Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101661**

ID профиля: **352735**

Вариант 23

Чистовик.

№1

$$\begin{cases} a_{10}a_{16} > S+39 \\ a_{11}a_{15} < S+55 \end{cases}$$

$$S = \frac{a_1+a_6}{2}\cdot 6 = 3(2a_1+5d) = 6a_1+15d$$

$$\begin{cases} (a_1+9d)(a_1+15d) > 6a_1+15d+39 \\ (a_1+14d)(a_1+10d) < 6a_1+15d+55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+24a_1d+135d^2 > 6a_1+15d+39 \\ a_1^2+24a_1d+140d^2 < 6a_1+15d+55 \end{cases}$$

$$39-135d^2 < a_1^2+24a_1d-6a_1-15d < 55-140d^2$$

$$39-135d^2 < 55-140d^2$$

$$5d^2 < 16$$

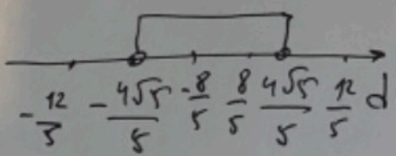
$$|d| < \frac{4\sqrt5}{5}$$

$$-\frac{4\sqrt5}{5} < d < \frac{4\sqrt5}{5}$$

$$2 < \sqrt5 < 3$$

$$\frac{8}{5} < \frac{4\sqrt5}{5} < \frac{12}{5}$$

$$-\frac{12}{5} < \frac{-4\sqrt5}{5} < -\frac{8}{5}$$



Т.к прогрессия возрастающая и состоит из целых чисел, то $\begin{cases} d\in \mathbb{Z} \\ d>0 \end{cases}$ $d\in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} -\frac{4\sqrt5}{5} < d < \frac{4\sqrt5}{5} \\ d\in \mathbb{N} \end{cases}$$

$d=1$

(т.к $2 \vee \frac{4\sqrt5}{5}$

$5 \vee 2\sqrt5$

$25>20$)

Подставим $d=1$ в изначальную систему

$$\begin{cases} a_1^2+24a_1+135 > 6a_1+15+39 \\ a_1^2+24a_1+140 < 6a_1+15+55 \end{cases}$$

Чистовик.

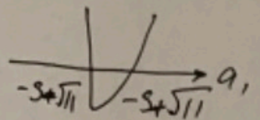
$$\begin{cases} a_1^2+18a_1+81>0 & (1) \\ a_1^2+18a_1+70<0 & (2) \end{cases}$$

(2) $a_1^2+18a_1+70<0$

Нули: $a_1^2+18a_1+70=0$

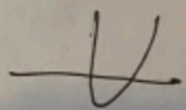
$D = 81-70=11$

$a_1 = -9 \pm \sqrt{11}$



$-9-\sqrt{11} < a_1 < -9+\sqrt{11}$

(1) $a_1^2+18a_1+81>0$



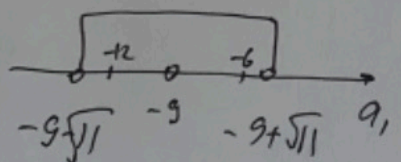
$(a_1+9)^2>0$

$a_1 \in R \setminus \{-9\}$

$$\begin{cases} a_1 \neq -9 \\ -9-\sqrt{11} < a_1 < -9+\sqrt{11} \end{cases}$$

$-13 < -9-\sqrt{11} < -12$

$-6 < -9+\sqrt{11} < -5$



$a_1 \in Z$ из условия задачи

a_1 может принимать значение:

$-12; -11; -10; -8; -7; -6.$

Ответ: $-12; -11; -10; -8; -7; -6.$

Чистовик.

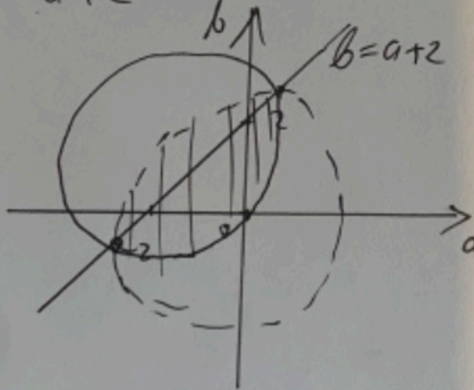
№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le \min(-4a+4b,8)\end{cases}$$

$a^2+b^2\le \min(-4a+4b,8)$

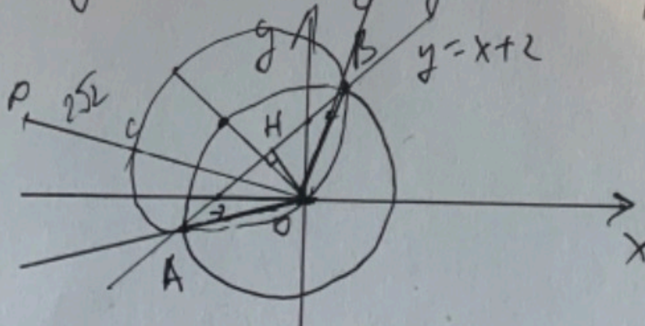
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 8\\ -4a+4b\ge 8\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\le 4b-4a\\ 4b-4a\le 8\end{cases}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 8 & -\text{кр}_1((0;0)\ 2\sqrt{2})\\ b\ge a+2\end{cases}\\ \begin{cases}(a+2)^2+(b-2)^2\le 8 & -\text{кр}_2((-2;2);2\sqrt{2})\\ b<a+2\end{cases}\end{array}\right.$$

Центры кр1 и кр2 симметричны относительно прямой $b=a+2$ и центры окружностей равны, значит окружности симметричны отн. прямой $b=a+2$



В каждой точке полученной фигуры мы должны построить окр(a;b;$2\sqrt{2}$) ~~Это~~ Объединение этих фигур и есть искомое.

$(x-a)^2+(y-b)^2\le 8$ задает кр3((a;b);$2\sqrt{2}$)



$OH\perp AB$

$H\in AB$

$H\in y=x+2$

$OH=\sqrt{2}$

$AO=2\sqrt{2}\ (=R)$

$\triangle AOH$. $\angle H=90^\circ$ $\angle HAO=30^\circ$ т.к

$2OH=AO$

Из равнобедренного $\triangle AOB$ $\angle OBA=30^\circ$, $\angle AOB=120^\circ$

3

№1

Чистовик.

A - самая дальняя точка. Эти точки задают окр ((0;0); $4\sqrt{2}$) и ограниченные прямыми OA и OB.

$S_{сект_1 AOB} = \frac{S_{кр} \cdot 120°}{360} = \pi (4\sqrt{2})^2 \cdot \frac{120}{360} = \frac{1}{3} 32\pi = \frac{32\pi}{3}$

$S_1 = S_{сект} - S_{AOB} = \frac{32\pi}{3} - \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin 120°}{2} = \frac{32\pi}{3} - 2\sqrt{3}$

$S_{сект_2 B} = \frac{(2\sqrt{2})^2 \pi \cdot 30}{360} = \frac{2\pi}{3}$

кр($R=2\sqrt{2}$

$S_{сект_2} = S_{сек_3}$

$S_2 = 2S_{сект_2} = \frac{4\pi}{3}$

$S_3 = S_1 + S_2 = \frac{4\pi}{3} + \frac{32\pi}{3} - 2\sqrt{3} = 12\pi - 2\sqrt{3}$

$S_M = 2S_3 = 24\pi - 4\sqrt{3}$

Ответ: $24\pi - 4\sqrt{3}$

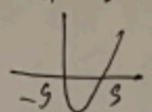
4

21101661 (U352735 M1302710)

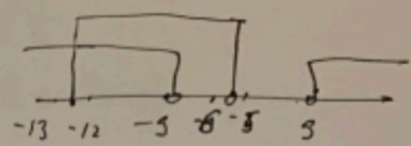
Чернетка

$a_1^2+18a_1+81=0$

$a_1=-9$



$\left[\begin{array}{l} a_1 > 9 \\ a_1 < -9 \end{array}\right.$



$a_1^2+18a_1+\cancel{85}\,70=0$

$D=81-\cancel{85}\,70=11$

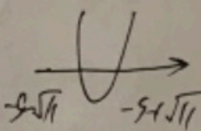
$a_1=-9\pm\sqrt{11}$

$a_1\in(-9-\sqrt{11};-9)$

-12

-11

-10



$-9-\sqrt{11}<a_1<-9+\sqrt{11}$

$3<\sqrt{11}<4$

$-6<-9+\sqrt{11}<-5$

$-4<-\sqrt{11}<-3$

$-13<-9-\sqrt{11}<-12$

24
12
48
24

24
11
24
24

$a_{10}=$

$144-288+135>-72+15+39$ (144; 54)

$-9>-18$

$-144+140 \not< -72+15+58$ (70)

$-4\not<-2$

$121-264+135>-66+15+39$

$256-264>-51+39$

$-8>-12$

$121-264+140<-66+15+55$

$261-264$ (70)

$-3<4$

$100-240+140<-60+70$

$100-240+135>-60+15+39$ (0; 10; 54)

$-5>-6$

Черновик

№1

$a_{10}a_{16} > S+39$ $\quad S=S_6=\frac{a_1+a_6}{2}\cdot 6=3(2a_1+5d)$

$a_{11}a_{15} < S+55$ $\quad \cancel{a_1=1}$

$d=1$

$a_1 - ?$ $\quad a_6=a_5+6d$ $\quad a_n=a_1+d(n-1)$

$a_{10}=a_1+9d$

$a_{16}=a_1+15d$

$(a_1+9d)(a_1+15d) > 6a_1+15d+39$

$a_1^2+24da_1+135d^2 > 6a_1+15d+39$

$a_{11}=a_1+10d$

$a_{15}=a_1+14d$

$a_1^2+24a_1d+140d^2 < 6a_1+15d+55$

$39-135d^2 < a_1+24a_1d-6a_1+15d < 55-140d^2$

$d\in Z$

$39-135d^2 < 55-140d^2$

$5d^2<16$

$d^2<\frac{16}{5}$

$|d|<\frac{4\sqrt5}{5}$

$-\frac{4\sqrt5}{5}<d<\frac{4\sqrt5}{5}$

$d=1$

$d=-1$

$2<\sqrt5<3$

$\cancel{\frac{8}{5}<}\frac{4\sqrt5}{5}<\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$

$-3<-\sqrt5<-2$

$-\frac{12}{5}<-\frac{4\sqrt5}{5}<-\frac{8}{5}$

$-2\frac{2}{5}$ $\quad -1\frac{3}{5}\ 1\frac{3}{5}$

$-\frac{12}{5}\quad -\frac{4\sqrt5}{5}\quad -\frac{8}{5}\quad \frac{4\sqrt5}{5}$

$\frac{4\sqrt5}{5}\vee 2$

$4\sqrt5\vee 10$

$2\sqrt5\vee 5$

$20<25$

$\begin{array}{r}120\\ -35\\ \hline 85\end{array}$ $\quad \begin{array}{r}140\\ -55\\ \hline 85\end{array}$

$\cancel{(a_1+9)(a_1+15) > 6a_1+15+39}$

$\begin{cases}a_1^2+24a_1+135 > 6a_1+15+39\\ a_1^2+24a_1+140 < 6a_1+15+55\end{cases}$ $\quad \begin{cases}a_1^2+18a_1+81>0\\ a_1^2+18a_1+70<0\end{cases}$

21101661 (U352735 M1302710)

Черновик

64 − 144 + 81   49 − 126 + 81

18 · 64 · 8 − 80   −10   130 · 4   49 − 126 + 70   113

144   64 − 144 + 70   36 − 108 + 81   117

№3   кр ((a;b) $2\sqrt{2}$)   36 − 108 + 70   106

Пусто   min 8   8 ≤ −4a + 4b

Найдем все a и b

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 8 \\ -4a+4b \ge 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b \ge 2+a \\ a^2+b^2 \le 8 \end{cases}$$

см ост

b = a + 2

Пересечение двух окр.

min

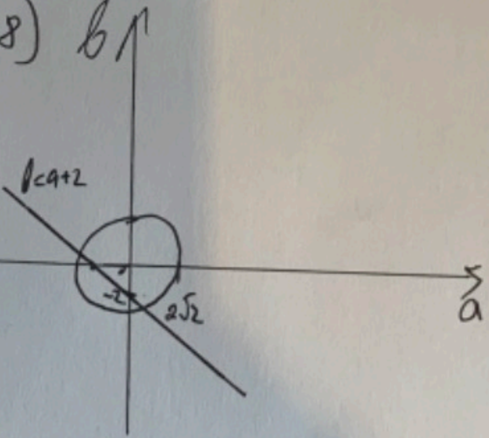
$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 4b-4a \\ 4b-4a \le 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+2)^2+(b-2)^2 \le 8 \\ b-a \le 2 \end{cases}$$

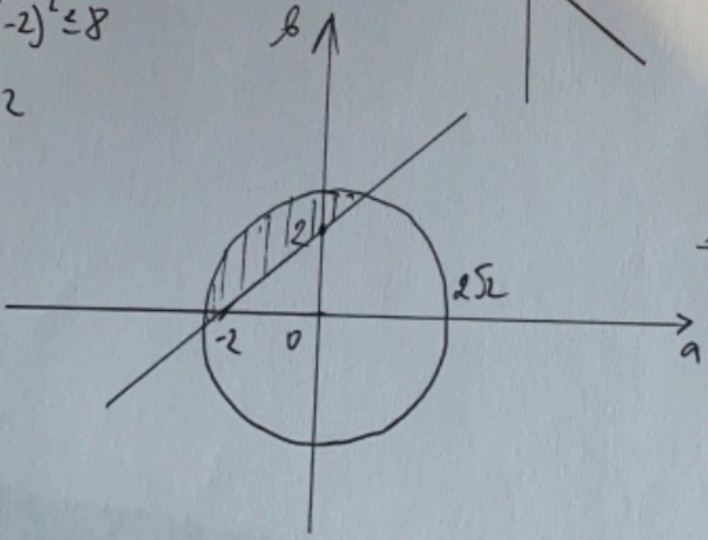
$b \le a+2$ ((−2;2) $2\sqrt{2}$)

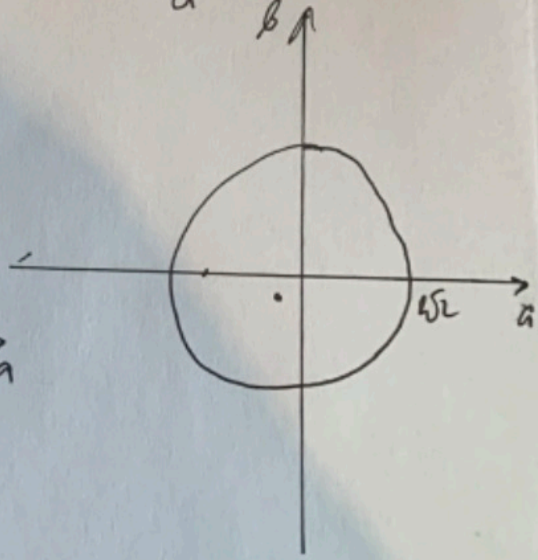
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b; 8) \end{cases}$$

кр((a;b); $2\sqrt{2}$)



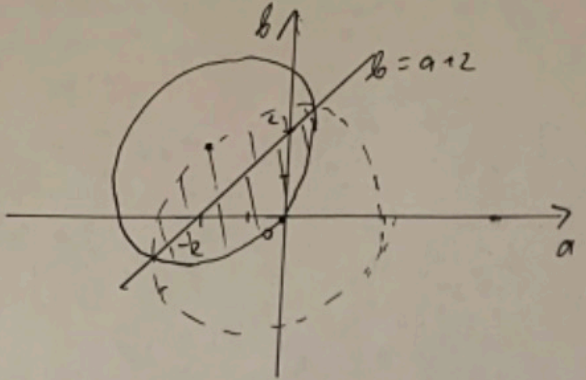
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \le 8 \\ b \ge a+2 \end{cases} \\ \begin{cases} (a+2)^2+(b-2)^2 \le 8 \\ b \le a+2 \end{cases} \end{array}\right.$$





21101661 (U352735 M1302710)

Черновик



$((a;b);2\sqrt{2})$

$(0;0)$

$(-2;2)$

Центры симметричны отн. $b=a+2$

$2a^2+4a\le 4$

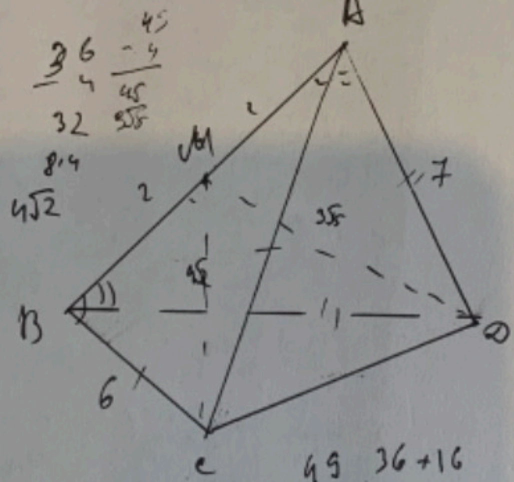
$a^2+2a-2\le 0$

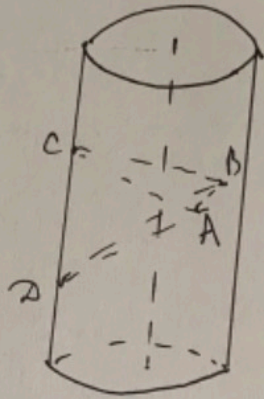
$D=3$

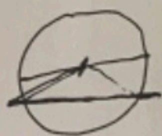
$a=-1\pm\sqrt{3}$

$2a^2+4a+4\le 8$

$a^2+2a-2\le 0$



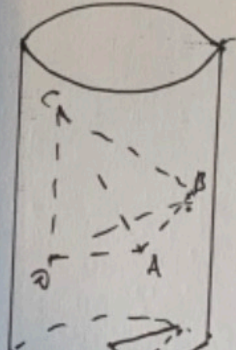




49   36+16

52

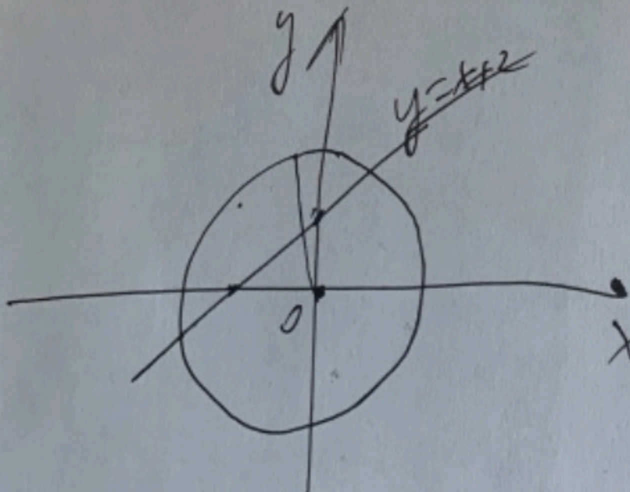
$AB\perp DC$



$2x\le 4$

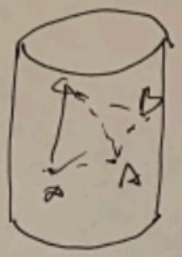
$x\le 2$

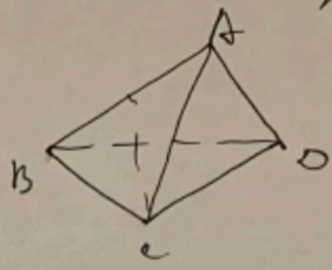
$16>8$



$OH=\sqrt{2}$

№2





Черновик

$AB \perp CD$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101661**

ID профиля: **352735**

Вариант 23

$\frac{1}{2} \sin\alpha$ $P_{C}P_{K} = 13$

Чистовик.

№5

$a = \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$ $\frac{9}{2}$

$b = \log_{(x+4)^2}(x+34)$

$c = \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$(x+34)^{\frac{a}{2}} = 2x+23$

$(x+4)^{2b} = x+34$

$(2x+23)^{\frac{c}{2}} = -x-4$ – возведем обе части в степень $2b$

$(2x+23)^{bc} = (x+4)^{2b} =$ – возведем обе части в степень $\frac{a}{2}$

$= x+34$

$(2x+23)^{\frac{abc}{2}} = (x+34)^{\frac{a}{2}} = 2x+23$

$\frac{abc}{2} = 1$

$abc = 2$

Поскольку два числа из a, b и c равны, а третье больше их на единицу, то тройка $(a;b;c)$ может выглядеть как $\left[\begin{array}{l} 1\ 1\ 2 \\ 1\ 2\ 1 \\ 2\ 1\ 1. \end{array}\right.$

Если $c=2$, то $(a=1, b=1)$

$\begin{cases} x+34 = (2x+23)^2 \\ (x+4)^2 = x+34 \\ 2x+23 = -x-4 \end{cases}$ $x=-9$ удовлетворяет всем уравнениям системы

ОДЗ исходных чисел:

$\begin{cases} x+34>0 \\ x \neq -33 \\ 2x+23>0 \\ x \neq -3 \\ x \neq -5 \\ x \neq -11 \\ -x-4>0 \end{cases}$ $x=-9$ входит в ОДЗ

Чистовик.

Если $b=2$, то $(a=1, c=1)$

$$\begin{cases} x+34=(2x+23)^2 \\ (x+4)^4=x+34 \\ 2x+23=(x+4)^2 \ (*) \end{cases} \quad \varnothing$$

$* \quad x^2+6x-7=0$

$$\left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Подставим $x=1$ в первое уравнение

$35=25^2$ неверно

Подставим $x=-7$ во второе уравнение

$3^4=27$ – неверно

Значит, система решений не имеет

Если $a=2$ $(b=1, c=1)$, то

$$\begin{cases} x+34=2x+23 \Rightarrow x=11 \\ (x+4)^2=x+34 \quad 15^2\neq 45 \\ (2x+23)^2=(x+4)^2 \end{cases}$$ решений системы нет

При $x=-9$ $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=1$

$\log_{(x+4)^2}(x+34)=1$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=2$

Ответ: -9.

21101661 (U352735 M1302711)

Чистовик.

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=22 \\ НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{15} \end{cases}$$

$a\in N$
$b\in N$
$c\in N$

$НОД(a;b;c)=22$. Это значит, что $\begin{cases} a \vdots 22 \\ b \vdots 22 \\ c \vdots 22 \end{cases}$

То есть каждое число не меньше 22, каждое делится и на 11, и на 2.

$НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{15}$. Это значит, что

$\begin{cases} 2^{16}\cdot 11^{15} \vdots a \\ 2^{16}\cdot 11^{15} \vdots b \\ 2^{16}\cdot 11^{15} \vdots c \end{cases}$ При этом $2^{16}\cdot 11^{15}$ - наименьшее такое число

Поскольку числа 2 и 11 простые, то чтобы НОК(a,b,c) было равно $2^{16}\cdot 11^{15}$ числа a, b и c в разложении на простые множители должны иметь вид $2^x\cdot 11^y$ ($x\geq 0$, $y\geq 0$) т.к на числа другого вида $2^{16}\cdot 11^{15}$ не делится.

Чтобы $2^{16}\cdot 11^{15}$ было наименьшим общим кратным, одно из чисел должно содержать 2^{16}, т.к если мы разделим степень двойки на несколько чисел, то наименьшим общим кратным станет $2^z\cdot 11^{15}$, где z - наибольший показатель степени двойки у чисел a, b, c в разложении на простые множители. Аналогично, одно из чисел должно содержать степень 11^{15} (а остальные при

Эти имеют степень 11, меньшую чем 19, а степень двойки меньшую, чем 16.)
То есть числа a, b и c имеют вид:

$2^{16}\cdot 11^{\alpha f}$

$11^{13}\cdot 2^{e}$, причем чтобы НОД(a,b,c)

$2^{m}\cdot 11^{n}$ было равно 22, то одно

или из чисел обязано быть равным 22.

$2^{16}\cdot 11^{13}$

$2^{m}\cdot 11^{n}$

$2^{q}\cdot 11^{l}$

ЧИСТОВИК

С учетом этого тройки могут быть:

1° $22,\ 2^{16}\cdot 11^{x},\ 11^{13}\cdot 2^{y}$; $0<x\le 19$; $0<y\le 16$

2° $2^{16}\cdot 11^{13}$, 22, 22

Посчитаем количество вариантов различных троек (пока не упорядоченных)

Когда x принимает значения от 1 до 18 то y любое от 1 до 16 и при этом каждом $1\le x\le 18$ соответствует 16 вариантов у т.2 тройки не повторяются: 18·16

Когда x = 19 то вариантов у также 16, но один из них с двумя повторяющимися числами

И в случае 2° еще один вариант

Итого: 18·16 + 16 + 1 = 305 вариантов.

Теперь посчитаем количество упорядоченных троек (a; b; c). В 303 вариантах числа a, b и c разные, значит количество перестановок трех чисел: 3.2. 303 = 303·6 = 1818 вариантов. И еще два имеют вид $(x_1; x_1; x_2)$ для них коли-

ЧИСТОВИК!

а степень двойки меньшую, чем 16.)

чество перестановок: $3 \cdot 2 = 6$ Чистовик

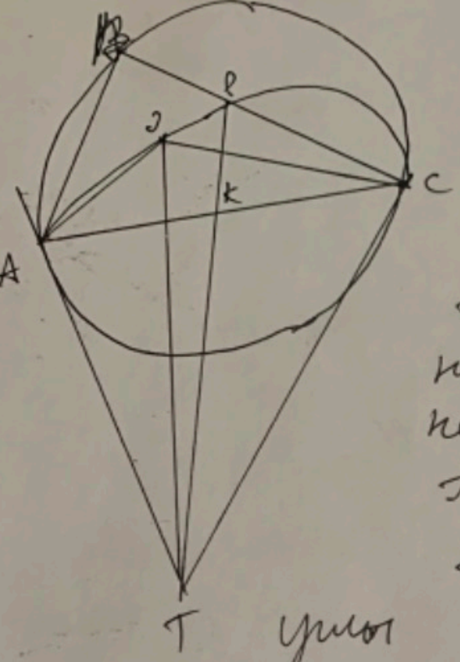
Итого $1818 + 6 = 1824$.

Ответ: 1824

То есть числа a, b и c имеют вид:

Чистовик.

№6



$\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$ т.к OA и OC — радиусы в точки касания.

Тогда $\angle AOC + \angle ATC = 180^\circ$, значит AOCT вписан в окружность, в ту же, что и проходит через точку P т.к около $\triangle AOC$ можно описать только одну окружность.

Тогда, AOPCT — вписанный.

PT — биссектриса $\angle APC$ ~~по свойству~~ т.к углы $\angle APT = \angle CPT$ как вписанные, опирающиеся на равные хорды ($CT = AT$)

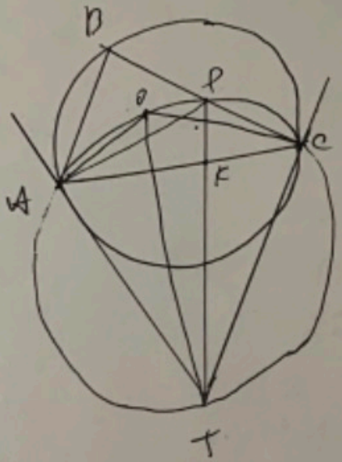
$$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AP}{PC} = \frac{15}{13}$$

$$\angle ATO = \angle OAC = \angle OPA = \angle OPB$$

(т.к PO — биссектриса $\angle BPA$)

$$\angle TAO = \angle OPT = \angle OPC = 90^\circ$$

Черновик.



AOPCT вписан

$\frac{1}{2} \sin\alpha \cdot AP \cdot PK = 15$

$\frac{1}{2} \sin\alpha \cdot PC \cdot PK = 13$

$\frac{AP}{PC} = \frac{15}{13}$

$ATO = OAC = OCA = OPA =$
$= OPB$

$TK \cdot TP = TH \cdot TO$.

21101661 (U352735 M1302711)

Черновик

$a \geq 22$ либо a либо b либо c

$b \geq 22$ содержать 2^{16}

$c \geq 22$

2

$2^{16} \cdot 11$ 22

$11^{15} \cdot 2$ $2^{16} \cdot 11^{15}$

22 22

22 22 $2^{16} \cdot 11$

$2^{16} \cdot 11^{2}$ 22 $2^{16} \cdot 11^{15}$

$11^{15} \cdot 2$ 22

$2 \cdot 11^{2}$ $16 \cdot 18 + 15 + 1$

$2^{16} \cdot 11$

19 · 16 = 114

19 · 204

$x_1\ x_2\ x_3$ 3·2

$x_2\ x_1\ x_3$

$x_2\ x_3\ x_1$

$x_3\ x_2\ x_1$

$x_3\ x_1\ x_2$

$x_1\ x_3\ x_2$

$x_1\ x_1\ x_2$

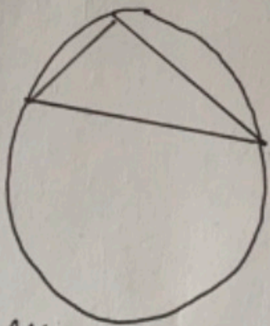
$\angle OAT = 50°$

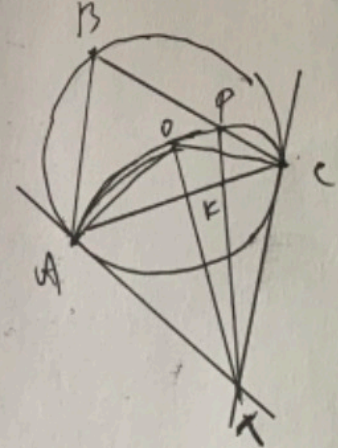
$\angle ATC$

$\angle AOC = 180° - \angle ATC$

$S_{APK} = 15$

$S_{OPK} = 13$





$\triangle AKT \sim \angle CPK \sim$

$\triangle CKP$

$\frac{CK}{KA}$

$\triangle OPC$ вписан

$\angle AKT = PKC$

$\frac{S_{KPC}}{S_{AKT}} = \triangle AOCT$ вписан

$TAO = 50$

KCP ATK

PT б $\angle APC$ OPT

PO $\angle$ ~~BPA~~ OPC

$= \left(\frac{CK}{AK}\right)^2 \left(\frac{KP}{AK}\right)^2$

$\angle ABR$

21101661 (U352735 M1302711)

Черновик

№4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=22 \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

$a,b,c \vdots 2$
$\vdots 11$

$a=\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \frac{1}{\log_{2x+23}\sqrt{x+34}}$

$b=\log_{(x+4)^2}(x+34) = \log_{(x+4)^2}(x+34)$

$c=\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = \log_{2x+23}(x+4)^2$

$(x+34)^{\frac{a}{2}}=2x+23$ $\quad \frac{1}{\log_{2x+23}\sqrt{x+34}} = \log_{2x+23}(x+4)^2$

$(x+4)^{2b}=x+34$ $\quad 34+x=$

$(2x+23)^{\frac{c}{2}}=-x-4$ $(2b)^{(\frac{a}{2})}$ $\quad x \geq -\frac{23}{2} = -11,5$

$(2x+23)^{\frac{abc}{2}}=(2x+23)$ $\quad \frac{1}{\log_{27}6} = \log_{27}36^2 \quad 6^4$

$abc=2$ $\quad 4\log_{27}^2 6=1$

1 1 2

$\log_{27}6=\frac{1}{2}$

$(x+4)^2=a$

$\sqrt{x+34}=b$

$a/b/c : 2^{16}$

$a/b/c : 11^{19}$

$\frac{2^{15}\cdot \cancel{11}^{15}}{2^{15}\cdot 11^{4}}$

$\frac{2^{16}\cdot 11^{9}}{2^{1}}$

~~22, 2^15, 11^18~~

22; $2^{16}\cdot 11$; $11^{19}\cdot 2$

$2^{16}\cdot 11^{19}$; 22; 22

$(x+34)^{\frac{a}{2}} = 2x+23$

$(x+4)^{2b} = x+34$

$(2x+23)^{\frac{2cb}{2}} = (x+4)^{2b} = x+34$

$(2x+23)^{\frac{abc}{2}} = (x+34)^{\frac{a}{2}} = 2x+23$

$\frac{abc}{2}=1$

$abc=2$

$\boxed{1\ 1\ 2}$

1 2 1

2 1 1

$x+34=2x+23$

$x=11$

$(2x+23)^2 < x+34$

$2x+23<\sqrt{x+34}$

$x+34<(x+4)^2$

$(2x+23)^2<(x+4)^2$

$2x+23<x+4$

$-1.$

$x+34=(2x+23)^2$

$(x+4)^2=x+34$

$2x+23=-x-4$

$3x=-27$

$\boxed{x=-9}$

$x+34=(2x+23)^2$

$(x+4)^4=x+34$

$2x+23=(x+4)^2$

$x^2+6x-7=0$

$\left[\begin{array}{l} \cancel{x=-7} \\ \cancel{x=1} \end{array}\right.$