

Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101610**

ID профиля: **193263**

Вариант 23

Задача 3.

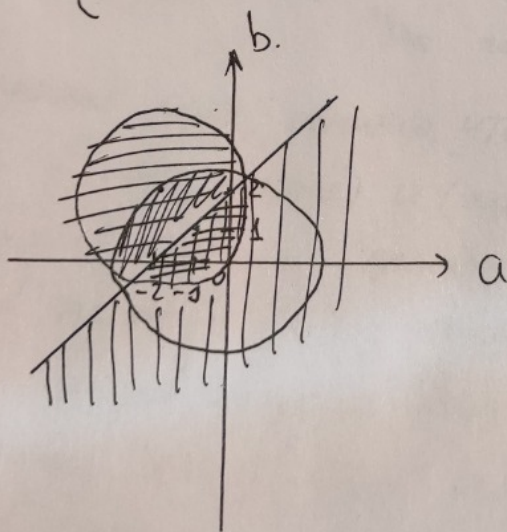
Дано:
$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 8 \\ a^2 + b^2 \leq \min(-4a+4b; 8) \end{cases} \quad a, b \text{ существуют.}$$

$$S \text{ фигуры} - ?$$

Первое уравнение задает окружность радиусом $\sqrt{8}$ с центром в точке $(a; b)$.

1) Найдем множество центров, при которых второе неравенство выполняется. Его можно свести к виду:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \leq 4b - 4a \\ 4b - 4a < 8 \\ a^2 + b^2 \leq 8 \\ 4b - 4a \neq \geq 8 \end{cases}$$



1) $a^2 + b^2 \leq 4b - 4a$

$$a^2 + 4a + 4 + b^2 - 4b + 4 \leq 8$$

$$(a+2)^2 + (b-2)^2 \leq 8.$$

Задаёт область внутри окружности с центром в точке $(-2; 2)$ и радиусом $\sqrt{8}$.

Не забудем про 2-е условие.

$$4b - 4a < 8 \quad | : 4$$

$$b - a < 2$$

$b < a + 2$. Это - полуплоскость, ограниченная прямой.

← Покажем на графике кусок пересечения (решений системы) показан $\#$

2) $a^2 + b^2 \leq 8$

область внутри окружности с центром $(0; 0)$ и радиусом $\sqrt{8}$

$4b - 4a \geq 8$ - Та же прямая, но верхняя полуплоскость.

В итоге получили фигуру - область центров окружностей

Заметим, что расстояние от точки $(0; 0)$ до точки $(-2; 2)$ равно $\sqrt{(0-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8} = R \Rightarrow$ окружность из одной системы проходит через центр другой.

Найдем точки пересечения окружностей и прямой.

$$1) \quad (a+2)^2 + (b-2)^2 = 8$$

$$b = a+2 \Rightarrow (a+2)^2 + (a+2-2)^2 = 8$$

$$a^2 + 4a + 4 + a^2 = 8$$

$$2a^2 + 4a - 4 = 0$$

$$a^2 + 2a - 2 = 0$$

$$D = 4 + 2 \cdot 4 = (2\sqrt{3})^2$$

$$a = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$b = a+2 = 1 \pm \sqrt{3}$$

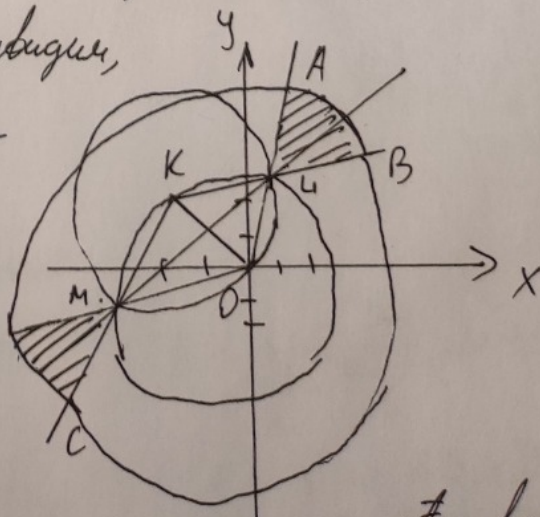
$$2) \quad \begin{cases} a^2 + b^2 = 8 \\ b = a+2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + (a+2)^2 = 8$$

Уже по тому, что ур-я совпадают,

а прямая одна, понятно, что они пересекаются в одной их точке (окр 1; прямая) и (прямая; окр 2) \Rightarrow Точки 1 и 2 пересечения окр. и прямой совпадают. Перерисуем график в системе XOY , опираясь на доказанное.

Фигура центров получена. Далее увидим,

что крайние x и y будут находиться в точках, удаленных на радиус от ближайшей точки. То есть находятся на расстоянии $2R$ от D центров. Мы получим часть исходной фигуры, проведем сектора из



центров до точек пересечения. Далее заметим, что для всех

Точек, не входящих в эти сектора, крайней точкой ~~я~~ будет точка пересечения 2-х. окружностей. Оставшиеся 2 сектора тогда будут радиусом R с центром в точках пересечения. Будем искать площадь.

Как: $S_{\text{общ}} = S_{\text{сектора AOD}} + S_{\text{сектора CKB}} + S_{\text{сектора ALB}} + S_{\text{сектора DMC}} - S_{\text{клом}}$.

Помантно, что $\left. \begin{aligned} KL = KM = KO = \sqrt{8} = R \\ OL = OK = OM = \sqrt{8} = R \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle KLO = 60^\circ,$

$\angle LOM = \angle LOK + \angle KOM = 120^\circ.$

$S_{\text{ALB}} = \frac{60}{360} \cdot AL^2 \cdot \pi = \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot \pi = \frac{4}{3} \pi.$

$S_{\text{MDC}} = \frac{60}{360} \cdot DM^2 \cdot \pi = \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot \pi = \frac{4}{3} \pi.$

$S_{\text{AOD}} = AO^2 \cdot \pi \cdot \frac{120}{360}$, где $AO = 2R = \sqrt{32} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\text{AOD}} = \frac{32\pi}{3}.$

$S_{\text{BKC}} = KC^2 \cdot \pi \cdot \frac{120}{360}$, где $KC = 2R = \sqrt{32} \Rightarrow S_{\text{BKC}} = \frac{32\pi}{3}.$

$S = \frac{32 + 32 + 4 + 4}{3} \pi - S_{\text{клом}} = 21\pi - S_{\text{клом}}$.

$S_{\text{клом}} = S_{\text{кЛО}} + S_{\text{КОМ}}$ т.к. Δ -ки r/c , стороны равны, то

$S_{\text{кЛО}} = 2 S_{\text{КОМ}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot KM \cdot OM \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{8} \cdot \sqrt{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$

Т.о: $S_{\text{M}} = 21\pi - 4\sqrt{3}.$

Ответ: $S_{\text{M}} = 21\pi - 4\sqrt{3}.$

Задача 2.

Дано

$AB = 4.$

$AC = CB = 6$

$AD = DB = 7.$

$CD = ?$

Решение:

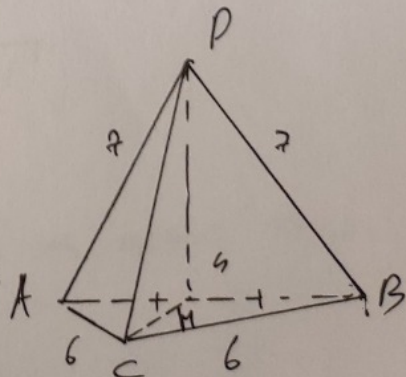
$\Delta ABC \text{ r/c} \Rightarrow CH$ - мед, высота.

$\Delta ABD \text{ r/c} \Rightarrow DH$ - мед, высота.

H - сеп \rightarrow

$AB \perp CH, AB \perp DH \Rightarrow AB \perp (DCH) \Rightarrow AB \perp DC.$

Коль скоро $AB \perp DC$, то сеп ~~AB~~ CD \parallel сеп



Чистовик. Лист 4.

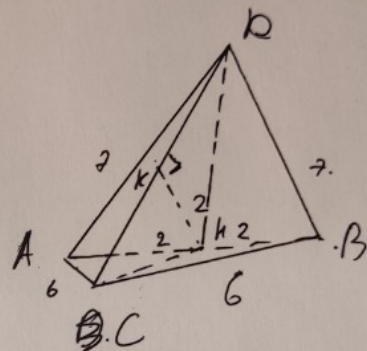
цилиндра, то $AB \perp$ оси цилиндра \Rightarrow лежит в плоскости, параллельной плоскости основания. Т.к. R мин, а $AB \in$ пл, параллельной основанию и опир. на дугу ограничивающей её окружности, то

$R_{\min} = \frac{AB}{2}$ (когда AB совпадает с диаметром. Если AB лежит на другой хорде, то она только меньше диаметра, а значит $R > R_{\min} \Rightarrow R_{\min} = \frac{AB}{2} = 2$.

2) Но так как $DC \in$ бок. пов, $DC \not\parallel$ оси \Rightarrow вся прямая DC лежит ∇ на боковой поверхности. \Rightarrow перпендикуляр от AB к DC - тоже радиус.

\uparrow обязательно из точки H , так как

AB пересекает плоскость, содержащую DC именно в точке H .



3) Вычисления: $\triangle BCM$ (прямоуг). Т. Пифагора:

$$CH = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{36 - 4} = \sqrt{32}$$

$$\triangle CHK \text{ (прямоуг)}. \text{ Т. Пифагора: } CK = \sqrt{CH^2 - HK^2} = \sqrt{32 - 4} = \sqrt{28}$$

$$\triangle ADH \text{ (прямоуг)}. \text{ Т. Пифагора: } DH = \sqrt{7^2 - 4} = \sqrt{45}$$

$$\triangle DHK \text{ (прямоуг)} \text{ Т. Пифагора: } DK = \sqrt{DH^2 - HK^2} =$$

$$= \sqrt{45 - 4} = \sqrt{41}$$

$$DC_{\#} = CD = CK + KD = \sqrt{28} + \sqrt{41} = 2\sqrt{7} + \sqrt{41}$$

Ответ: при R_{\min} , $DC = 2\sqrt{7} + \sqrt{41}$.

Задача 1.

S - сумма 6 членов арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел.

$$a_{10} a_{16} > S + 39$$

$$S_{11} + a_{11} a_{15} < S + 55$$

$a_1 = ?$

Умножим. №5.

$$S_6 = \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = 6a_1 + 15d.$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_1 + 9d \\ a_{16} &= a_1 + 15d \\ a_{11} &= a_1 + 10d \\ a_{15} &= a_1 + 14d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \textcircled{I} a_{10} a_{16} &= (a_1 + 9d)(a_1 + 15d) = \\ &= a_1^2 + (9+15)a_1 d + 9 \cdot 15d^2 = \\ &= a_1^2 + 24a_1 d + 135d^2 \end{aligned}$$

$$\textcircled{II} a_{11} a_{15} = (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) = a_1^2 + (10+14)a_1 d + 140d^2 = a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2.$$

Тогда:

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 d + 135d^2 > 6a_1 + 15d + 39 \\ a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2 < 6a_1 + 15d + 55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 d - 6a_1 + 15d > 39 - 135d^2 \\ a_1^2 + 24a_1 d - 6a_1 + 15d < 55 - 140d^2 \end{cases}$$

x

$$39 - 135d^2 < x < 55 - 140d^2 \Rightarrow 39 - 135d^2 < 55 - 140d^2$$

$$\begin{cases} 5d^2 < 16 \\ d > 0 \\ d \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d < \frac{4\sqrt{5}}{5} \\ d > 0 \\ d \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow d = 1.$$

* $d \in \mathbb{Z}$ т.к. прогрессия состоит из целых чисел.

Тогда: $a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 15 + 55.$

$$a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 15 + 39.$$

$$1) \begin{cases} a_1^2 + 18a_1 + 180 < 0 \\ a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \end{cases}$$

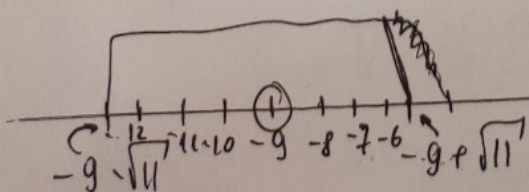
$$2) \begin{cases} a_1^2 + 18a_1 + 180 < 0 \\ a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \end{cases}$$

$$2) (a_1 + 9)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -9.$$

$$1) a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0.$$

$$D = 324 - 70 \cdot 4 = 324 - 280 = 44.$$

$$a_1 = \frac{-18 \pm \sqrt{44}}{2} = -9 \pm \sqrt{11}$$



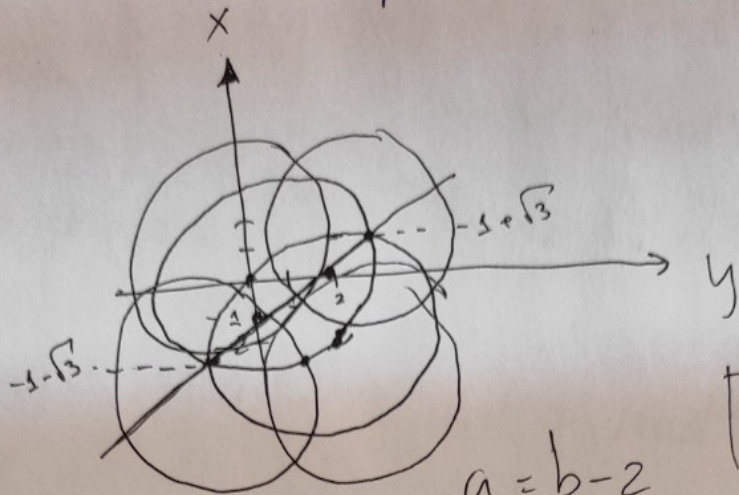
$$\sqrt{11} \in (3; 4) \Rightarrow \begin{cases} -9 + \sqrt{11} \in (-6; -5) \\ -9 - \sqrt{11} \in (-13; -12) \end{cases}$$

Числовий. Лист 6.

Т.о: $a_1 = -12; -11; -10; \text{---}; -8; -7; -6$

С₆ Означен: $a_1 = -12; -11; -10; -8; -7; -6$

центры.



$$a = b - 2$$

$$(b - 2)^2 + b^2 = 8$$

$$21\pi - 4\sqrt{3}$$

$$b^2 - 4b + 4 + b^2 = 8$$

$$2b^2 - 4b - 4 = 0$$

$$b^2 - 2b - 2 = 0$$

$$D = 4 + 8 = 12$$

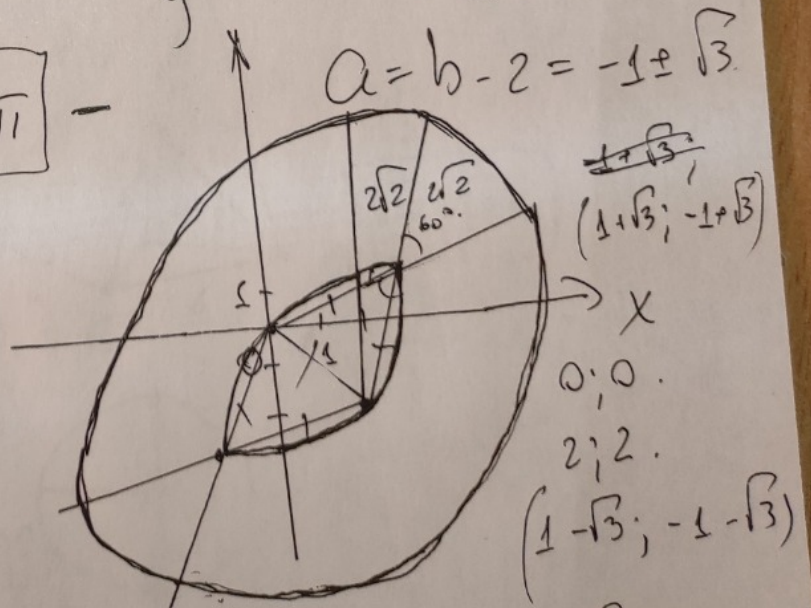
5) $\sqrt{28 + \sqrt{41}}$
 6) $21\pi - 4\sqrt{3}$
 7) $21\pi - 4\sqrt{3}$

8- $b = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$

$$b = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$\frac{64 + 8}{3} \pi = 21\pi$$

$$\sqrt{P} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 16 \cdot 2$$



$$S = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 8 = \frac{8}{3} \pi$$

Черновик.

$$a^2 + b^2 \leq 4(b-a)$$

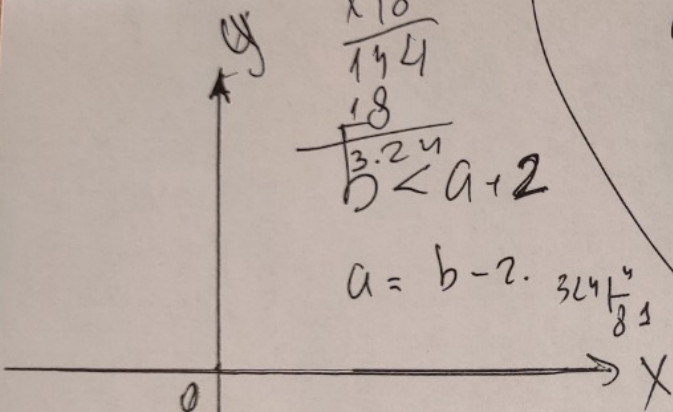
$$a^2 + 4a + 4 + b^2 - ab + a \leq 8$$

$$(a+2)^2 + (b-2)^2 \leq 8$$

$$a^2 + b^2 \leq 8$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \\ < a+2 \end{array}$$

$$a = b - 2$$

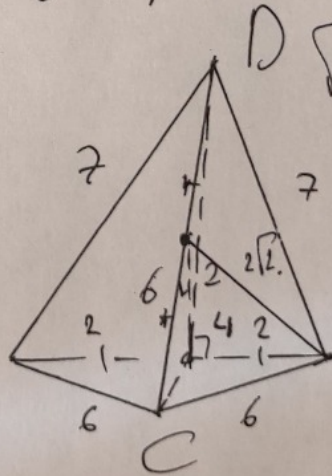
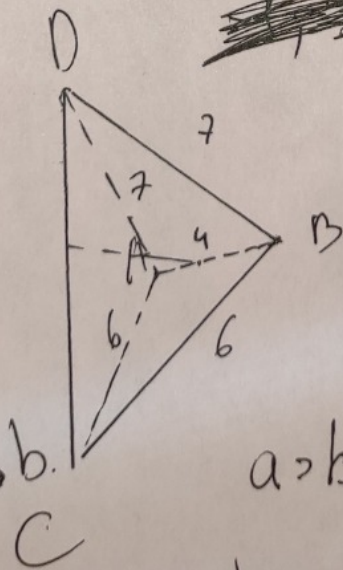


$$a^2 + 24a + 135 \geq 6a + 54$$

$$-1; 2$$

$$b - a; 2$$

$$\begin{array}{r} 6 \cdot 10 \\ 120 \\ - 39 \\ \hline 81 \end{array}$$



$$D \sqrt{36-4}$$

$$\boxed{\sqrt{28} + \sqrt{41}}$$

$$4\sqrt{2}$$

$$32-4 = \sqrt{28}$$

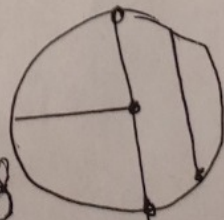
$$\sqrt{49-4}$$

$$\sqrt{45-4} = \sqrt{41}$$

$$a > b \quad \text{X}$$

$$b > a + 2 \rightarrow 8$$

$$\boxed{a; b} \quad b - a + 2 \rightarrow 4(b-a)$$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101610**

ID профиля: **193263**

Вариант 23

Черновик.

$$x > -34$$

$$x \neq -33$$

$$x > -\frac{23}{2}$$

$$x \neq -4; x \neq -3; -5$$

$$\frac{1}{2} \cdot -x - 4 > 0$$
$$x < -4$$

$$2 \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$$
$$(x+1)x^2 \cdot 2 = 1$$

$$2x^3 + 2x^2 - 1 = 0$$

$$2x^2(x+1) - 1 = 0$$

$$x \in (-11,5; -5) \cup (-5; -4)$$

$$22 \cdot x \quad 22 \cdot y \quad 22 \cdot z$$

$$2 - \text{np. } 4 - 10$$

$$11 - \text{np. } 4 - 10 \Rightarrow x, y, z =$$

$$= 2a \cdot 11b$$

3

$$x - 11, y, z = ?$$

$$2 \log_a b$$

$$2 \log_b c$$

$$\frac{1}{2} \log_c a$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$22 \cdot 11^{19} \quad 2^{16}$$

$$2^{16} \cdot 11^{19} \therefore a, b, c$$

$$\log_a b = \log_b c \cdot \log_c a$$

$$2 \log_{x+34} (2x+23)$$

$$2 \log_a b = \log_b c \cdot \log_c a$$
$$\frac{1}{2} \log_{2x+23} (-x-4)$$

$$\log_2 4 = 2$$

$$\log_4 2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \log_{x+34} -x-4$$

Черновик.

$$2 \log_{x+34}^{2x+23} \quad 2 \log_a b$$

$$2 \log_{2x+23}^{-x-4} \quad 2 \log_b c$$

$$\frac{1}{2} \log_{-x-4}^{x+34} \quad \frac{1}{2} \log_c a.$$

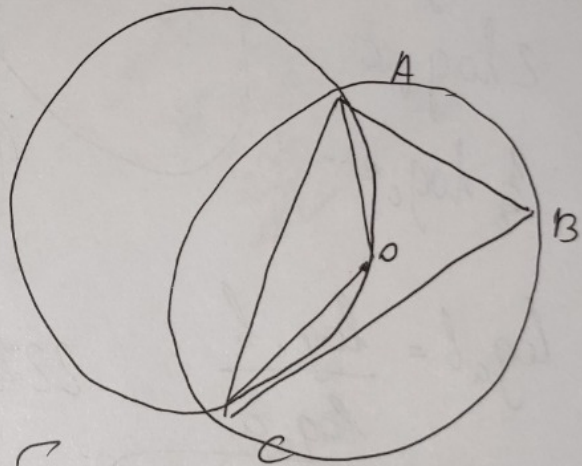
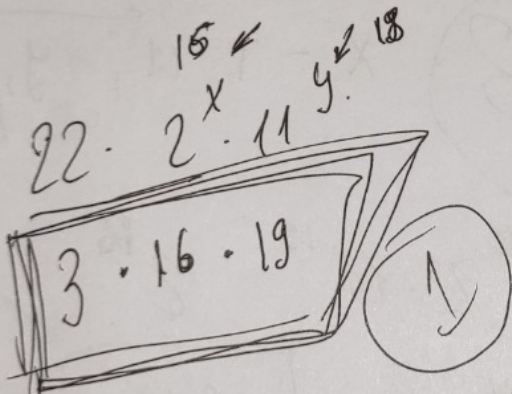
2.11.

$$\log_b c \cdot \log_a b = \log_a c \Rightarrow$$

$$22 \cdot 11^{18} \cdot 2^{15} \Rightarrow 2 \log_a b \log_b c \log_c a = 1.$$

$$(x+1)x^2 = \frac{1}{2}.$$

$$x^3 + x^2 - \frac{1}{2} = 0$$



$$x^3 + x^2 - \frac{1}{2} = 0.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$(kx^2 + ax + \frac{\sqrt{2}}{2})(bx - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$$

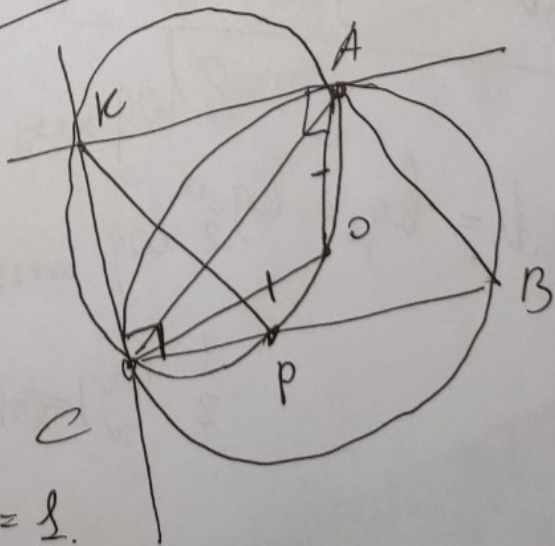
$$-x^2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$+kx - bx = 0.$$

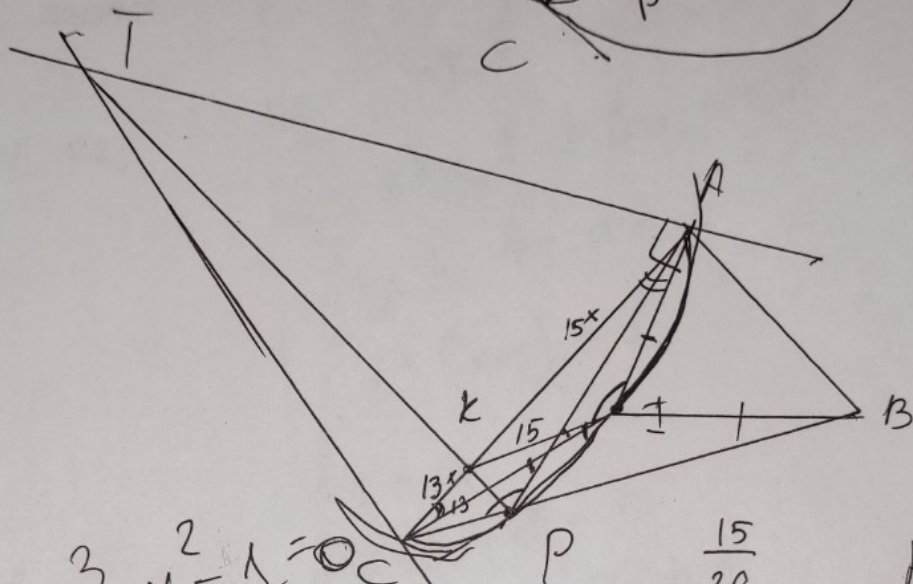
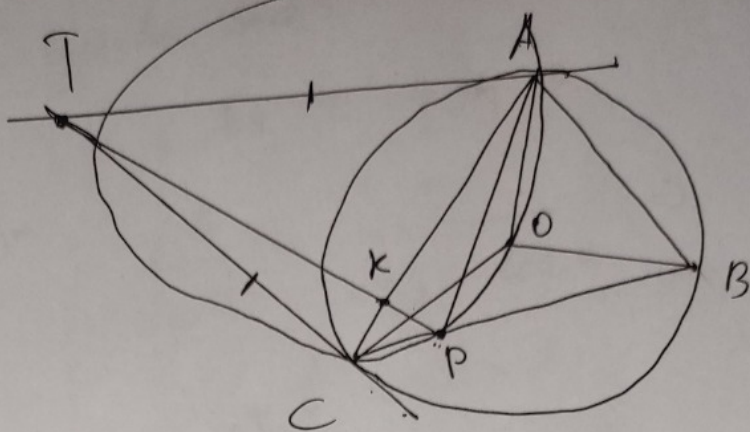
$$k \cdot b \neq 1.$$

$$a = b.$$

$$b - \frac{\sqrt{2}}{2} = b^3. \quad \frac{\sqrt{2}}{2} k + ab = 1.$$



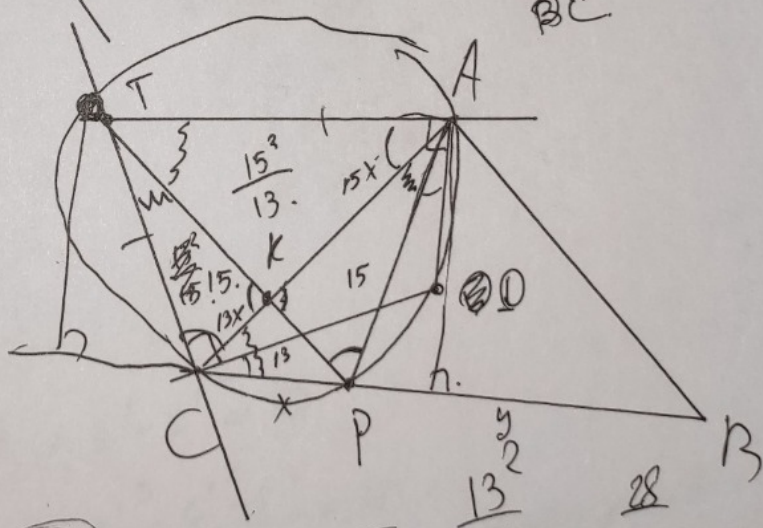
Черновик.



$$x^3 + x^2 - 1 = 0$$

$$\frac{15}{28}$$

$$\frac{AP}{BC}$$



$$\sqrt{2} - 0.5$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sqrt{2}$$

$$2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$$\log_2 4 = \log_2 16$$

$$\log_{16} 2$$

Упробук.

$$22 \cdot 11 \cdot 18 \cdot 2 \cdot 15$$

$$2^{15} \cdot 11^5 \cdot 18 \cdot 14$$

$$2^{15} \cdot 18$$

$$b^3 - b + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$x^3 - x^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$(kx^2 + ax + c)(x+d) = 0$$

$$k=1$$

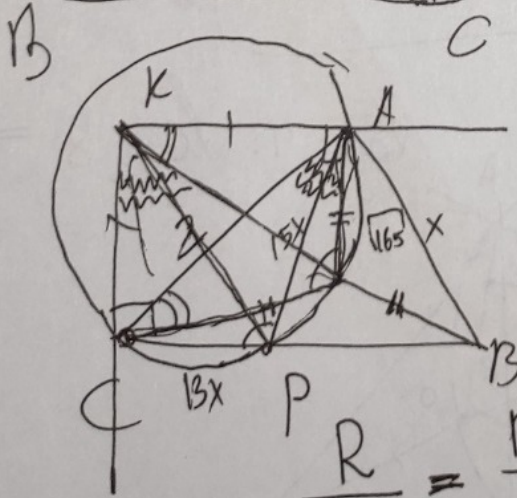
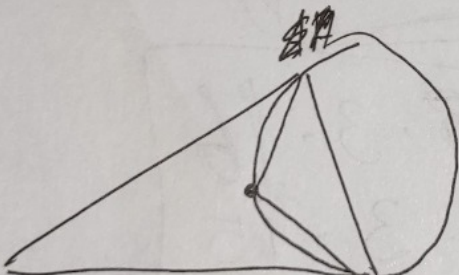
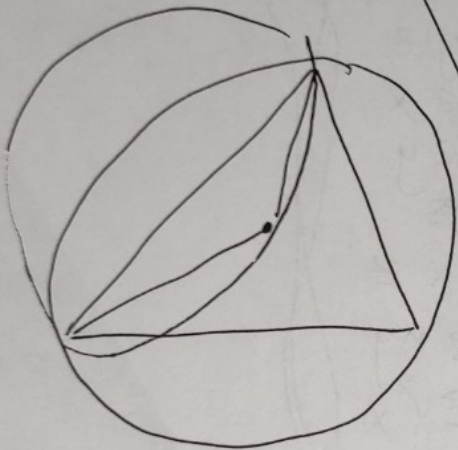
$$(x^2 + ax + c)(x+d) = 0$$

$$\sin \alpha + \sin \beta =$$

$$\frac{13}{15} \sin \alpha =$$

$$\sin(\alpha + \beta) =$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$



$$\begin{cases} cd = \frac{1}{2} \\ ad - c = 0 \\ a + d = 1 \end{cases}$$

$$15x - 13x = \sqrt{165}x$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{13}{15} \sin \alpha}$$

$$\frac{169}{225} =$$

$$cd = \frac{1}{2}$$

$$ad = c$$

$$a + d = 1$$

$$\frac{c}{d} = a$$

$$c \cdot d = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{15}{13}$$

$$\frac{PA}{PC} = \frac{15}{13}$$

$$15x \cdot 13x = 195x^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{R}{\sqrt{195}}$$

$$\frac{R}{13x} = \frac{R-1}{15x-1} = \frac{1}{1}$$

$22 \cdot x$ $22y$ $22z$ 11^n

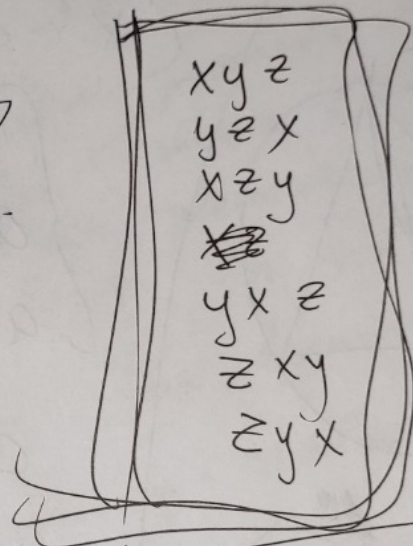
$2 \cdot 33 \log - \tau a \cdot \tau$ $T - ko \ 11$
 $HWZ - 10$ $T - ko \ 2 - mu$

~~+~~

$16 \cdot 19 \cdot 3$

~~HWZ~~

$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$



$$2 \log_{x+34} (2x+23) =$$

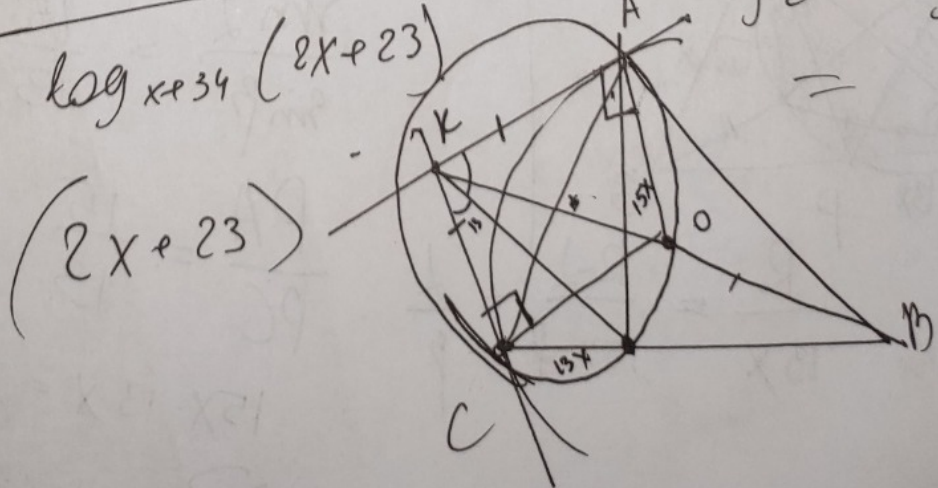
$$= 2 \log_{2x+23} (-x-4)$$

$$\log_{x+34} (2x+23) =$$

$$= \frac{\log_{x+34} (-x-4)}{\log_{x+34} (2x+23)}$$

$15 \cdot 3 \cdot 16$
 $19 \cdot 3 \cdot 15$

$$\log_2 4 \cdot \log_2 8 =$$



$$4) \begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 22 = 11 \cdot 2 \\ \text{НОК}(a; b; c) = 11^{19} \cdot 2^{16} \end{cases}$$

$\varphi(a; b; c) = ?$

НОД $(a; b; c) = 22 = 11 \cdot 2 \Rightarrow a = 22x$

$b = 22y$

$c = 22z$

~~НОК~~

2, 11 - простые числа \Rightarrow каждое из чисел x, y, z

будет представлено в виде $11^k \cdot 2^n$. ~~Среди этих чисел~~ \rightarrow Среди этих чисел найдется такое, что

k_1 или $n_2 = 0$ т.к. если все x, y, z содер-жат как 11 , так и 2 , то НОД $(a; b; c) \neq 22$.

~~Система симметрична \Rightarrow получим, если мы возьмем одно из чисел, будет 1 случай из 3! т.е. потом можно будет просто умножить на 6.~~

~~Уточ, пусть $z = 2^n$. Тогда при $n = 15$ z будет вклю-чать все 2 кн из 18 \Rightarrow $x = 11^{18} \cdot 2^{n_2}$, $y = 11^{k_3} \cdot 2^{n_3}$.~~

~~где $k_3 \leq 18$, n_2, n_3~~

Тогда пусть $z = 2^n$, $y = 11^k$

Рассмотрим 3 случая:

$n = 15, k = 18$

$n < 15, k < 18$

$n < 15, k = 18$

$n = 15, k < 18$

1) $n = 15, k = 18$. Тогда как бы мы не представили число x , всегда НОК будет равен $2^{16} \cdot 11^{19}$.
 При $n \leq 15, k \leq 18$. Тогда $\varphi x = 16 \cdot 19$
 (о том же считается)

2) $n < 15, k < 18$.

Тогда $x = 11^{18} \cdot 2^{15}$, число случаев $15 \cdot 18$.

3) $n < 15, k = 18$. Тогда $x = 2^{15} \cdot 11^{k_2}$; число су-
таев: $15 \cdot 19$.

4) $n = 15, k < 18$, Тогда $x = 2^{n_2} \cdot 11^{18}$; число су-
таев: $16 \cdot 18$

* где y, z - строго меньше, где $x - (\leq)$

Итого: $q_1 = 16 \cdot 19 + 16 \cdot 18 + 15 \cdot 19 + 15 \cdot 18 = (16+15)(18+19) =$
 $= 31 \cdot 37.$

Не забудем умножить на 6, так как все числа
разные, и можно поменять их местами.

Кроме того, исключительный случай: числа 22, 22,
 $22 \cdot 2^{15} \cdot 11^{18}$. Это добавит ещё 3 варианта.

Т.о. всего вариантов $31 \cdot 37 \cdot 6 + 3$

Ответ: $q_2 = 31 \cdot 37 \cdot 6 + 3$

5) Дано:

$$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23), \log_{(x+4)} = x+34, \log_{\sqrt{2x+23}}(x-4)$$

$$a = b, \text{ с } a = a+1 = b+1. \quad x = ?$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+34 > 0 \\ x+34 \neq 1 \\ 2x+23 > 0 \\ x+4 \neq 0 \\ x+4 \neq \pm 1 \\ 2x+23 \neq 1 \\ -x-4 > 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x \in \left(-\frac{23}{2}; -11\right) \cup (-11; -5) \cup (-5; -4)$$

Перепишем: $2 \log_{x+34}(2x+23), \frac{1}{2} \log_{-x-4} x+34$

$$2 \log_{2x+23} (-x-4)$$

$$x+34 = a, \quad 2x+23 = b, \quad -x-4 = c.$$

Тогда

$$2 \log_a b, \frac{1}{2} \log_c a; 2 \log_b c$$

$$2 \log_a b = 2 \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{2}{\log_b c \cdot \log_c a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \log_b c \cdot \log_a b \cdot \log_c a = 2$$

$$2 \cdot \log_b c \cdot 2 \log_a b \cdot \frac{1}{2} \log_c a = 2$$

$$\log_b c \cdot \log_a b \cdot \log_c a = 1$$

Тогда $x^2(x+1) = 1$.

$$x^3 + x^2 - 1 = 0$$

$$(x^2 + a'x + b')(x + c') = 0$$

$$a' + c' = 1$$

$$b'c' = -1$$

$$b' + a'c' = 0$$

$$a' = 1 - c'$$

$$b' = -\frac{1}{c'}$$

$$\frac{-1}{c'} + c' - c'^2 = 0$$

$$c'^3 - c'^2 - 1 = 0$$

Решив это ур-е, можно получить коэффициенты
затем корни, и решив 3 ур-я все значения X.