Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101641**

ID профиля: **819561**

Вариант 23

черновик ②

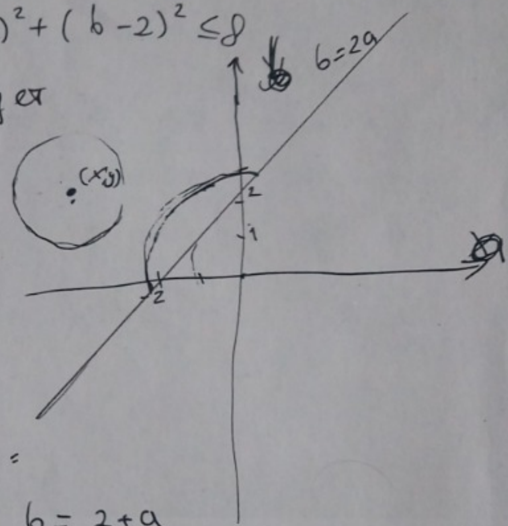
#3 $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8 & \text{— окр } r=2\sqrt{2}\\ a^2+b^2\le \min(4b-4a,\ 8)\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4b-4a\ge 8\\ a^2+b^2\le 8\end{cases}\\ \begin{cases}4b-4a<8\\ a^2+b^2-4b+4a+8\le 8\end{cases}\end{array}\right.$$

$b-a\ge 2$ ~~4b-4a=8~~ $b\ge 2+a$

$b-a<2$ $\quad b<2+a$

$(a+2)^2+(b-2)^2\le 8$



Если при данных $(x_0;y_0)$ существует $(a,b) \Rightarrow (x_0;y_0)\in$ фигуре M

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b\ge 2+a\\ a^2+b^2\le 8\end{cases}\\ \begin{cases}b<2+a\\ (a+2)^2+(b-2)^2\le 8\end{cases}\end{array}\right.$$

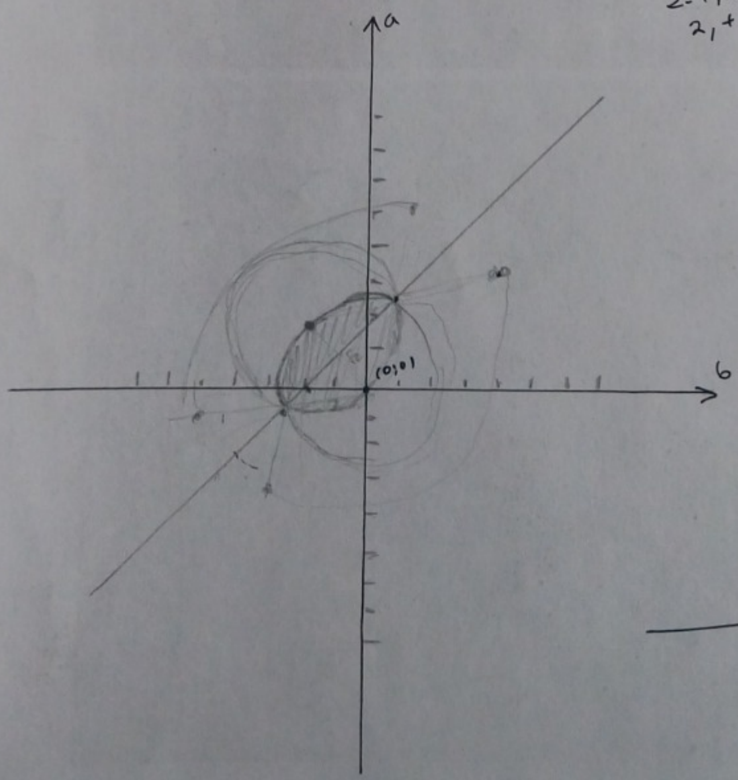
$(a-x)^2+(b-y)^2\le 8$

$b\ge 2+a$

$2\sqrt{2}$

$2-1{,}4$

$2,+0{,}8=$



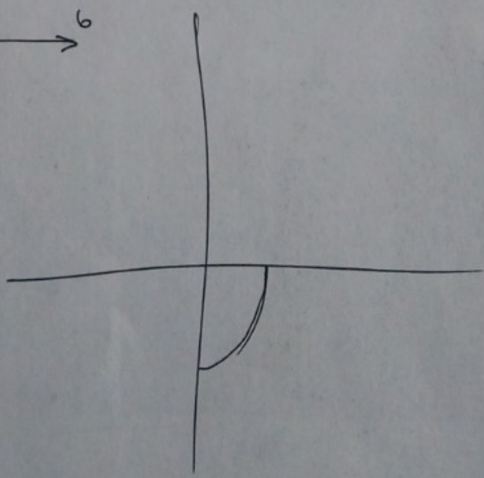
$b=2+a$

$a^2+a^2+4a+4=8$

$a^2+a^2+4a-4=0$

$\dfrac{a^2+2a-2=0}{-2\pm\sqrt{4+8}}$ $\quad 2\sqrt{3}$

$-1\pm\sqrt{3}$



$\dfrac{1}{6}$

$\pi\dfrac{16}{3}$

21101641 (U819561 M1296555)

26 $\quad$ 400 36 240 $\quad$ 2·6·10·2 240

Черновик

120 36 $\quad$ 72·4 $\quad$ 280 $\quad$ 288 | 6, 24 | 48, 48 $\quad$ 400, 18, 168

#1 a - первый, $S = \frac{a+a+5d}{2}\cdot 6 = \cancel{(2a+30)\cdot 3}\ (2a+5d)\cdot 3$

$a_{10} = a + 9d \quad a_{16} = a + 15d \quad a_{11} = a + 10d \quad a_{15} = a + 14d$ $\quad$ 36 20 18 $\quad$ 15

$$\begin{cases} (a+9d)(a+15d) > (2a+5d)\cdot 3 + 39 \\ (a+10d)(a+14d) \leq (2a+5d) + 55 \end{cases}$$

36 $\quad$ 39·4 $\quad$ 400 120 20 540 $\quad$ 90 45 576 120 696 $\quad$ 72·8 560 18 578

$$\begin{cases} a^2 + 24ad + 135d^2 > 6a + 15d + 39 \\ a^2 + 24ad + 140d^2 \leq 6a + 15d + 55 \end{cases}$$

$a^2 + 6a(4d-1) + 135d^2 - 15d - 39 > 0$

$36(4d-1)^2 - 4(135d^2 - 15d - 39) \geq 0$

-55 -39 $\quad$ $-36\cdot 4\cdot 2 + 4\cdot 15$

$36\cdot 16d^2 - 4\cdot 135d^2$

$> a^2 + 24ad + 140d^2 > 6a + 15d + 39 + d^2$

$\cancel{6a + 15d} + 55 > \cancel{6a + 15d} + 39 + d^2$

$36d^2 - 228d - 120 \geq 0$

$d^2 < 16$

$6d^2 - 48d - 20 \geq 0$

$d = 0, 1, 2, 3$ $\quad$ $d = 0$ $\begin{cases} a^2 > +6a + 39 \\ a^2 < +6a + 55 \end{cases}$ $\quad$ $a^2 - 6a - 39 > 0$ $\quad$ $a^2 - 6a - 55 < 0$

$3d^2 - 24d - 10 \geq 0$

$24 \pm \sqrt{\ }$

~~d = 1~~

~~$a^2 + a6($~~

$15d + 39 - 135d^2$ $\quad$ $55 > a^2 - 6a > 39$

$a(a-6)$ $\quad a > 6$ $\quad$ $a = 6$ – $\quad a = 7$ – $\quad a = 8$ – $\quad a = 9$ $\quad \boxed{a = 10}$ (+)

$a^2 + 6a(4d-1) \cancel{+ 135d^2} - 15d - 39 > 0$

9·3

$a^2 + 6a(4d-1) + \cancel{140d^2 - 15d \ldots}$ $< 15d + 55 - 140d^2$

$5d^2 < 16$

0; 1

-120 $\quad$ 39

$15d + 55 - 140d^2 > a^2 + 6a(4d-1) > 15d + 39 - 135d^2$

$d = 0 \quad a = 10 \quad d = 1$

$-70 > a(a+18) > -71$

90 45 135 $\quad$ ·10 -120 -39 81

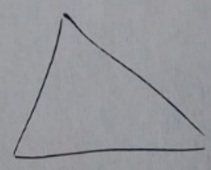
55 -39 $\quad$ 56 40

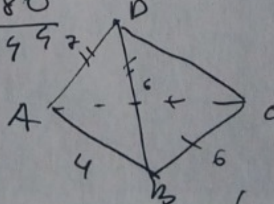
$324 - 4\cdot 81$

$(a+9)^2 > 0$

$324 - 4\cdot 70$

15 55 70 $\quad$ ·10 324 280 44





$\frac{-18 \pm \sqrt{44}}{2}$ $\quad 2\sqrt{11}$

$\boxed{-12}$ $\quad$ -11

$-9 \pm 2\sqrt{11}$ $\quad$ ($\quad$) ($\quad$)

-10 $\quad -8 \quad -7 \quad -6$

($\quad$) -11 $\quad$ -9

$(a+9) - 11 < 0$ $\quad$ 7

21101641 (U819561 M1296555)

Вариант 23 Чистовик (стр 1)

#1 Пусть ~~8~~ a - первый член прогрессии, d - её разность $d>0$

Тогда $S = \frac{a + a+5d}{2} \cdot 6 = 6a+15d$ $a, d \in Z$

По условию:

$\begin{cases} (a+9d)(a+15d) > 6a+15d+39 \\ (a+10d)(a+14d) < 6a+15d+55 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2+24ad+135d^2 > 6a+15d+39 \\ a^2+24ad+140d^2 < 6a+15d+55 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2+24ad+140d^2-6a-15d > 5d^2+39 \\ a^2+24ad+140d^2-6a-15d < 55 \end{cases} \Rightarrow 5d^2+39 < 55$

$5d^2 < 16$

$d = 1$ (учитывая ограничения)

Решим систему при $d=1$.

$\begin{cases} a^2+24a+135 > 6a+15+39 \\ a^2+24a+140 < 6a+15+55 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2+18a+81 > 0 \\ a^2+18a+70 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+9)^2 > 0 \\ (a+9)^2-11 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -9 \\ (a+9)^2 < 11 \end{cases}$

$(a+9)^2 < 11$

При целых $a \Leftrightarrow (a+9)^2 \leq 9 \Rightarrow a = -12, -11, -10, -8, -7, -6$

$|a+9| \leq 3$

Ответ: $-12, -11, -10, -8, -7, -6$.

21101641 (U819561 M1296555)

#7 [Вариант23] Чистовик (Пр2)

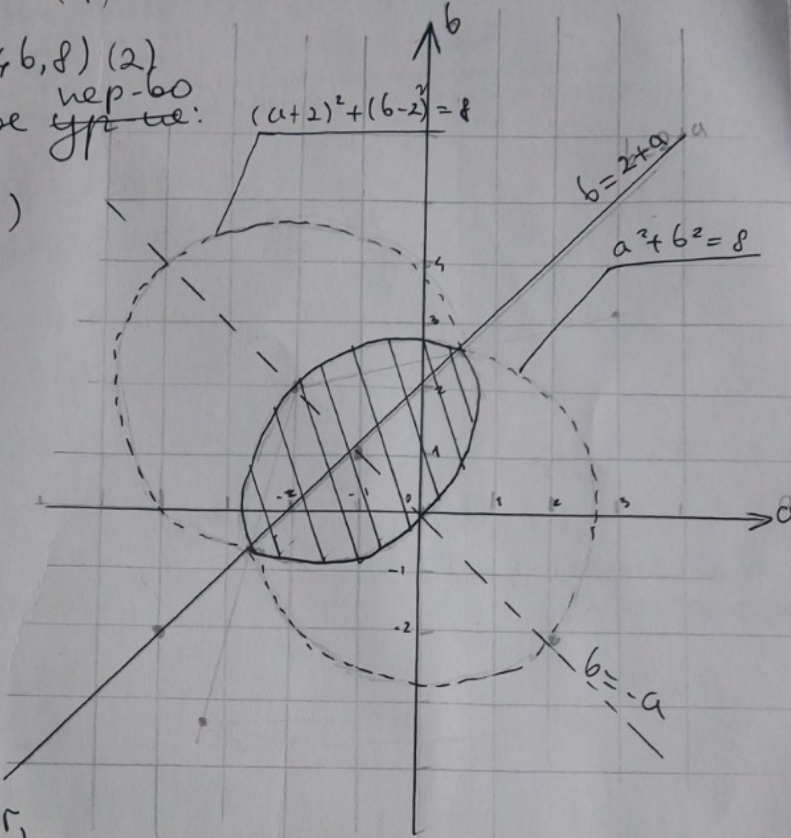
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(-4a+4b,8) & (2)\end{cases}$$

Преобразуем второе ~~ур-ие~~ нер-во:

$$a^2+b^2\le \min(-4a+4b,8)$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4b-4a\ge 8\\ a^2+b^2\le 8\end{cases}\\ \begin{cases}4b-4a<8\\ a^2+b^2\le 4b-4a\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b\ge 2+a\\ a^2+b^2\le 8\end{cases}\\ \begin{cases}b<2+a\\ (a+2)^2+(b-2)^2\le 8\end{cases}\end{array}\right.$$



Заметим, что ур-ия вида $(a-a_0)^2+(b-b_0)^2=r$, задают окружность с центром в точке $(a_0;b_0)$ и радиуса $\sqrt{r}$. Следовательно $a^2+b^2\le 8$ — круг с центром в точке $(0;0)$ $r=2\sqrt2$; $(a+2)^2+(b-2)^2\le 8$ — круг с центром в точке $(-2;2)$; $r=2\sqrt2$.

Построим график второго нер-ва: ↗ (заштрихованная область вместе с границами) — Ф - фигура на декартовой пл-сти.

График ~~втор~~ первого нер-ва — круг, с координатами $(x;y)$ $r=2\sqrt2$.

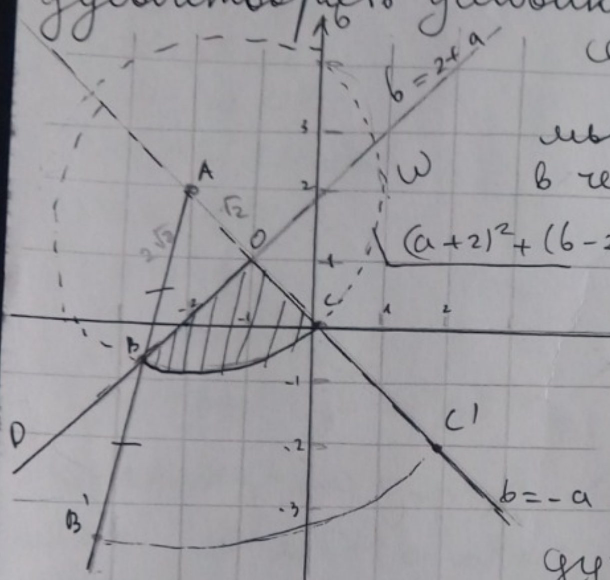
Заметим что Ф симметрично относительно прямых $b=2+a$; $b=-a$

Условие о том, что фигуре М принадлежат такие пары $(x;y)$, при которых существует пара вещественных $(a;b)$, равносильно условию, что фигура, задаваемая (1) нер-вом пересекает или касается фигуры Ф.

21101641 (U819561 M1296555)

Вариант 23 Чистовик стр 3 #3 Продолжение

Поскольку круг, задаваемый 1-ым нер-вом имеет фиксированный радиус, достаточно рассмотреть те значения $(x;y)$, в которых происходит касание с фигурой Ф. Точки лежащие между точками касания и осями симметрии фигуры Ф будут автоматически удовлетворять условию, остальные — нет.



сектор BOC - симметричная часть фигуры Ф, следовательно мы рассматриваем точки лежащие в четверти BOC.

Рассмотрим дугу окр$^{\omega}$ BC, точки, ~~касающиеся ее лежат~~ с центром в которых можно провести окружность $r=2\sqrt2$, касающуюся окр ω, лежат на вдвое большей дуге $B'C'$ (с радиусом в точке A)

Центры, лежащие на $B'C'$ — A_i $S(A;A_i)=2\sqrt2+2\sqrt2=4\sqrt2$. Следовательно, нам подходит сектор $B'BOC$!

Найдём дугу касания для точек лежащих в угле DBB' — это будет дуга окр. с центром в точке B и $r=2\sqrt2$, так как ~~через~~ для любой точки этой дуги можно будет провести окр. с центром в данной точке и $r=2\sqrt2$ и эта окружность обязательно пройдёт через т. B (найдётся подходящая пара $(a;b)$). Следовательно нам подходит сектор DBB_1 (для дуги $B'C'$ аналогично)

$S_{B_1'BOC'} = S_{\subset AB'C'} - S_{\triangle ABO}$ $\quad S_{DBB_1} = \pi r^2 \cdot \frac{\angle DBB'}{360°}$

$\angle DBB' = \angle ABO$ - в силу вертикальности.

Из прям $\triangle ABO$ $\sin\angle ABO = \frac{AO}{AB} = \frac{\sqrt2}{2\sqrt2} = \frac12 \Rightarrow \angle ABO = 30°$; $\angle BAO = 60°$

$S_{DBB_1} = \pi \cdot (2\sqrt2)^2 \cdot \frac{30}{360} = \pi\cdot\frac{8}{12} = \frac23\pi$

$S_{\triangle ABO} = \frac12 \cancel{\angle BAO}\cdot\sin\angle BAO\cdot AB\cdot AO = \frac12\cdot\frac{\sqrt3}{2}\cdot\sqrt2\cdot2\sqrt2 = \sqrt3$

$S_{\subset A'B'C'} = \pi\cdot(AB')^2\cdot\frac{\angle B_1'AC'}{360°} = \pi\cdot16\cdot2\cdot\frac{60}{360} = \pi\cdot\frac{16}{3}$

Вариант 23 | Чистовик (стр 4) #3 Продолжение

$S_{обл} = S_{B'BOC} + S_{DBB_1}$,

$S_{обл} = \frac{2}{3}\pi + \frac{16\pi}{3} - \sqrt{3} = 6\pi - \sqrt{3}$

$S_{фигуры\ M} = S_{обл} \cdot 4$ (в силу симметрии)

$S_M = 24\pi - 4\sqrt{3}$

Ответ: $24\pi - 4\sqrt{3}$

21101641 (U819561 M1296555)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

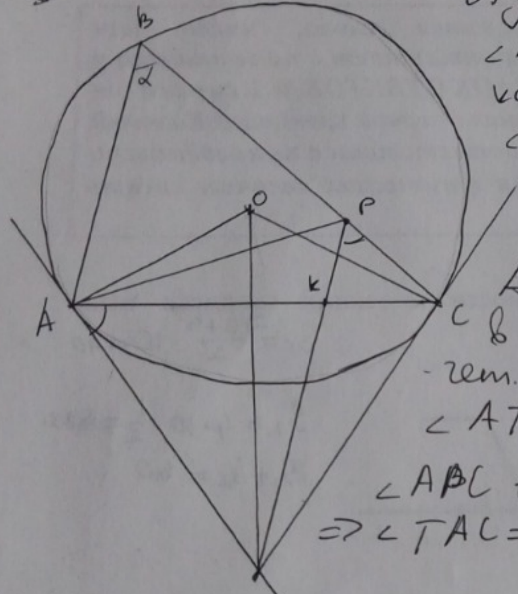
Шифр: **21101641**

ID профиля: **819561**

Вариант 23

Вариант 23 | Чистовик (стр 1)

#3



Пусть $\angle ABC = \alpha$.

$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC = \angle CAT$ (угол между кас и хордой

$\angle AOC$ - центральный $\angle AOC = 2\alpha$

$\Rightarrow \angle APC = 2\alpha$ (опираются на одну дугу)

$AO \perp AT$; $OC \perp CT$ (радиусы, проведённые в точку касания) $\Rightarrow$ AOCT - вписанный чет.-ник $\Rightarrow \angle AOC + \angle ATC = 180 \Rightarrow$

$\angle ATC = 180 - 2\alpha$

$\angle ABC + \angle ATC = 180° \Rightarrow$ APCT - вписанный чет.

$\Rightarrow \angle TAC = \angle TPC = \frac{1}{2} \smile TC$.

AOCT, APCT и AOPC - вписаные чет $\Rightarrow$ A, O, P, C, T - лежат на одной окр.

$\angle TPC = \alpha = \angle ABC \Rightarrow AB \parallel PT$ (соответственные углы)

$\Rightarrow CA : CK = CP : CB = k \Rightarrow \frac{S_{\triangle CKP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{k^2}$, где k - коэффициент подобия

$\frac{\cancel{S_{\triangle CPT}}\ 15}{13} = \frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle CPK}} = \frac{AK}{CK}$ (общая высота из точки P)

$\Rightarrow \frac{CA}{CK} = \frac{28}{13} = k$ $\quad S_{\triangle ABC} = 13 \cdot \frac{28^2}{13^2} = \frac{28^2}{13} = \frac{784}{13}$

$S_{\triangle APK} = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot PK \sin\angle APK^{(\alpha)}$

$S_{\triangle PCK} = \frac{1}{2} \cdot PK \cdot PC \sin\angle KPC$ $\quad \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{15}{13}$

Пусть x - коэффициент пропор $\Rightarrow AP = 15x$; $PC = 13x$

$BP : PC = 15 : 13 \Rightarrow BP = 15x \Rightarrow \triangle BPA$ - р/б $BP = AP$

$\Leftrightarrow \angle ABP = \angle BAP = \alpha = \angle CAT = \angle ACT$

$\Rightarrow \triangle ABP \sim \triangle ACT$ $\quad \cos\angle\alpha = \cos\angle ABP = \frac{\frac{1}{2}AB}{BP}$

$\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CT}$ $\quad AC = \frac{AB \cdot CT}{BP}$

21101641 (U819561 M1296556)

Чистовик (стр 2)

#1 ~~Н~~ $\begin{cases} НОД(a;b;c)=22 \\ НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$

~~Заметим, что в одно из чисел обязательно входит двойка в степени не менее 1, а другое в другое двойка~~ ~~в~~ Поскольку $НОД(a;b;c)=22$. Хотя бы одно число содержит 2 в степени 1, другое (или это же) 11 в степени 1. Степеней ниже быть не может.

Аналогично, одно или два числа содержат 2^{16} ~~в степе~~ и 11^{19}.

		1 число	2 число	3 число	
Таким образом:	двойки	2	2^k	2^{16}	$k\in\{1,2,\dots 16\}$
	11	11	11^t	11^{19}	$t\in\{1,2,\dots 19\}$

Рассмотрим отдельно случай, когда получаются два одинаковых числа, при $\overset{k\ t}{(1;1)}$ и $(16;19)$, $(16;1)$ и $(1;19)$.

В общем случае получаются наборы: двойки aab
11-цы ccd

Из которых получаются две комбинации

$\begin{matrix} a & a & b \\ c & c & d \end{matrix}$ $\begin{matrix} a & a & b \\ c & c & d \end{matrix}$ ~~Первая комбинация может стать любым из 3-х чисел, вторая~~

Пары „расставить" по числам a,b,c можно $3!$ способами

Итого: $4\cdot 2\cdot 3! = 24$

Когда не получаются одинаковые числа:

$3!\cdot \underset{1}{3}\cdot \underset{2}{3}\cdot \underset{3}{2}\cdot \underset{4}{2}\cdot \underset{5}{14}\cdot \underset{6}{17} = 6\cdot 36\cdot 14\cdot 17 = 3024\cdot 17 = 51408$

способов ~~для~~ выбрать порядок букв a,b,c

1. - вариантов двойки для 1-го числа
2. - вариантов 11-цы для 1 го числа
3. - вариантов двойки ~~для~~ для 2-го числа
4. - вариантов 11-цы для 2-го числа
5. - вариантов для k
6. - вариантов для t

Ответ: $51408+24 = 51432$

Чистовик (стр 3)

#2

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, $\log_{(x+4)^2}(x+34)$, $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

ограничения на x:

$$\begin{cases} 2x+23>0 \\ x\neq -4 \\ x\neq -5 \\ -x-4>0 \\ 2x\neq -22 \end{cases} \Rightarrow x\in(-11{,}5;-4)\setminus\{-11;-5\}$$

I случай

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=\log_{(x+4)^2}(x+34) \quad (1) \\ \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)+1= \cancel{2} \log_{(x+4)^2}(x+34) \end{cases}$$

(1): $2\log_{(x+34)}(2x+23)=\frac{1}{2}\log_{(-x-4)}(x+34)$

$4\log_{(x+34)}(2x+23)=\log_{(-x-4)}(x+34)$

21101641 (U819561 M1296556)

Черновик 2 см

№ 2

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$ $\log_{(x+4)^2}(x+34)$ $\log_{\sqrt{2x+33}}(-x-4)$

$2\log_{(x+34)}(2x+23)$ $x+34=a$ $x>-34$

$\frac{1}{2}\log_{(-x-4)}(x+34)$ $2x+23=b$ $x>-\frac{33}{2}$

$2\log_{(2x+33)}(-x-4)$ $-x-4=c$ $\cancel{x<}\ -x-4>0$

$(-16{,}5;-4)$ $x<-4$

$2\log_a b$ $\frac{1}{2}\log_c a$ $2\log_b c$ $=x+-5$

$x=-\frac{31}{2}\neq-15{,}5$

$2\log_a b=\frac{1}{2}\log_c a$ $\log_c a=\frac{\log_b a}{\log_b c}$ $\log_b a=u$

$4\log_a b=\log_c a$ $\log_b c=w$

$2R=\frac{c}{\sin}$

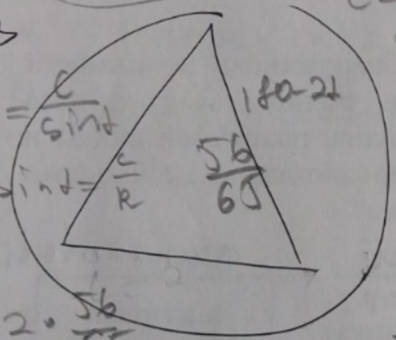
$2\log_a b=\frac{2}{\log_b a}$ $\frac{2}{u}$; $\frac{u}{2w}$; $2w$

$S=\frac{1}{2}\cdot\sin\angle\cdot ab$

$c=2R\cdot\sin\angle$

$\sin\angle=\frac{c}{2R}$

#3



$2R=\frac{c}{\sin\angle}$

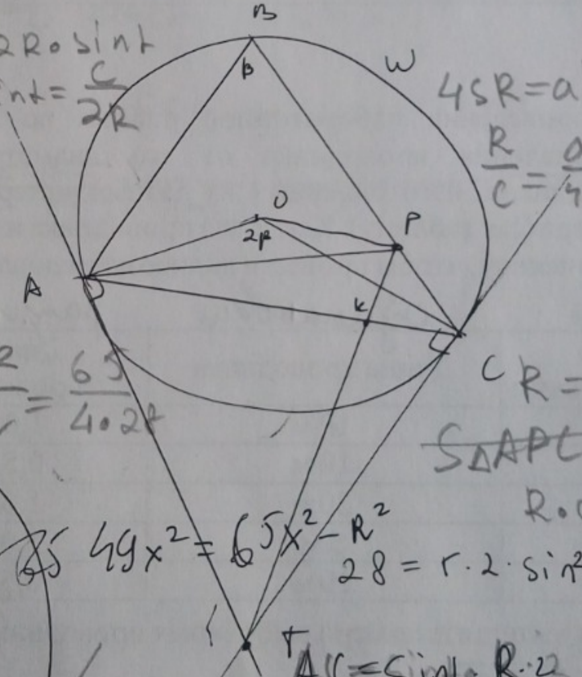
$2\sin\angle=\frac{c}{R}$

PC

$180-2\angle$

$\frac{56}{65}$

$2\cdot\frac{56}{65}$



$4\cdot8\cdot10$

400
64
320
384

$4SR=abc$

$\frac{R}{c}=\frac{ab}{4S}$

$APK=15$

$CPK=13$

$R=\frac{4S}{ab\cdot c}$

$\frac{R}{c}=\frac{65}{4\cdot28}$

~~$S_{\triangle APC}=$~~

$R\cdot c=\frac{4\cdot13}{65}$

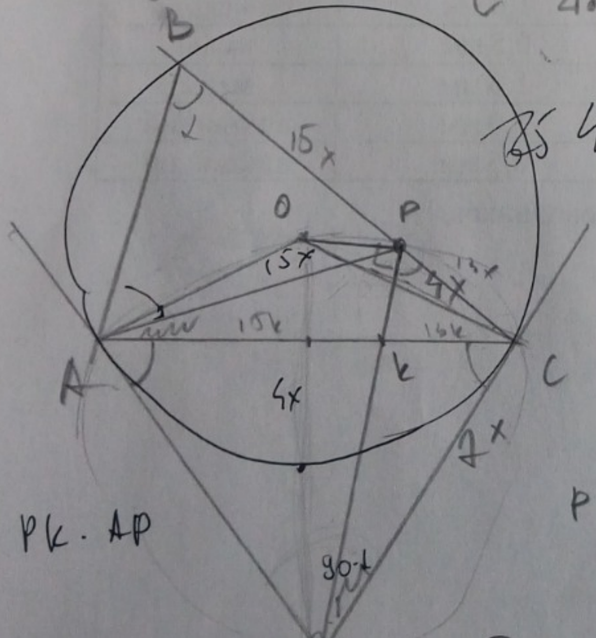
$\cancel{65}\ 49x^2=65x^2-R^2$

$28=r\cdot2\cdot\sin2\angle\cdot\sin\beta\cdot\sin\beta$

$AC=\sin\angle\cdot R\cdot22$

$AC=2r\cdot\sin2\angle$

16
49
65



$13\cdot\frac{28^2}{13^2}=\frac{28^2}{13}$

$\frac{4}{\sqrt{65}}\cdot\frac{7}{\sqrt{65}}\cdot2$

$\frac{56}{\sqrt{5}65}$

PK · AP

$PK\cdot PC\cdot\frac{4}{\sqrt{65}}\cdot\frac{1}{2}=13$

$R=r\cdot2\cos\angle$

$PK\cdot PC=\frac{13\sqrt{65}}{2}$

$AP\cdot PC=65$

$\cancel{\frac{5}{\sqrt{65}}}\ \frac{56}{65}\cdot\frac{1}{2}\cdot AP\cdot PC=28$

Черновик 1 стр

#1

Нод abc = 22   2 · 11   a b c

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

Нок ($2^{16} \cdot 2^{19}$ ~~19·19·3~~ 2^1 11^1

~~$a = 2^k$~~

$2^1 11^5$ $2^3 11$ 2^4

$a = 2^x \cdot 11^y$

$b = 2^z \cdot 11^d$

$c = 2^{16-x-z} \cdot 11^{19-y-d}$

1 — x > 7   x = −11

log(x+34 ...

x = 1 — y = 1

3 · 39.

a = 22

$b = 2^x \cdot 11^y$

$c = 2^{16-x} \cdot 11^{19-y}$

когда два числа

b = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

15 · 18

2 2 2^{16}

11 11 2^{14}

11 16

11 19

a a b   a a b

c c d   c c d

~~x_1 x_2~~ $x_a + x_b + x_c = 16$ $x_a \geq 16$

$y_a + y_b + y_c = 19$

~~3·2·2~~

~~3·2~~

2·2

$2^x \cdot 11^y$

$2^z \cdot 11^d$

$2^{16-x-z} \cdot 11^{19-y-d}$

3 · 3

a a b

c c d

216 · 14 = 864   2   11

216 · 14 = 3024

Разные 2^{16}

19 раз 11^{19}

когда 2 = 1−1

2 2 2^{14}

11 11 11^{17}

1 +1 +1

3 · 2

15 · 2

1168 · 17 = 3024, 51408

2 2^{16}

11 11^{19}

2 2 2^{16} 2 2^{16} 2^{16}

11 11^{15} 11^{19} 11 11 11^{19}

2 3 4 5 6 7 8 9 15   51408   2 2^{16} · 2^{16}

2 14 ... 2^{16} 2 · 11^{19} · 11^{19}

11 17 11^{19}

3 · 4

2   216 · 14 = 864

2 · 216 = 3024

~~16·19~~

3·2·1

3

2

· 14 · 17 · 3!   (3 · 3 · 2 · 2) −   )

36 · 6 = 216

3024 · 17 = 21168, 3024, 51408

(3 · 3 · 2 · 2 · 16 · 19) · 6