,s_3)=19 \end{cases}$$

Пусть $t_1=1$, $t_2=16$, тогда $\begin{cases} t_3\in[1;16] \\ t_3\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$ 16 вариантов для t_3

Чистовик

Продолжение 6

$t_1=1 \quad t_2=16$

если $\begin{cases} t_3 \in [2;15] \\ t_3 \in \mathbb{Z} \end{cases}$ то таких вариантов 14 для t_3

В тройке будут 3 различных числа

Их можно менять местами:

$t_1 \; t_2 \; t_3$

3·2 вариантов мест

t_1, t_2, t_3 – 3 различны

$14 \cdot 6 = 84$ варианта

Если $t_3 = 16$

1 16 16

3 варианта расставить (выбрать место для 16)

Если $t_3 = 1$

1 1 16

3 варианта расставить (выбрать место для 16)

Итого для выбора упорядоченной тройки (t_1, t_2, t_3) $84+3+3=90$ вариантов

Теперь рассмотрим (S_1, S_2, S_3)

Пусть $S_1=1$, $S_2=19$, тогда $\begin{cases} S_3 \in [1;19] \\ S_3 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 19$ вариантов для S_3

если $\begin{cases} t_3 \in [2;18] \\ t_3 \in \mathbb{Z} \end{cases}$ то таких вариантов 17

В тройке будут 3 различных числа: кол-во вариантов их переставить: 3·2

$17 \cdot 6 = 102$ варианта

Если $S_3 = 19$

1 19 19 3 варианта переставить

Если $S_3 = 1$ 1 1 19 3 варианта их переставить

Итого для выбора упорядоченной тройки (S_1, S_2, S_3) $102+3+3=108$ вариантов.

$a = 2^{t_1} \cdot 11^{s_1}$

$b = 2^{t_2} \cdot 11^{s_2}$ $\Rightarrow$ Кол-во упорядоченных троек (a,b,c) = кол-во упорядоч. троек $(t_1, t_2, t_3) \cdot$ кол-во упорядоч. троек $(s_1, s_2, s_3) =$

$c = 2^{t_3} \cdot 11^{s_3}$

$= 90 \cdot 108 = 9720$

Ответ: 9720

Чистовик   Задача №5   8

$$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$$

$$\log_{(x+4)^2}(x+34)$$

$$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$$

$$\begin{cases} x > -34 \\ x > -\frac{23}{2} \\ x < -4 \end{cases} \Rightarrow -\frac{23}{2} < x < -4$$

$B > 0$

$C > 0$

Замены:

$-x-4 = A$

$\sqrt{2x+23} = B$

$\sqrt{x+34} = C$

$$\log_C(B^2) = 2\log_C(B)$$

$$\log_{A^2} C^2 = 2\log_{A^2} C = \frac{2}{\log_C A^2} = \frac{2}{2\log_C A} = \frac{1}{\log_C A}$$

$\log_B A$

1)

$$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34)$$

$$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \frac{1}{\log_{(x+34)}(x+4)^2}$$

$$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) \cdot \log_{(x+34)}(x+4)^2 = 1$$

$$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) \cdot \log_{\sqrt{x+34}}(-x-4) = 1$$

$$-\frac{23}{2} < x < -4$$

$$\Downarrow$$

$$0 < 2x+23 < 15$$

$$22{,}5 < x+34 < 30$$

$$\sqrt{x+34} < 6$$

~~$\log_{\sqrt{x+34}}((2x+23)(x+4)) = 1$~~

~~$(2x+23)(x+4) = \sqrt{x+34}$~~

~~$x < -4 \to (2x+23)(x+4) = \sqrt{x+34}$~~

~~$\ldots = 6$~~

Чистовик

Продолжение №5

2)

$$\log_{(x+4)^2}(x+34) = \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$$

$$\log_{(-x-4)}\left(\sqrt{x+34}\right) = \frac{1}{\log_{(-x-4)}\left(\sqrt{2x+23}\right)}$$

$$\log_{(-x-4)}\left(\sqrt{x+34}\right) \cdot \log_{(-x-4)}\left(\sqrt{2x+23}\right) = 1$$

3)

$$\log_B A = \frac{1}{\log_C A}$$

$$\log_B A \cdot \log_C A = 1$$

$$\log_A B \cdot \log_A C = 1$$

$$\log_A B = n$$

$$\log_A C = \frac{1}{n} \Longrightarrow$$

$$y_1 = \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \frac{1}{\log_{(2x+23)}(\sqrt{x+34})}$$

$$y_2 = \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = \log_{(2x+23)}(x+4)^2$$

$$\frac{1}{\log_{(2x+23)}(\sqrt{x+34})} = \log_{(2x+23)}(x+4)^2$$

$$1 = \log_{2x+23}$$

$34 - 11,5 = 22,5$

$$197 \times 53$$
$$591 + 985 = 10441$$

$$45 \times 45$$
$$225 + 45 = 675$$

$$675 \times 13$$
$$2025 + 675 = 8775$$

$$49 + 16 = 65$$

$$49 + 16$$

$$10441 - 8775 = 1666$$

$$1666 : 4 = 41$$
$$-16,\ 06,\ -4,\ 26$$

$$65 : 5 = 13$$
$$-5,\ 15$$

$$65 - 16 = 49$$

$$15 \times 5 = 75$$

$$1666 : 2 = 833$$
$$-16,\ 06,\ -6,\ 06$$

$$\cancel{833 : 13 = 6}$$
$$\cancel{-78,\ 53}$$

$$65 : 15$$

$$98 - 65$$

$$4 \cdot \frac{14}{65}$$

$$49 \times 2 = 98$$

$$13 \times 6 = 78$$

$$13 \cdot$$

$$98 - 65 = 33$$

$$833 : 53 = 1$$
$$-53,\ 303$$

$$\times 53$$
$$7$$

$$49 \times 2 = 98$$

$$a = k_1 \cdot d$$
$$b = k_2 \cdot d$$
$$c = k_3 \cdot d$$

$$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot d = \frac{abc}{d^2} = \text{НОК}$$

abc

$$98 - 65 = 53$$

$$225 + 169$$
$$4$$

$$\frac{2\cdot 7\cdot 2}{53}$$

$$28=\frac{13}{15}x\cdot x\cdot \sin 2\alpha\cdot\frac{1}{2}=\frac{14}{53}\cdot\frac{13}{15}x^2$$

$$2=\frac{13}{53\cdot 15}x^2$$

$$x^2=\frac{2\cdot 53\cdot 15}{13}$$

$$x^2+\frac{13^2}{15^2}x^2-2\cdot\frac{13}{15}x^2\cdot\frac{45}{53}=$$

$$=\frac{2\cdot 53\cdot 15}{13}+\frac{2\cdot 53\cdot 13}{15}-2\cdot\frac{\cancel{13}\cdot 2\cdot\cancel{53}\cdot\cancel{15}}{\cancel{15}\cdot\cancel{13}}\cdot\frac{45}{\cancel{53}}$$

15×15: 75, 15, 225

13×13: 39, 13, 169

$45 \times 4 = 180$

$225 + 169 = 394$

$2\cdot 53=106$

$$106\cdot\left(\frac{15}{13}+\frac{13}{15}\right)$$

13×13: 39, 13, 169

$394 - 198 = 196$

$99 \times 2 = 198$

14×14: 56, 14, 196

2 8

4 64

197×53: 591, 985, 10441

13×15: 65, 3

15×15: 75, 15, 225

~~394 | 4~~
~~36 | 9~~
~~34~~

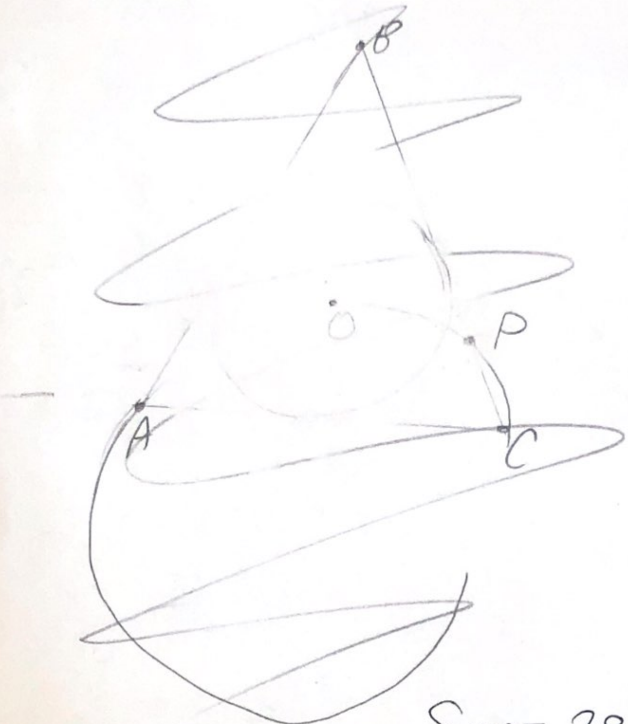
394 | 2
2 | 197
19
18
14

13×15: 65, 13, 195

$225 + 169 = 394$

~~185×45: 925, 740, 8325~~

195×45: 975, 780, 8775



$$\frac{BC}{PC} = k$$

$$S_{ABC} = 13 \cdot k^2$$

$$KP \cdot KT = AK \cdot KC$$

$$S_{ABC} = 28 \cdot \frac{BC}{PC} = k \cdot 28$$

$$13k^2 = 28k$$

$$13k = 28$$

$$\frac{28x}{\sin\alpha} = 2R$$

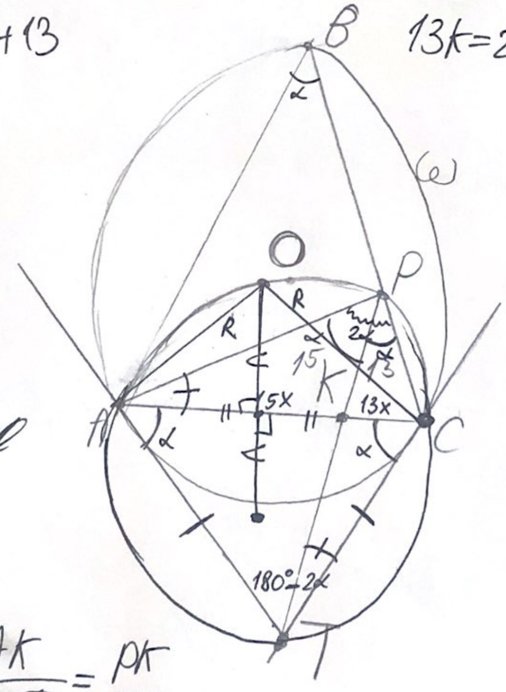
$$\frac{14x}{\sin\alpha} = R$$

$$k = \frac{28}{13}$$

$\underline{S_{ABC}}$

$15 + 13$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 28 \\ \hline 224 \\ +56 \\ \hline 784 \end{array}$$



упорядоченные

$$\frac{AK}{PK} = \frac{KT}{CK}$$

$$AK \cdot CK = PK \cdot KT$$

$$15 \cdot 13x^2 = PK \cdot KT$$

$$\frac{AK}{KT} = \frac{PK}{KC}$$

$AK \cdot KC$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 28 \\ \hline 224 \\ +56 \\ \hline 884 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 30 \\ \hline 840 \\ 840 \\ -56 \\ \hline 784 \end{array}$$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{4}{53}} = \frac{7}{\sqrt{53}}$

$\frac{AP}{PC} = \frac{15}{13}$

$\frac{BP}{PC} = \frac{15}{13}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha =$
$= 2\cdot\frac{2}{\sqrt{53}}\cdot\frac{7}{\sqrt{53}} = \frac{2\cdot 14}{53}$

$\begin{array}{r} 108 \\ \times\ 90 \\ \hline 9720 \end{array}$

$\frac{BC}{PC} = \frac{28}{13}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 =$
$= \frac{8}{53} - 1 = \frac{45}{53}$

$\left(\frac{28}{13}\right)^2 \cdot 13$

$\begin{array}{r} 53 \\ -\ 8 \\ \hline 45 \end{array}$

$x \cdot \frac{13}{15}x \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha =$
$= x^2 \cdot \frac{13}{15} \cdot \frac{14}{53}$

$AP = x$
$PC = \frac{13}{15}x$

x^2

$\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 6 \\ \hline 108 \end{array}$

$\frac{S_{APC}}{S_{ABC}} = \frac{h_P}{h_B} = \frac{28}{\frac{28^2}{13}} = \frac{13}{28}$

$\begin{array}{r} 108 \\ \times\ 90 \\ \hline 9720 \end{array}$

$h_B = x$
$h_P = \frac{13}{28}x$

$14\cdot 6 + 6 = 15\cdot 6 = 90$
$17\cdot 6 + 6 = 18\cdot 6$

$AK = \frac{15}{13x}\cdot 28 = \frac{15\cdot 28}{13x}$

$KC = \frac{\cancel{13}}{\cancel{13x}}\cdot 28 = \frac{28}{x}$

$\begin{array}{r} 49 \\ \times\ 2 \\ \hline 98 \end{array}$

$\begin{array}{r} 98 \\ -\ 53 \\ \hline 45 \end{array}$

2 3 4 5 6 7 8 9 10
11 12 13 14 15

$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 6 \\ \hline 84 \end{array}$

$1 - \frac{28}{53}$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 6 \\ \hline 102 \end{array}$

$2\cdot\frac{49}{53}$