Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101581**

ID профиля: **51160**

Вариант 23

Чистовик

N1

Пусть x – ~~[illegible]~~ разность прогрессии, т.е

$a_n = a_1 + x\cdot(n-1)$

т.к прогрессия возраст. → $x > 0$

~~За~~ Запишем условие через a_1 и x.

$S = 6a_1 + \frac{5\cdot 6}{2}\cdot x = 6a_1 + 15x$

$$\begin{cases}(a_1+9x)(a_1+15x) > S+39 \ (1) \\ S+55 > (a_1+10x)(a_1+14x) \ (2)\end{cases}$$ складыв.

$a_1^2 + 24a_1x + 135x^2 + S + 55 > S + 39 + a_1^2 + 24a_1x + 140x^2$

$16 > 5x^2$

~~[illegible]~~ т.к $x > 0$ ~~[illegible]~~

↓

$4 > \sqrt{5}\cdot x$, ~~т.к x цел~~

1) $x = 1$ $\quad 16 > 5\cdot 1$

2) $x \geq 2$ $\quad 16 < 5\cdot x^2$ $\quad$ т.к $x^2 \geq 4$

↓

подходит только $x = 1$, т.к x – целое, т.к все члены прогр. целые

Смотрим огранич. на a_1 из (1) и (2)

(1): $a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 15 + 39$

$a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0$

$(a_1+9)^2 > 0 \rightarrow a_1 \neq 9$

(2): $a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 15 + 55$

$a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0$

$D = 324 - 70\cdot 4 \rightarrow D = 44$

$a_1 = -9 \pm \sqrt{11}$

$(a_1 - (-9+\sqrt{11}))(a_1 + (-9 - \sqrt{11})) < 0$

~~$-9+\sqrt{11}$~~

Чистовик

№1 (продолж)

$-9+\sqrt{11} < -5$

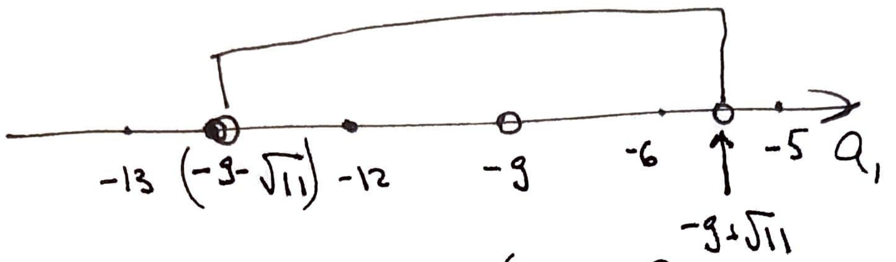
т.к $\sqrt{11} < 4$ $(11<16)$

$-9+\sqrt{11} > -6$, т.к $\sqrt{11} > 3$ $(11>9)$

$-9-\sqrt{11} > -13$, т.к $4 > \sqrt{11}$

$-9-\sqrt{11} < -12$, т.к $\sqrt{11} > 3$

↓



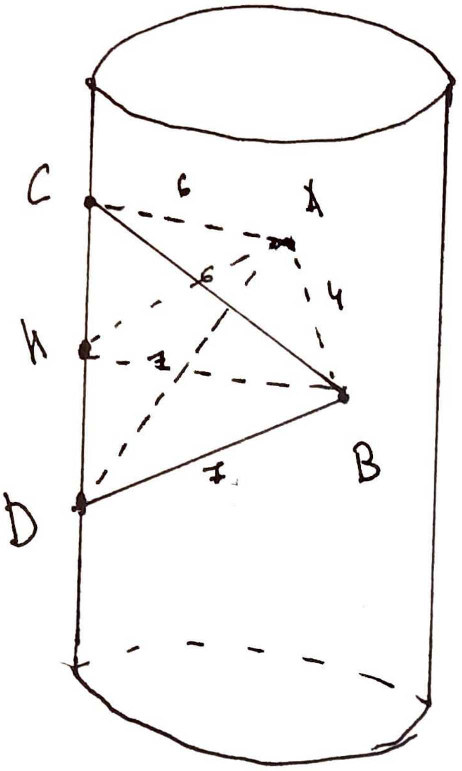
Из целых a_1 (т.к все члены прогр. целые)

$a_1 = \{-12; -11; -10; -8; -7; -6\}$

Ответ: $-12, -11, -10, -8, -7, -6$.

Чистовик

N2



AC = CB = 6
AD = DB = 7
AB = 4

Заметим, что △ACD = △BCD по трем сторонам (AC = CB, AD = DB, CD – общая)

↓

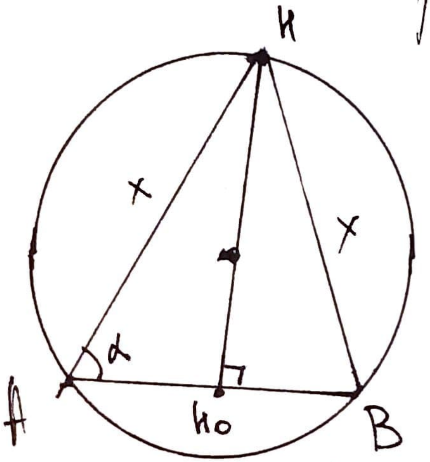
~~Перпендикуляры из~~ Высоты из точек A и B на сторону CD попадают в одну точку H. →

AH = HB = x ; AH ⊥ CD, BH ⊥ CD →

пл. AHB ∥ основ. цилиндра т.к CD перпенд. ему (т.к CD парал. оси цилиндра)

↓

радиус цилиндра равен радиусу опис. окруж. вокруг △AHB



$\angle HAB = \alpha$

т.к △AHB – р/б, то HH_0 – высота и медиана →

→ $AH_0 = 2$

→ $\cos\alpha = \frac{2}{x}$ → $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}$

Радиус описаной окружности:

по Th. синусов: $R = \frac{x}{2\sin\alpha} = \frac{x}{2\cdot\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^4}}}$

Чистовик

№2

R миним, когда $2\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^4}}$ – максим. →

→ когда $\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^4}$ – максим.

$$\left(x^{-2}-4x^{-4}\right)' = -2x^{-3}+16x^{-5}=0$$

$x\neq 0 \rightarrow$ $\frac{8}{x^2}-1=0 \Rightarrow x^2=8$

т.к $x>0 \Rightarrow x=2\sqrt{2}$

Убедимся, что это максимум, а не минимум.

$\frac{1}{x^2}=t$ $t-4t^2$ – парабола ветвями вниз
у нее есть максимум.

По Th Пифагора:

$\triangle BHD$: $HD=\sqrt{49-x^2}$

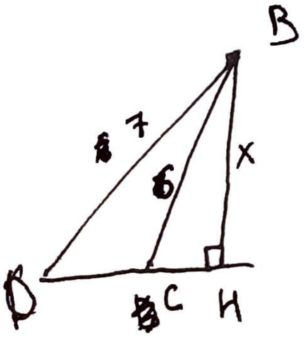
$\triangle BCH$: $CH=\sqrt{36-x^2}$

$\rightarrow CD = HD+CH=\sqrt{41}+\sqrt{28}=\sqrt{41}+2\sqrt{7}$

~~Ответ: $\sqrt{41}+2\sqrt{7}=CD$~~

Это если точка H попала на отрез. CD.

Если H лежит вне CD:



По Th. Пифагора:

$\triangle BCH$: $CH=\sqrt{36-x^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

$\triangle BDH$: $DH=\sqrt{49-x^2}=\sqrt{41}$

$CD=DH-CH=\sqrt{41}-2\sqrt{7}$

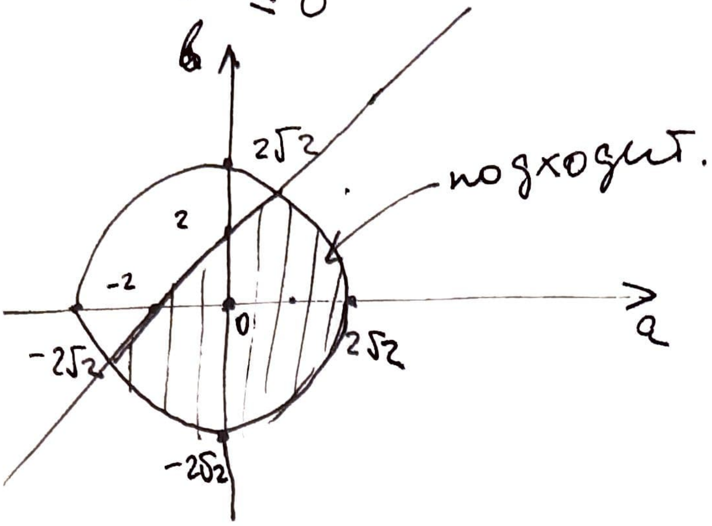
Ответ: $CD=\sqrt{41}\pm 2\sqrt{7}$.

№3 Чистовик

а) Если $8 \geq 4(в-а)$

$2 \geq в-а$

$a^2+в^2 \leq 8$



б) Если $8 < 4(в-а)$

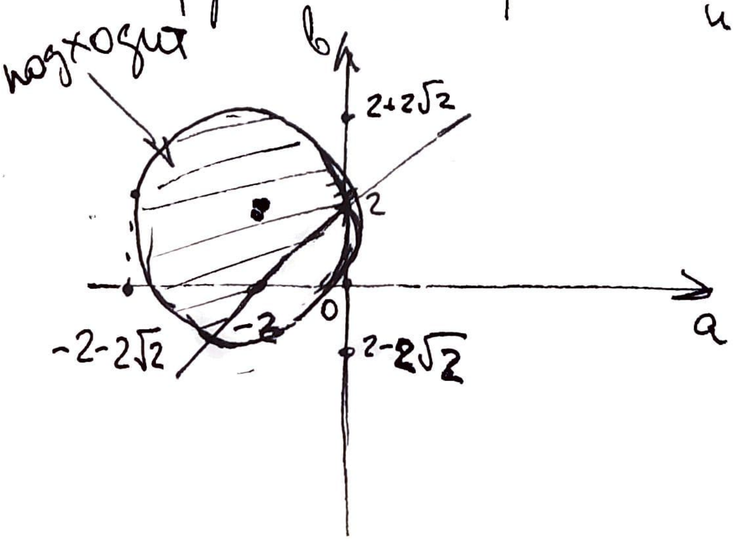
$2 < в-а$

$a^2+в^2 \leq 4(в-а)$

$a^2+4a+4+в^2-4в+4-8 \leq 0$

$(a+2)^2+(в-2)^2 \leq 8$

круг с центром в т. $(-2;2)$ и радиуса $2\sqrt{2}$

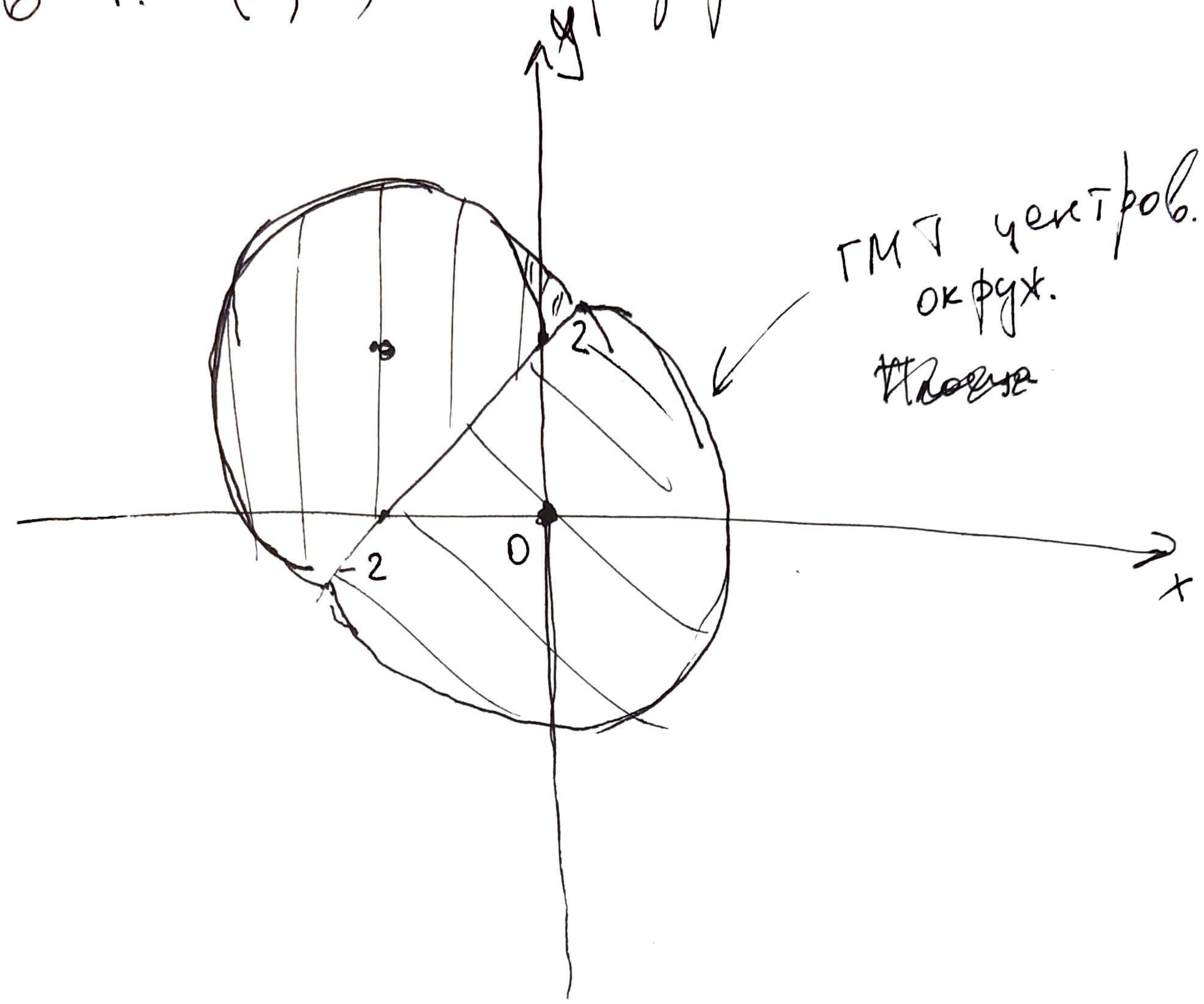


⑤

Чистовик.

N3

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8$ – круг с центром в т. $(a;b)$ и радиуса $2\sqrt{2}$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101581**

ID профиля: **51160**

Вариант 23

Чистовик

№1

Лемма: в разлож. чисел a, b, c не входят никакие простые, кроме 2 и 11

Д-во: Пусть входят. Тогда НОК должен делится на них, но НОК делится только на 2 и 11 из простых → противоречие.

↓

$$a = 2^{x_1} 11^{y_1} \qquad b = 2^{x_2} 11^{y_2} \qquad c = 2^{x_3} 11^{y_3} \longrightarrow \begin{cases} \min(x_1; x_2; x_3) = 1 \\ \min(y_1; y_2; y_3) = 1 \end{cases} \leftarrow \text{из НОД}$$

$$\begin{cases} \max(x_1; x_2; x_3) = 16 \\ \max(y_1; y_2; y_3) = 19 \end{cases} \leftarrow \text{из НОК}$$

Вначале разберемся с x. Из данных условий видно, что один из x равен 1, а другой 16.

Пусть 1) ровно один x равен 1 и ровно один = 16

Тогда вариантов выбрать знач. x_1, x_2, x_3:

$$3 \cdot 2 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{вар. для остав. } x}}{1\cancel{3}4} = \cancel{30}\, 84$$

2) Два x равны 1 и один 16 и два x равны 16 и один 1.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{вар. выбрать отлич. } x}}{3} \cdot 2 = 6$$

Итого вариантов выбрать ~~распр.~~ знач. x : $\boxed{90}$

№1 (продолж.)   Чистовик

Теперь аналогич. с y:

1) ровно один y равен 1 и ровно один равен 19

$3 \cdot 2 \cdot 17 = 102$

2) ~~ровно~~ два равны 1 и один 19

два равны 19 и один 1

$3 \cdot 2 = 6$

~~3·2·2·17~~

Итого вариантов для y: $\boxed{108}$

Итого всего кол-во троек: $108 \cdot 90 = \boxed{9720}$

Ответ: 9720

Чистовик

N 5

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, $\log_{(x+4)^2}(x+34)$, $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

ОДЗ: $x \neq -5$ $x \neq -11$

$-4 > x > -11,5$

$x+34=a$

$2x+23=b$

$-x-4=c$

$\log_{\sqrt{a}}(b)$, $\log_{c^2}(a)$, $\log_{\sqrt{b}}(c)$

ОДЗ: $a \neq 1$ $c \neq 1$ $b \neq 1$

$a > 0$ $c > 0$ $b > 0$

При переходе к числам:

$\overset{t_1}{2\log_a(b)}$, $\overset{t_2}{\frac{1}{2}\log_c(a)}$, $\overset{t_3}{2\log_b(c)}$

ОДЗ не меняется.

Если $t_1 \neq 0, t_2 \neq 0, t_3 \neq 0.$

$$t_1 = 2\log_a(b) = 2\cdot\frac{\log_b(b)}{\log_b(a)} = \frac{2}{\log_b(a)}$$

$$t_2 = \frac{1}{2}\log_c(a) = \frac{1}{2}\frac{\log_b(a)}{\log_b(c)}$$

~~$t_1 \cdot t_2 = \frac{1}{\log_b(c)}$~~

$t_1 \cdot t_2 = \frac{2}{t_3}$

~~$t_1 \cdot t_2 = \frac{1}{2t_3}$~~

$t_1 t_3 \cdot t_3 = 2$

~~$2t_1 t_2 t_3 = 1$~~

~~Пусть два равных между собой числа равны по n, а третье тогда $n+1$.~~

~~$2n^2(n+1)=1$~~

~~$2n^3+2n^2-1=0$~~

Чистовик

№5

Пусть два равных между собой t_i равны n.

$n^2(n+1)=2$

$n^3+n^2-2=0$

~~$\boxed{n=1}$~~

~~$n^3+2n^2\ (n-1)(n+1)^2=0$~~

$(n-1)(n^2+2n+2)=0$

$n^2+2n+2>0$ т.к $D=4-2\cdot4<0$

$\downarrow$

$n=1$

Пусть $t_1=1$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=1$

$2x+23=\sqrt{x+34}$

$4x^2+529+46x=x+34$

$4x^2+45x+495=0$

$D=2025-495\cdot16<0 \Rightarrow t_1\neq1 \Rightarrow t_1=2$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=2$

$x+34=2x+23$

$\boxed{x=11}$ – не подх по ОДЗ:

~~но: $\log_{\sqrt{45}}45\neq1$ — не подх.~~

Чистовик

№5

Теперь вспомним, что один из логар. может быть 0. т.к. $t_1 \neq 1 \rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=0 \\ t_1=-1 \end{array}\right.$

1) $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=0$

~~$\sqrt{x+34}$ 2x~~ $2x+23=1$

$x=-11$ — не подх по ОДЗ.

2) $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=-1$

~~$\frac{1}{\sqrt{x+34}} = 2x+23$~~

Тогда а) $\log_{(x+4)^2}(x+34)=0$

~~x+34~~ $x=-33$ — не подх по ОДЗ.

б) $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=0$

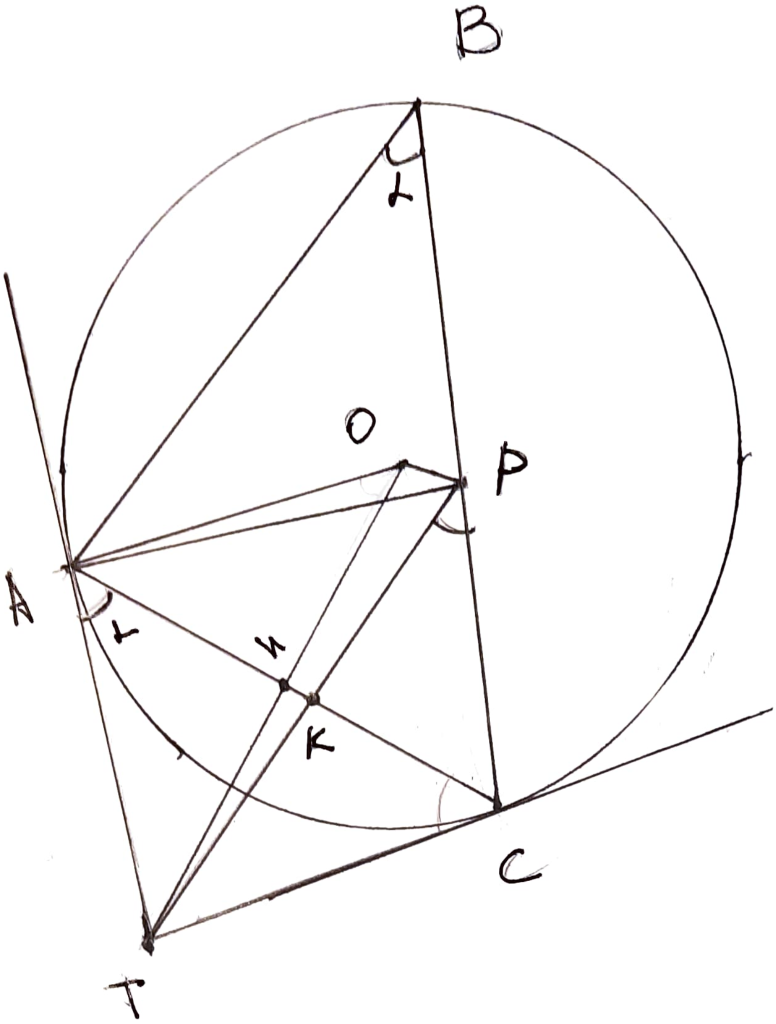
~~2x+22 x=-4 не подх~~

$-x-4=1$ — не подх по ОДЗ.

Ответ: $x - \varnothing$.

Чистовик

№6



$S_{APK} = 15$

$S_{PKC} = 13$

AOPC - лежат на одной окруж.

$S_{APK} = AK \cdot KB \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\angle AKP$

$S_{PKC} = PK \cdot KC \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\angle PKC$

↓

$$\frac{AK}{KC} = \frac{15}{13}$$

Т.к A и C точки касания, то $AO \perp AT$ и $OC \perp TC \rightarrow AOCT$ - впис. →

→ A, O, P, C, T лежат на одной окруж. →

→ $\angle TAC = \angle TPC$, т.к AT — касат →

→ $\angle CAT = \angle CBA = \alpha \rightarrow$ ~~ка~~ $\angle CBA = \angle CBK = \alpha \rightarrow$

→ $PK \parallel AB \rightarrow \triangle CPK$ подоб $\triangle CBA$ ~~на~~

с коэф. $\frac{CK}{CK+KA} = \frac{13}{28} \rightarrow S_{CBA} = \frac{28^2}{13^2} \cdot 13 =$

$= \frac{784}{13}$

Ответ: $\frac{784}{13}$

⑥

Чистовик

~~$S_{ABC} = 1$~~ $AO = R$

$2R = \frac{AC}{\sin\alpha}$

ТО – бисс угла $\angle ATC$ т.к. Т точка пересеч. касат.

$\angle AOC = 2\angle ABC = 2\alpha$

В силу симметр. отн. ТО:

$\angle AOT = \angle TOC = \alpha$

$tg\alpha = \frac{AT}{R} \Rightarrow \frac{4}{7} = \frac{AT}{R}$

$AT = TC$ как отр. касат. $\Rightarrow$ АТС – р/б

ТН – бисс. ⇒ высота и медиана

$\Rightarrow AH = \frac{1}{2}AC$

~~$\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{AT}{AH}$~~

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot AB \cdot BC$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cos\alpha\, AB \cdot BC$