Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101318**

ID профиля: **826865**

Вариант 23

Чистовик

№1.

$$S = \frac{2a_1+5d}{2}\cdot 6 = 6a_1+15d$$

$$a_{10}a_{16} = (a_1+9d)(a_1+15d) = a_1^2+24a_1d+135d^2 > 6a_1+15d+39$$

$$a_{11}a_{15} = (a_1+10d)(a_1+14d) = a_1^2+24a_1d+140d^2 < 6a_1+15d+55$$

$\Downarrow$

$5d^2 < 16$

$\Downarrow$

т.к. $d \in \mathbb{Z}$ и $d>0$ (по условию), то $d=1$;

$$\begin{cases} a_1^2+18a_1+81>0 \\ a_1^2+18a_1+70<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a_1 \neq -9 \\ a_1 \in (-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11}) \end{matrix} \Rightarrow$$

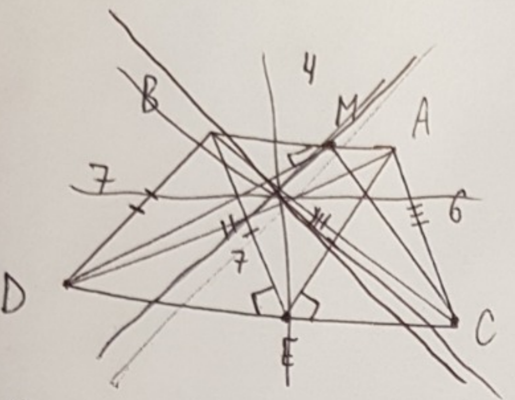
Ответ: $a_1 \in \{-12; -11; -10; -8; -7; -6\}$

1

21101318 (U826865 M1302460)

№2

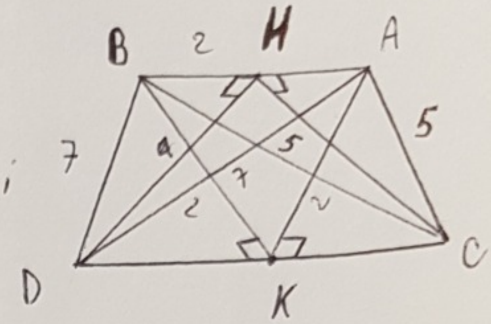
Чистовик



$AB = 4$

$AC = CD = 6;$

$AD = DB = 7;$



~~M – середина AB. Тогда $CM \perp AB$, $DM \perp AB \Rightarrow CD \perp AB$. $(ABE) \perp CD$, $E \in CD$; Тогда радиус описанной окружности $\triangle ABE$ равен радиусу цилиндра. Как известно, при фикс. основании радиус описанной окружности равнобедренного $\triangle$-ка минимален, если он равносторонний~~

т.к. треугольники равнобедренные, то $DH \perp AB$ и $CH \perp AB$, где H – середина AB $\Rightarrow CD \perp AB$. Пусть $K \in CD$ и $(ABK) \perp CD$. Тогда, очевидно, радиус цилиндра равен радиусу описанной окружности $\triangle ABK$. Как известно, при данной длине основания минимальный радиус описанной окружности равнобедренного $\triangle$-ка, если он равносторонний $\Rightarrow AK = BK = AB = 2$. При этом есть 2 случая:

1) K попала на отрезок CD, тогда

$CD = CK + KD = \sqrt{25-4} + \sqrt{49-4} = \underline{\underline{\sqrt{21} + 3\sqrt{5}}}$

2) $K \notin CD$, тогда $CD = KD - KC = \underline{\underline{3\sqrt{5} - \sqrt{21}}}$

2

Ответ: $\sqrt{21} + 3\sqrt{5}$; $3\sqrt{5} - \sqrt{21}$;

21101318 (U826865 M1302460)

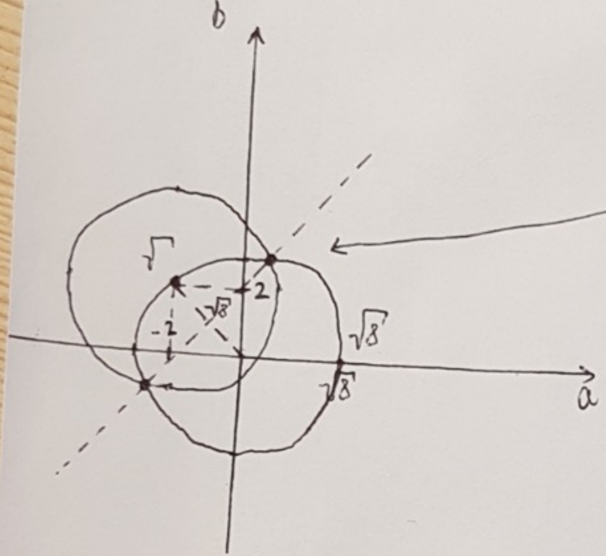
Чистовик

№3.

3

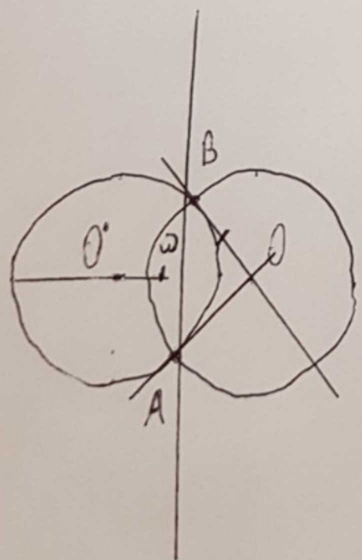
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le \min(-4a+4b,\ 8)\end{cases}$$

$a^2+b^2\le -4a+4b \Rightarrow (a+2)^2+(b-2)^2\le 8;$



Искомые a, b лежат в области пересечения двух кругов радиуса $\sqrt{8}$, обозначим её ~~к~~. ω

Заметим, что первое условие говорит о том, что в M все такие точки (x,y) которые лежат на расстоянии не более $\sqrt{8}$ от множества ~~к~~ ω



Чистовик

Очевидно M симметрична отношению прямой l. Тогда посчитаем пл-дь в левой половине. Точки, лежащие на расстоянии $\sqrt{8}$ от дуги AB в левой полуплоскости отн. l есть объединение кругов радиуса $\sqrt{8}$ по всем точкам дуги AB в левой полуплоскости. Легко увидеть, что это множество ограничено дугой a' с центром в точке O и радиусом $2\sqrt{8}$ и двумя дугами 1 и 2 с центрами в точках A и B радиуса $\sqrt{8}$; т.к. $\triangle O'AO$ - равносторонний, то угол $O'OA = 60°$; $\Rightarrow \angle A'OB' = 2 0 \cdot 60 = 120°$. Тогда пл-дь сектора $A'OB' = \frac{1}{3} \cdot пи \cdot (2\sqrt{8})^2 = \frac{32}{3} \cdot пи$; ~~так~~ $\angle B'BB'' = \angle A'AA'' = 30° \Rightarrow$ пл-дь - суммарное двух секторов $B'BB''$ и AAA'' равна $2 \cdot пи \cdot \frac{1}{12} \cdot (\sqrt{8})^2 = \frac{4}{3}$ пи. Но считая сектор $A'OB'$ мы ещё посчитали $\triangle AOB$.

4

Черновик

$(a_1+9b)(a_1+15b) > 6a_1+15b+39$

$a_{10} \cdot a_{16} = a_1 \cdot b^9 \cdot a_1 \cdot b^{15} = a_1^2 \cdot b^{24} > S+39;$

$a_{11} = a_{10}+b;$

$a_{16} = a_{15}+b;$

$a_{10} \cdot a_{16} = S+39;$

$(a_{10}+b)(a_{16}-b)$

$a_1 \cdot b^{10} \cdot a_1 \cdot 1,$ a

$a_{10} = a_1+9b;$ $a_{16} = a_1+15b;$

$6a_1 + b + 2b + 3b + 4b + 5b = S$

$a_{10}a_{16} + a_{16}b +$

$+ - b^2 < S+355;$

$(a_1+9b)(a_1+15b) > S+39$

$\frac{a_1+a_1+5b}{2} \cdot 6 = 3(2a_1+5b) = 6a_1+15b;$

$a_{11}a_{15} < S+55;$

$a_1 +$ $a_i = a_1$

$a_{16}b - b^2 < 16;$

$- a_{10}b$

$(a_1+9b)(a_1+15b) > 6a_1+15b+39$

$a_n = a_1 + b(n-1)$

$S = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n;$

$a_{1-5} = a$

$- \cancel{a_{11}-b}$

$\cancel{a_{11}}$

$a_{10} \cdot a_{16} > S+39;$

$a_{11} \cdot a_{15} < S+55;$

$a_{10} \cdot a_{16} > S+39$

$\cancel{(a_{10}+b)(a_{15}}$

CDII

$\times 18$
18
144
$+ 18$
324

$-9-\sqrt{11};\ -9+\sqrt{11}$

$-18;\ 81$

$364 - 280 = 84$

$b^2 < 4;$

$b < \cancel{4}$

$-4b^2$ $|b| < 2$

$4b^2 < 16;$

$b \in (-2;2)$

$(a_{10}+b)(a_{16}-b) = a_{10}a_{16} + a_{16}b - a_{10}b -$

b^2 $a_{16}b - a_{10}b - b^2 < 16;$

$b(a_{16}-a_{10}) = \cancel{b(a}$

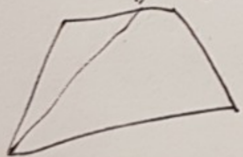
$5b^2 - b^2 < 16;$

$b^2 - 5b^2 + 16 < 0;$

$5;\ 16;$

$a+$

$D = 364 - 4 \cdot 1 \cdot 70 =$



$324 - 280 = 44$ 18 $2\sqrt{11}$

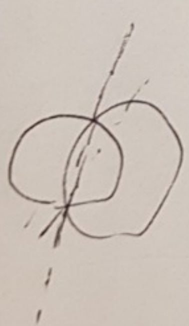
$1;\ 2$

$\cancel{-9}$

$-9-\sqrt{11}$

$-9+\sqrt{11}$

$(a_1+9)(a_1+15) > a_1+$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101318**

ID профиля: **826865**

Вариант 23

Чистовик

№4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 22 \\ НОК(a;b;c) = 2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

т.к. НОК делится лишь на 2 и 11, то числа имеют вид

~~$a = 2^{\alpha_1} \cdot 11^{\beta_1}$ $b =$~~ $a = 2^{\alpha_1}\cdot 11^{\beta_1}$; $b = 2^{\alpha_2}\cdot 11^{\beta_2}$; $c = 2^{\alpha_3}\cdot 11^{\beta_3}$

при этом $\min_i \alpha_i = 1$, $\max_i \alpha_i = 16$. $\max_i \beta_i = 19$; $\min_i \beta_i = 1$; Посчитаем сколько способов у нас „распределить" α по a, b, c. Две из них 1 и 16. Пусть третье не 1 и не 18. Следовательно, вариантов ~~$A_3^2 \cdot 14 = 84$~~ $A_3^2 \cdot 14 = 84$. Если же есть два нуля, то ~~есть вариант~~ варианта три, если 2 16, то их так же три, следовательно всего вариантов распределить степени ~~[illegible]~~ 2 будет $84+6=90$. Абсолютно аналогично вариантов распределить степени 11 будет

$17\cdot 6 + 6 = 108$

$\Downarrow$

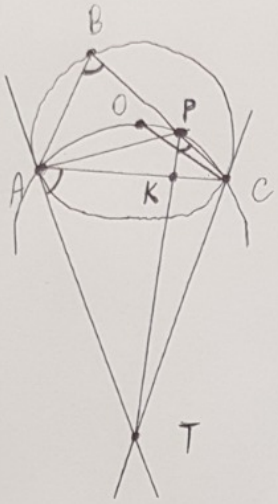
Всего троек ~~180~~ $108 \cdot 84 = 9072$

Ответ: 9072

1

Чистовик

№6.



Решение:

т.к. $OC \perp CT$, $OA \perp AT$, то

T лежит на окружности описанной вокруг $\triangle AOC$. Тогда $\angle TPC = \angle TAC = \angle ABC$ (посл. р-во, т.к. угол между касательной и хордой), значит $KT \parallel AB$, следовательно $\frac{CK}{AC} = \frac{S_{CKP}}{S_{APC}} = \frac{13}{13+15} = \frac{13}{28}$; =>

~~$S_{ABC} = \left(\frac{28}{13}\right)^2 \cdot S_{CKP} = \frac{28^2}{13} = \frac{784}{13}$~~

$S_{ABC} = \left(\frac{28}{13}\right)^2 \cdot S_{CKP} = \frac{28^2}{13} = \frac{784}{13}$

~~Ответ: $\frac{784}{13}$~~

Ответ: а) $\frac{784}{13}$

б)

2

Чистовик

~~[illegible]~~ №5. ③

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, $\log_{(x+4)^2}(x+34)$, $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

О.Д.З.:

$\begin{cases} x > -\frac{23}{2}; \\ x < -4 \end{cases}$

$2\log_a b = x$

$\frac{1}{2}\log_c a = y;$

$2\log_b c = z$

$x \cdot y \cdot z = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 2;$

Тогда если ~~t равн~~ t-равные числа, $t+1$ - 3е, то $t^2(t+1)=2$

$t^3+t^2-2=0;$

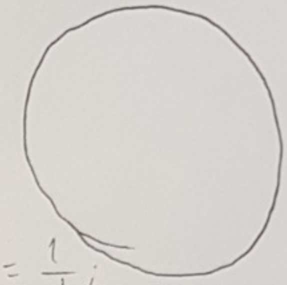
$(t-1)(t^2+2x+2)=0; \Rightarrow t=1$, т.к. $(t^2+2t+2)>0 \ \forall t;$

$\begin{cases} a=b^2 \Rightarrow x=9 \text{ - не подходит по ОДЗ;} \\ c=\sqrt[4]{a} \\ b=c^2 \end{cases}$

$2x+23$

Черновик

$\log_{\sqrt{x+34}} / \log$



$$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=\log_{(x+4)^2}(x+34)$$

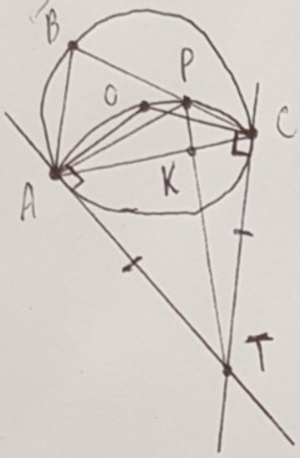
$$2\log_{x+34}(2x+23)=\frac{1}{2}\log_{x+4}(x+34)$$

$4t=\frac{1}{t};$

$4t^2=\frac{1}{4};$

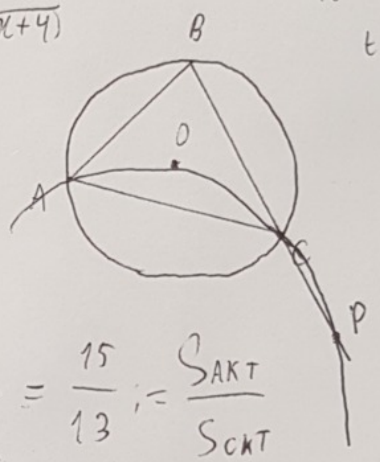
$t=\pm\frac{1}{2};$

$$4\log_{x+34}(2x+23)=\frac{1}{\log_{x+34}(x+4)}$$



$S_{APK}=15;$

$S_{CPK}=13;$



$$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}}=\frac{AK}{KC}=\frac{15}{13};=\frac{S_{AKT}}{S_{CKT}}$$

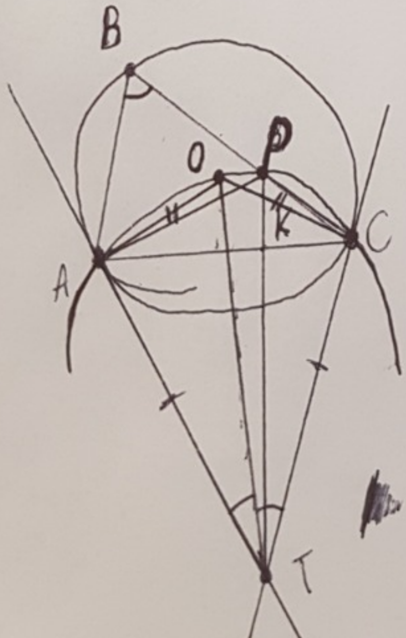
$S=\frac{abc}{4R};$

~~a·b·c~~

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$

$\log_{(x+4)^2}(x+34)$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$



$AT=CT$

$a=22\cdot x$

$b=22\cdot y$

$c=22\cdot z$

$2^{16}\cdot 11^{19}=a\cdot f=b\cdot g=c\cdot \varphi$

$$\begin{array}{r} \times\ 108 \\ 84 \\ \hline 432 \\ +\ 864\ \ \\ \hline 9072 \end{array}$$