Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101545**

ID профиля: **862695**

Вариант 23

№1.

Чистовик №1.

Пусть a_1 - первый член посл-ти, d - ее шаг. Т.К. посл-ть возр-ет: $d>0$, т.к. все члены посл-ти - целые числа $\Rightarrow a_1; d \in \mathbb{Z}$.

$$S_6 = \frac{2a_1+5d}{2}6 = 6a_1+15d$$

сумма первых шести чл. посл-ти

$$\begin{cases} a_{10} = a_1+9d \\ a_{11} = a_1+10d \\ a_{15} = a_1+14d \\ a_{16} = a_1+15d. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{10}a_{16} > S+39 \\ a_{11}a_{15} < S+55 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (a_1+9d)(a_1+15d) > 6a_1+15d+39 \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < 6a_1+15d+55 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+9d)(a_1+15d) > 6a_1+15d+39 \\ -(a_1+10d)(a_1+14d) > -(6a_1+15d+55) \end{cases} \xLeftrightarrow{} (a_1+9d)(a_1+15d)-(a_1+10d)(a_1+14d) >$$

суммируем: левые части больше правых (попарно) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ сумма левых > суммы правых

$$> 6a_1+15d+39-6a_1-15d-55 \Leftrightarrow a_1^2+24a_1d+135d^2-a_1^2-24a_1d-140d^2 > -16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5d^2 > -16 \Leftrightarrow 5d^2 < 16 \Leftrightarrow d^2 < \frac{16}{5} \Leftrightarrow |d| < \sqrt{3{,}2} \xLeftrightarrow[\text{т.к. } d\in\mathbb{Z}]{} d \in \{-1;0;1\}, \text{ т.к. } d>0 \Rightarrow \boxed{d=1}.$$

$$1 < \sqrt{3{,}2} < 2$$

$d=1$. Подставим это в систему: $\begin{cases} (a_1+9)(a_1+15) > 6a_1+15+39 \\ (a_1+10)(a_1+14) < 6a_1+15+55 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+24a_1+135 > 6a_1+54 \\ a_1^2+24a_1+140 < 6a_1+70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+18a_1+81 > 0 \\ a_1^2+18a+70 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+9)^2 > 0 \\ (a_1+9)^2 < 11. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -9 \\ a_1+9 < \sqrt{11} \\ a_1+9 > -\sqrt{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -9 \\ a_1 < -9+\sqrt{11} \\ a_1 > -9-\sqrt{11} \end{cases} \Longleftrightarrow a \in \{-12;-11;-10;-8;-7;-6\}.$$

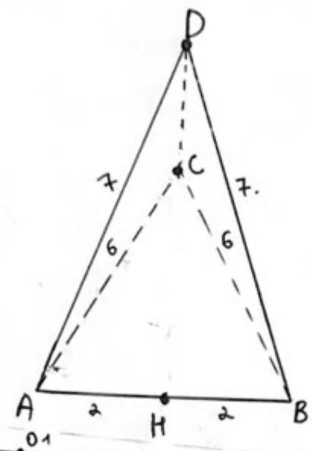
т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$; $3 < \sqrt{11} < 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow -6 < -9+\sqrt{11} < -5$; $-13 < -9-\sqrt{11} < -12$,
$a \neq -9$

Ответ: $a \in \{-12;-11;-10;-8;-7;-6\}$.

№2.

Чистовик №2.

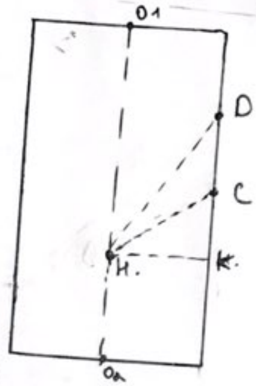
$AB=4.$
$AC=CB=6$
$AD=DB=7.$



CD параллельна оси цилиндра $\Rightarrow$
~~...~~
$\Rightarrow$ сечения цилиндра пл-тями (ABC) и (ABD) — эллипсы (окр-ть, если пл-ть парал. осн-ю).

Пусть H – серед AB, тогда CH, DH – высоты, медианы и бис-сы соотв. р/б Δ-ов ABC и ABD; $AH=HB=2$.

Посмотрим на цилиндр и тетраэдр сбоку: пусть O_1O_2 – ось цилиндра (и, соот-но центры осн-ий: O_1 и O_2).



Из р/б ΔABC: $CH \perp AB$; $HB=2$ $\Rightarrow$ по т-ме Пифагора из ΔCHB: $CH=\sqrt{36-4}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

Из р/б ΔABD: $DH \perp AB$: $HB=2 \Rightarrow$ по т-ме Пифагора из ΔDHB: $HD=\sqrt{49-4}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

Т.к. $CH \perp AB$; $DH \perp AB$; $CH \cap DH = H \Rightarrow (CDH) \perp AB$, но, т.к. $CD \parallel O_1O_2$; $CD \subset (CDH) \Rightarrow AB \perp O_1O_2$,

вид на цилиндр сбоку (AB – диам. сечения цилиндра пл-тью, проходящей через AB и парал. осн-ям)

Значит AB лежит в пл-ти, параллельной осн-ю, проведем такую пл-ть: сечение цилиндра этой пл-тью – окр-ть, равная окр-ти в осн-иях. Значит диаметр этой окр-ти, а значит и диаметр осн-я не может быть больше AB (т.к AB – хорда). Значит радиус окр-ти не может быть больше $\frac{AB}{2}$, т.е больше 2.

Предположим, что радиус окр-ти $=2$, тогда AB – диаметр сечения. Значит O_1O_2 делит AB пополам – на радиусы, H – серед BA $\Rightarrow H \in O_1O_2$ ... серед AB.
Посмотрим на цилиндр так, что точки A и B проецируются в одну.

Пусть HK – пер-р к CD, тогда HK пар-на осн-ям $\Rightarrow$ HK – радиус сечения цил пл-тью парал осн-ям, прох через AB, $\Rightarrow HK=2$.
По т-ме Пифагора из ΔCHK: $CK=\sqrt{CH^2-HK^2}=\sqrt{32-4}=2\sqrt{7}$
по т-ме Пифагора из ΔDHK: $DK=\sqrt{DH^2-HK^2}=\sqrt{45-4}=\sqrt{41}$.
Значит $CD=\sqrt{41}-2\sqrt{7}$.

Но возможен и другой случай расположения CH; DH и HK:

— в этом случае длины CH и DH – те же, но $CD=CK+KD=2\sqrt{7}+\sqrt{41}$

Ответ: $CD=\sqrt{41}\pm 2\sqrt{7}$

№3. Чистовик №3.

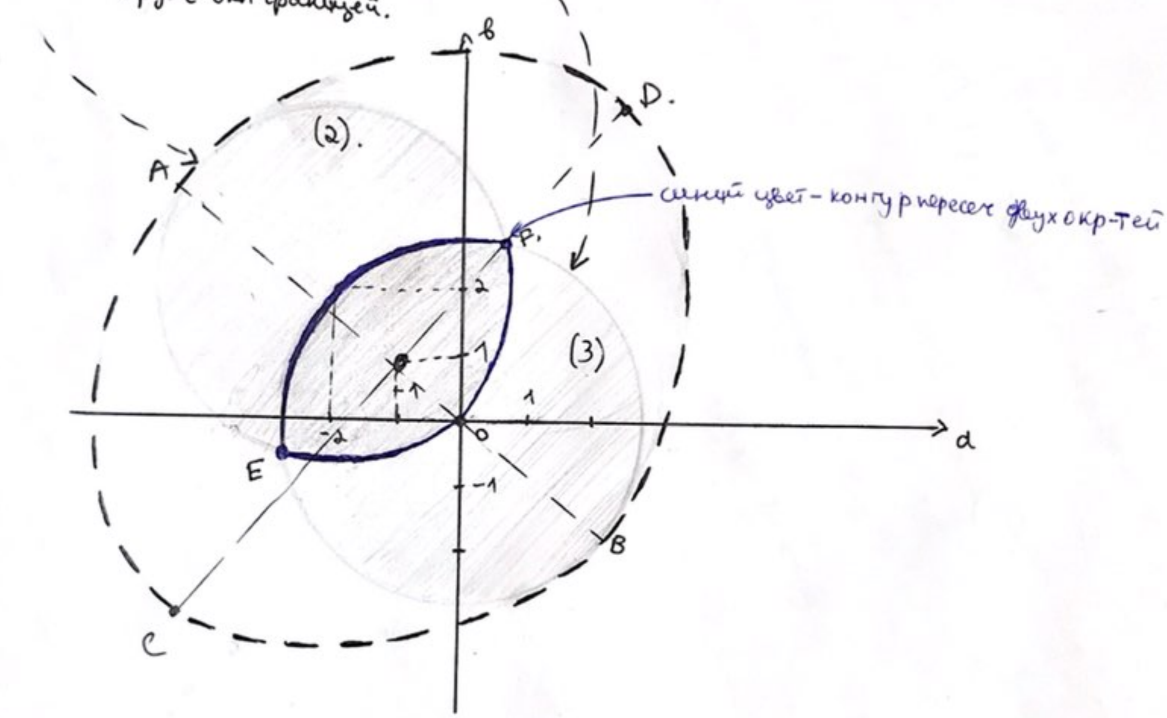
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le \min(-4a+4b;8)\end{cases} \iff \begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 8\\ a^2+b^2\le -4a+4b\\ a^2+b^2\le 8\end{cases} \iff \begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 8 \ (1)\\ (a+2)^2+(b-2)^2\le 8 \ (2)\\ a^2+b^2\le 8. \ (3)\end{cases}$$

(1) – ~~окр-ть~~ круг с вкл границей с ц$(x;y)$ и $r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

(2) – ~~окр-ть~~ круг с вкл границей с ц$(-2;2)$ и $r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

(3) – ~~окр-ть~~ с ц$(0;0)$ и $r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ круг с вкл границей.

(в пл-ти Oab).



Все $(x;y)$, удовлетворяющие системе, т.е при которых найдется пара $a;b\in\mathbb{R}$ при которых она выполняется: все $(x;y)$, для которых окр-ть с ц$(x;y)$ и $r=2\sqrt{2}$ имеет ~~...~~ хотя бы одну общую точку с фигурой, ограниченной синим цветом (включая границу) (пересечение двух окр-тей (2) и (3)). Эту фигуру можно получить, проводя циркулем из каждой точки -фигуры окр-ть с радиусом $2\sqrt{2}$. Сделав так, я получил фигуру (эллипс) и обозначил её контур чёрной пунктирной линией. Все, что в пределах этого контура, включая границу – все подходящие ~~круг~~ пары $(x;y)$. Эллипс симметричен. относительно центра синей фигуры ( ) этот центр – середина отрезка, соединяющего центры окр-тей (2) и (3) – $(0;0)$ и $(-2;2)$, т.е центр: $(-1;1)$. Пусть AB – минимальное расстояние между двумя противоположными точками эллипса, CD – максимальное (см. рис график).

чистовик н4.

Тогда, т.к. эллипс, $(-1;1)$ центр; $AB \perp CD$; $AB \cap CD = (-1;1)$.

~~AB=~~ AB = сумма ~~радиусов~~ диаметров двух окр-тей $-$ $\underbrace{\text{расстояние между центрами}}_{=\sqrt{8},\ \text{т.к. } (-2;2) \text{ и } (0;0)}$ $=$

$$= \underbrace{2\cdot 2\sqrt{2}}_{\text{диаметр } 1} + \underbrace{2\cdot 2\sqrt{2}}_{\text{диаметр } 2} - 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

~~CD=~~ CD: ~~тк~~ найдем коор-ты E и F: ~~E~~

$$\begin{cases}(a+2)^2+(b-2)^2=8\\ a^2+b^2=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+4a+4+b^2-4b+4=8\\ a^2+b^2=8\end{cases} \underset{\text{вычитание}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}4a-4b+8=0.\\ a^2+b^2=8\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a-b=-2\\ a^2+b^2=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=b-2\\ (b-2)^2+b^2=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=b-2\\ 2b^2-4b+4=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=b-2\\ b^2-2b-2=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=b-2\\ (b-1)^2=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=b-2\\ b=+1\pm\sqrt{3}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=1+\sqrt{3}\\ a=-1+\sqrt{3}\end{cases} \leftarrow \text{соотв точке } F\\ \begin{cases}b=1-\sqrt{3}\\ a=-1-\sqrt{3}.\end{cases} \leftarrow \text{соотв точке } E\end{array}\right.$$

$F(-1+\sqrt{3};1+\sqrt{3})$

$E(-1-\sqrt{3};1-\sqrt{3})$. $\Leftrightarrow EF=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.

$$CD = EF + \underbrace{2\sqrt{8}}_{+2r} = 2(\sqrt{6}+\sqrt{8}).$$

$$S = 2\pi\cdot\frac{CD}{2}\cdot\frac{AB}{2} = 2\pi\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{8})\,6\sqrt{2} = 12\pi(\sqrt{12}+4)$$

Ответ: $12\pi(\sqrt{12}+4)$.

S_6

$a_{10}a_{16} > S+39$ Черновик.

$a_{11}a_{15} < S+55.$

$a_1; d.\ a_1 \in \mathbb{Z}; d \in \mathbb{Z}.$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$a_{16} = a_1 + 15d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{15} = a_1 + 14d.$

$$S_6 = \frac{2a_1 + 5d}{2} 6 = 6a_1 + 15d$$

$$\begin{cases} (a_1 + 9d)(a_1 + 15d) > 6a_1 + 15d + 39 & (1) \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 6a_1 + 15d + 55. & (2) \end{cases}$$

(1) $\cancel{a_1^2 + 24a_1d + 225d^2 > 6a_1 + 15d + 39.}$

$(a_1 + 8d)(a_1 + 15d) > 5a_1 + 39.$

$\cancel{(2) - (1) = (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) - 6a_1 + 15d + 39 > 6a_1 + 15d + 55 - (a_1 + 9d)(a_1 + 15d)}$

$(2) - (1): (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) - (a_1 + 9d)(a_1 + 15d) < 6a_1 + 15d + 55 - 6a_1 + 15d + 39$

$a_1^2 + 24d + 140d^2 - a_1^2 - 24d - 135d^2 < 16.$

$5d^2 < 16.$

$d^2 < \frac{16}{5}$

$|d| < \sqrt{\frac{16}{5}}$

$1. < \sqrt{\frac{16}{5}} = \sqrt{3,2} < 2$

Значит, т.к. $d \in \mathbb{Z}$, $d \in \{-1; 0; 1\}$

при $d = -1$ и $d = 0$ посл-ть не возр-ет $\Rightarrow$

$\Rightarrow d = 1.$

Значит: $\begin{cases} (a_1 + 9)(a_1 + 15) > 6a_1 + 15 + 39 \\ (a_1 + 10)(a_1 + 14) < 6a_1 + 15 + 55 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 54. \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \\ a_1^2 + 18a + 70 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$a_1 \neq -9$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 9)^2 > 0. \\ (a_1 + 9)^2 < 11. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 + 9 < \sqrt{11} \\ a_1 + 9 > -\sqrt{11}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 < -9 + \sqrt{11} \\ a_1 > -9 - \sqrt{11} \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in (-9 - \sqrt{11}; -9 + \sqrt{11})$

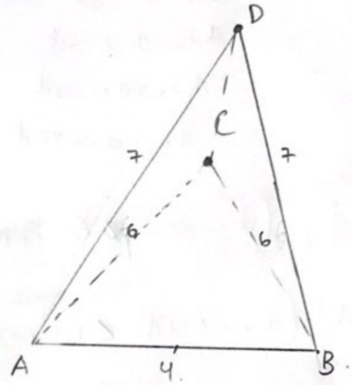
$a_{11}a_{15} = -2 \cdot 2 = -4.$ $\quad a_{10}a_{16} = -3 \cdot 3 = -9$ $\quad S_6 = -12 + -11 + -10 + -9 + -8 + -7 =$ т.к. $a \in \mathbb{Z}$, $\min a = -12.$

$-4 < -57 + 55 = -2.$ $\quad -9 > -57 + 39 = -18.$ $\quad = -57.$ $\quad 3 < \sqrt{11} < 4$

$AB = 4$

$AC = CB = 6$

$AD = DB = 7.$



$HK^2 + CK^2 = 32.$

$HK^2 + (CK + x)^2 = 45. \Rightarrow HK^2 + CK^2 + 2xCK + x^2 = 45 \Rightarrow 2xCK + x^2 = 13$

(1) - окр-ть с ц$(a; b)$ и $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$a^2 + b^2 \leq \min(-4a + 4b; 8)$

$Oab.$

(1) окр-ть с ц$(x; y)$ и $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

(2) ~~Окр~~ круг с границей и $r \leq \sqrt{8}$
с ц$(0;0)$

~~(2)~~.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (a-x)^2 + (b-y)^2 \leq 8. \\ a^2 + b^2 \leq -4a + 4b \\ a^2 + b^2 \leq 8 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (a-x)^2 + (b-y)^2 \leq 8. & \text{- окр с ц}(x;y) \text{ и } r=\sqrt{8} \\ (a+2)^2 + (b-2)^2 \leq 8. & \text{- окр с ц}(-2;2) \text{ и } r = \sqrt{8}. \\ a^2 + b^2 \leq 8. & \text{- окр. с ц}(0;0) \text{ и } r = \sqrt{8} \end{cases}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101545**

ID профиля: **862695**

Вариант 23

№4

Чистовик №5. (1-во II ч).

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 22 \\ НОК(a;b;c) = 2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

Пусть $a = 22x$, $b = 22y$, $c = 22z$, где $x, y, z \in \mathbb{N}$, причем x, y, z – взаимно простые числа, т.к. НОД $(22x; 22y; 22z) = 22$.

Тогда НОК $(22x; 22y; 22z) = \cancel{22}\ xyz$ (т.к. взаимно простые)

$$xyz = 2^{16}\cdot 11^{19}.$$

Т.к. $x; y; z$ – взаимно простые числа, ~~т.к.~~ их НОД$(x;y;z) = 1$, то одно из этих чисел $= 2^{16}$, второе 11^{19}, третье равно 1.*

У числа x три варианта, чем он будет, при выбранном x ~~y~~ для числа y 2 варианта, при выбранных $x; y$ ~~y~~ для числа z остается только один вариант. Поэтому всего возможных вариаций $x; y; z$ всего ~~6.(2·3)~~ $2\cdot 3 = 6$. Поэтому и у соот-в-щих им $a; b; c$ тоже может быть всего 6 вариаций.

* либо ~~*~~ одно из чисел равно $2^{16}\cdot 11^{19}$, второе и третье число $= 1$. ~~Ответ: 6.~~

Таких вариаций 3. Итого 9 $(3+6)$ возвожных вариантов.

у соот-в-щих a, b, c тоже 3.

Ответ: 9.

15

Чистовик №6 (2 во II ч). (* – в конце задания.)

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$

$\log_{(x+4)^2}(x+34)$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

Пусть два ~~числа~~ логарифма равны a; третий, соотв-но, $a+1$.

Перемножим три ~~логар.~~ логарифма:

$$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)\cdot\log_{(x+4)^2}(x+34)\cdot\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=a\cdot a(a+1)=a^2(a+1)=$$

$$=\frac{\ln(2x+23)}{\ln\sqrt{x+34}}\cdot\frac{\ln(x+34)}{\ln(x+4)^2}\cdot\frac{\ln(-x-4)}{\ln\sqrt{2x+23}}=\frac{\ln(2x+23)}{\ln\sqrt{2x+23}}\cdot\frac{\ln(x+34)}{\ln\sqrt{x+34}}\cdot\frac{\ln(-x-4)}{\ln(-x-4)^2}=$$

$$=2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=2.$$

$$a^2(a+1)=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^3+a^2-2=0\Leftrightarrow a^3-a^2+2a^2-2a+2a-2=0\Leftrightarrow(a-1)(a^2+2a+2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(a-1)(\underset{>0}{(a+1)^2+1})=0\Leftrightarrow a=1.$$

~~Итог~~ Итог: два из трех данных в примере логарифмов равны 1; третий $=a+1=2$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=1\\ \log_{(x+4)^2}(x+34)=1\\ \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=2\end{cases}\\ \begin{cases}\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=1\\ \log_{(x+4)^2}(x+34)=2\\ \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=1\end{cases}\\ \begin{cases}\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=2\\ \log_{(x+4)^2}(x+34)=1\\ \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+34}=2x+23\\ x^2+8x+16=x+34\\ 2x+23=-x-4\end{cases}\quad(1)\\ \begin{cases}\sqrt{x+34}=2x+23\\ (x+4)^4=(x+34)\quad(2)\\ \sqrt{2x+23}=-x-4\end{cases}\\ \begin{cases}x+34=2x+23\\ x^2+8x+16=x+34\\ \sqrt{2x+23}=-x-4\end{cases}\quad 3)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-9\\ x\in\varnothing\\ x\in\varnothing\end{array}\right.\Leftrightarrow x=-9$$

Чистовик №7 (3 во II ч)

1) $\begin{cases} \sqrt{x+34} = 2x+23 \\ x^2+8x+16 = x+34 \\ 2x+23 = -x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+34} = 2x+23 \\ x^2+7x-18=0 \\ 3x=-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+34} = 2x+23 \; (\mathrm{I}) \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-9 \end{array}\right. \\ x=-9 \end{cases}$

при $x=-9$, (I) примет вид: $\sqrt{-9+34} = -18+23$

$\sqrt{25} = 5$ — верно $\Rightarrow$ $x=-9$ — ~~первый~~ возможный корень ур-ния.

(если подойдет под ОДЗ)

(2) $\begin{cases} \sqrt{x+34} = 2x+23 \\ (x+4)^4 = (x+34) \\ \sqrt{2x+23} = -x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+34} = 2x+23. \\ (x+4)^4 = (x+34). \\ 2x+23 = x^2+8x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+34} = 2x+23 \\ (x+4)^4 = x+34 \\ x^2+6x-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+34} = 2x+23 \\ (x+4)^4 = x+34 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-7 \end{array}\right. \end{cases}$

при $x=1$, сист примет вид: $\begin{cases} \sqrt{35} = 2+23 \\ (5)^4 = 35 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-7 \end{array}\right. \end{cases}$ — неверно $\Rightarrow x=1$ — не корень.

при $x=-7$, сист примет вид: $\begin{cases} \sqrt{27} = -14+23 \\ (-3)^4 = -7+34 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-7. \end{array}\right. \end{cases}$ — неверно

$x=-7$ — не корень.

(3) $\begin{cases} x+34 = 2x+23 \\ x^2+8x+16 = x+34. \\ \sqrt{2x+23} = -x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} +x = +11. \\ x^2+7x-18=0. \\ \sqrt{2x+23} = -x-4 \end{cases}$ при $x=11$ сист примет вид:

$\begin{cases} x=1 \\ 121+77-18=0 \\ \sqrt{45} = -15 \end{cases}$ — неверно $\Rightarrow x=11$ не явл-ся корнем ур-ия

(*) — в начало задания: ОДЗ:
1) $\sqrt{x+34} \neq 1 \Rightarrow x \neq -33$
2) $x+34>0 \Rightarrow x>-34.$
3) $2x+23>0 \Rightarrow x>-11,5.$
4) $(x+4)^2 \neq 1 \Rightarrow x\neq-3;\ x\neq-5.$
5) $x+34>0 \Rightarrow x>-34.$
6) $\sqrt{2x+23} \neq 1 \Rightarrow x \neq -11$
7) $2x+23>0 \Rightarrow x>-11,5.$
8) $-x-4>0 \Rightarrow x<-4.$

$x=-9 \in$ ОДЗ, значит $x=-9$ — корень

Ответ: $x=-9$

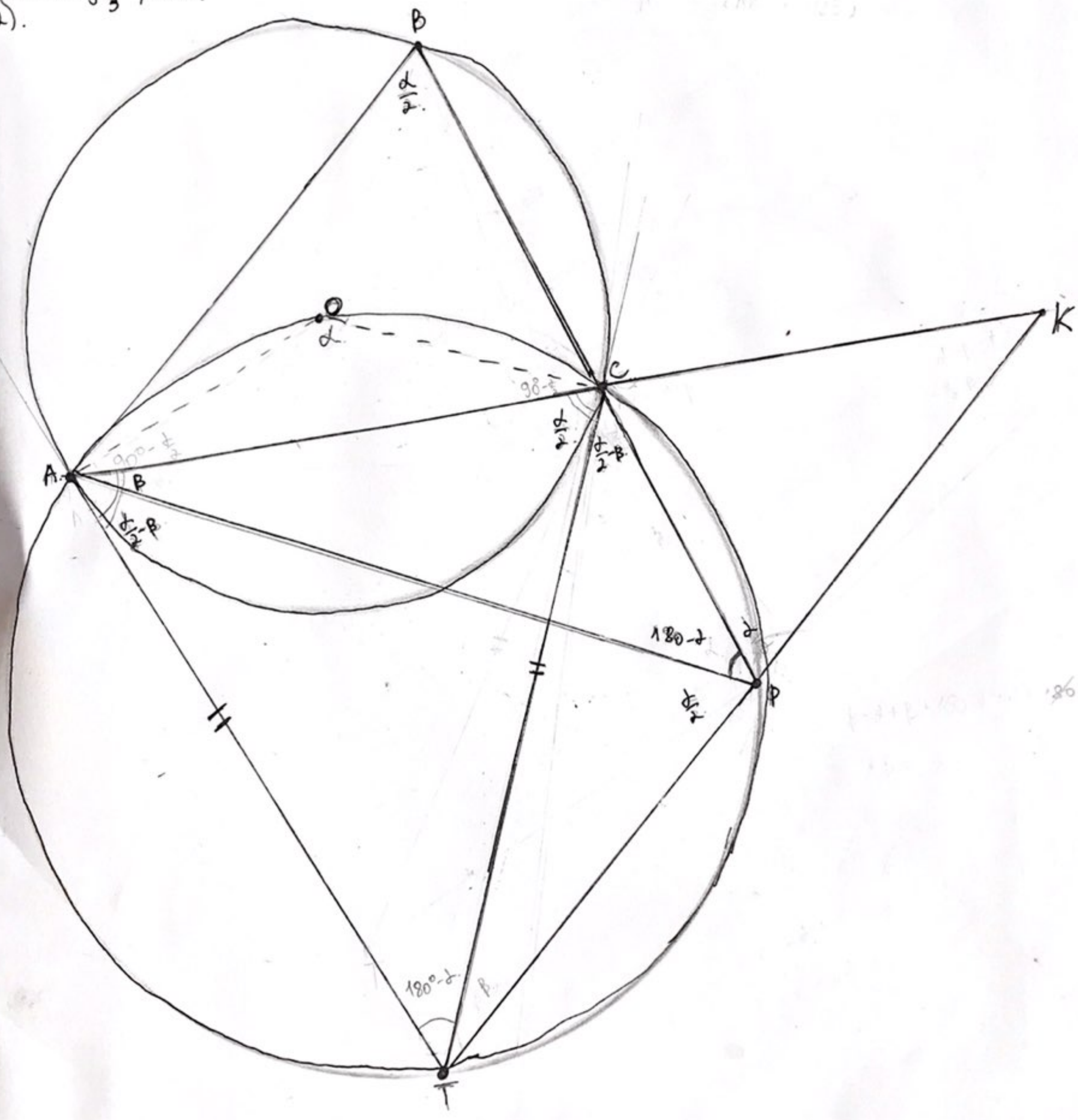
№6.

Чистовик № 8 (4 во II ч)

$\triangle ABC$ остроуг-ви вокр ω (ц. O).
Окр$_2$ O_1 около AOC.
Окр$_2 \cap BC = P$.
AT; TC – кас-ные к окр ω
$TP \cap BC = K$.
$S_{\triangle APK} = 15$
$S_{\triangle CPK} = 13$.
1) $S_{ABC} = ?$

2) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$; $AC = ?$

Пусть O_1 – центр окр$_2$.



Чистовик №9 (5 во II ч)

Решение:

1. Пусть $\angle AOC = \alpha$. . Из $4^х$ уг-ника $AOCT$: $\angle T = \cancel{360}\ 360^\circ - 2\cdot 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$.
∠A и ∠C прямые, т.к. от центра к касательным
Противоположные углы в сумме дают $180^\circ \Rightarrow AOCP$ вписан в окр-ть, а т.к. около $\triangle AOC$ уже проведена окр 2 $\Rightarrow AOCP$ вписан в окр 2. $\Rightarrow$ точки $AOCPT$ лежат на одной окр-ти.

2: $\triangle ACT$ − р/б ($AT = TC$ как касательные) $\Rightarrow \angle CAT = \angle TCA = \dfrac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$. Пусть $\angle CAP = \beta$, тогда $\angle PAT = \dfrac{\alpha}{2} - \beta = \angle PCT$, т.к. опир на дугу PT.

3° Из $4^х$ уг $AOCP$, впис в окр-ть: $\angle APC = 180^\circ - \angle AOC = 180^\circ - \alpha$.

4° $\angle CTP = \angle CAP = \beta$ (опир на $\smile CP$).

5° $\angle CPK = 180^\circ - \angle APC - \angle TPA = 180^\circ - \left(180^\circ - \alpha + \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\alpha}{2}$.

$\angle KCP = \angle BCA$ как вертикальные $\Rightarrow$ $\underline{\triangle BCA \sim \triangle PCK}$ по двум углам ($\angle KCP = \angle BCA$; $\angle CPK = \dfrac{\alpha}{2} = \angle ABC$, т.к. $\angle ABC = \dfrac{1}{2}\angle AOC = \dfrac{1}{2}\alpha$ (по св-ву)) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = \angle CPK \Rightarrow$ при секущей BP, $PK \parallel AB \Rightarrow AB \parallel TP$.

$S_{APC} = S_{APK} - S_{CPK} = 2$

~~6° $\triangle TCP = \triangle ACP$ ($\angle CAP = \angle CTP$ (опир на CP)) $\Rightarrow \sin\angle CAP = \sin\angle CTP \Rightarrow$ по т-ме синусов, т.к. они вписаны в одну окр-ть с радиусом, противолежащая сторона к равным углам общая − CP $\Rightarrow$ они равны.~~

$\triangle ABC = \triangle CPK \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 13$.

Ответ: а) 13.

4 x^2+7x … $+23$ … черн.

$a=22x$ $\quad x,y,z\in\mathbb{N}$, x,y,z – взаимно простые
$b=22y$
$c=22z.$

$22^3xyz=2^{16}\cdot 11^{19}$

$xyz=2^{13}\cdot 11^{16}.$

6 вар.

№ 5.

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$

$\log_{(x+4)^2}(x+34)$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$$\frac{\ln(2x+23)\cdot\ln(x+34)\ln(-x-4)}{\ln(\sqrt{x+34})\cdot\ln(x+4)^2\cdot\ln(\sqrt{2x+23})}=a^2(a+1).$$

$2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=a^2(a+1)$

$2=a^2(a+1)$

$a^3+a^2-2=0$

$a^3-a^2+2a^2-2a+2a-2=0.$

$(a-1)(a^2+2a+2)$

$(a-1)((a+1)^2+1)=0$

$a=1.$

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}\sqrt{x+34}=2x+23\\(x+4)^2=x+34\\(\sqrt{2x+23})^2=(-x-4)\end{cases}\\&\begin{cases}\sqrt{x+34}=2x+23.\\(x+4)^4=(x+34)^2\\\sqrt{2x+23}=x+4\end{cases}\\&\begin{cases}x+34=2x+23\\(x+4)^2=x+34\\2x+23=-x-4.\end{cases}\end{aligned}\right.\iff\left[\begin{aligned}&\begin{cases}\\2x+23=x+4.\end{cases}\end{aligned}\right.$$

$2x+23=-x-4$
$x=-9.$

$3x=-27.$
$x=-9$

$2x+23=x^2+8x+16.$
$x^2+6x-7=0.$
$x=1$ или $x=-7.$

Черт.

№6.

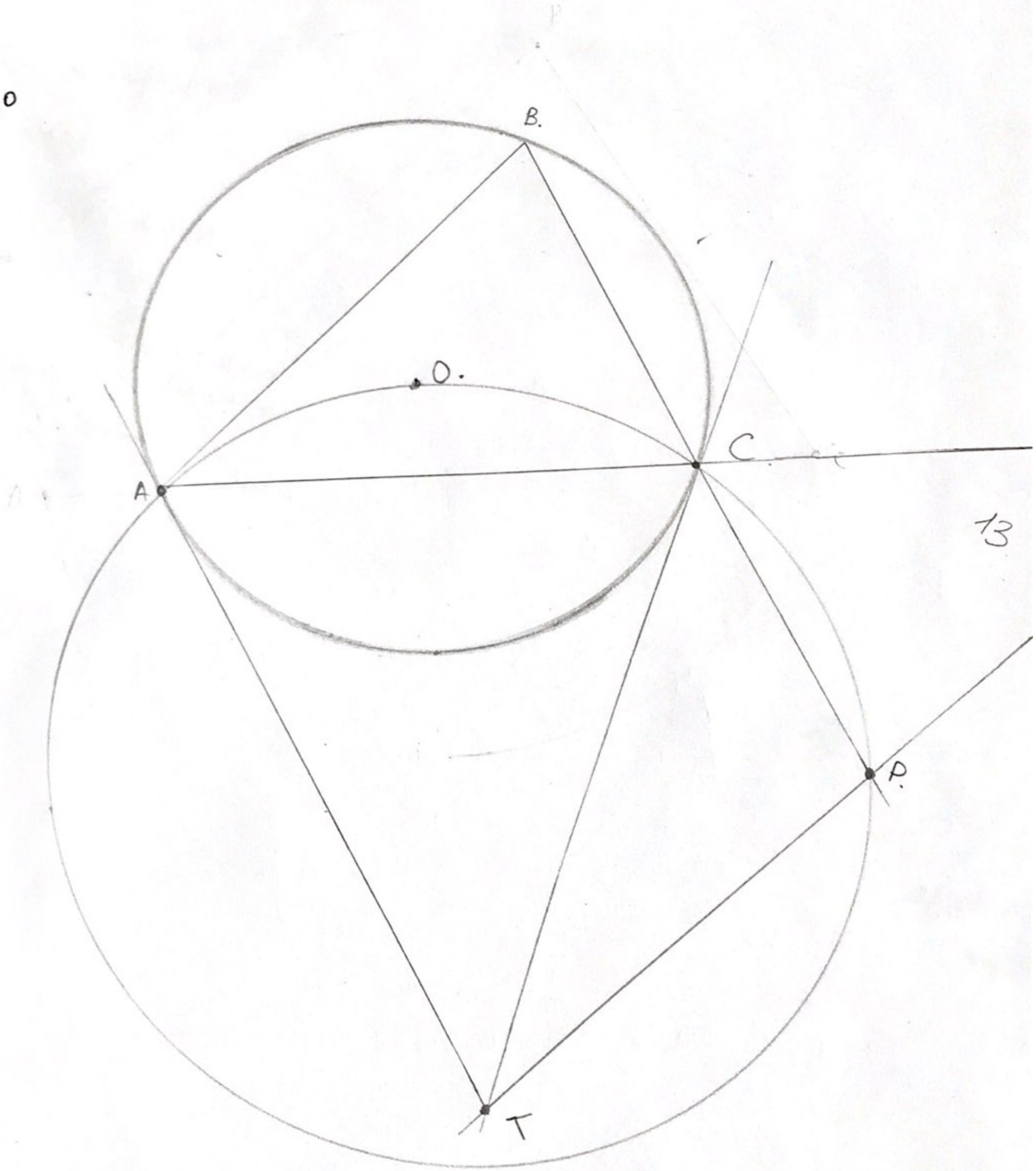
ΔABC - остроуг.

впис в окр ω с ц O

Окр α

$A; O; C \in$ окр α.

окр $\alpha \cap BC = P$.



черн.

(1) $\begin{cases} \sqrt{x+34} = 2x+23 \\ x^2+8x+16 = x+34 \\ \sqrt{2x+23} = -x-4 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{x+34} = 2x+23 \\ x^2+7x-18=0. \\ 2x+23 = x^2+8x+16 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{x+34} = 2x+23 \\ \left[\begin{array}{l} x=-9 \\ x=2 \end{array}\right. \\ x^2+6x-7=0 \end{cases} \iff$

$D_1 = 49+72 = 11^2$

$x_{1,2} = \frac{-7\pm 11}{2} = \{-9; 2\}$

$\iff \begin{cases} \sqrt{x+34} = 2x+23 \\ \left[\begin{array}{l} x=-9 \\ x=2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=1. \end{array}\right. \end{cases} \iff x \in \emptyset.$

(2) $\begin{cases} \sqrt{x+34} = 2x+23 \\ (x+4)^4 = (x+34) \\ \sqrt{2x+23} = -x-4 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{x+34} = 2x+23 \\ (x+4)^4 = (x+34. \\ 2x+23= \end{cases}$