Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101214**

ID профиля: **203031**

Вариант 23

часть1; вариант 23

Чистовик

№1

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_6 = \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = 3(2a_1 + 5d)$, где d - разность прогрессии

$$\begin{cases} a_{10}a_{16} = (a_1+9d)(a_1+15d) > 3(2a_1+5d)+39 \\ a_{11}a_{15} = (a_1+10d)(a_1+14d) < 3(2a_1+5d)+55 \end{cases}$$

$$(a_1+9d)(a_1+15d)+16 > (a_1+10d)(a_1+14d)$$

$$\cancel{a_1^2} + \cancel{24a_1d} + 135d^2 + 16 > \cancel{a_1^2} + \cancel{24a_1d} + 140d^2$$

$$5d^2 < 16$$

$$d^2 < 3{,}2$$

Т.к. ~~посл~~ прогрессия возрастающая, то $d > 0$

Т.к. прогрессия состоит из целых чисел, то d - целое

Тогда неравенству $d^2 < 3{,}2$ удовлетворяет только $d=1$.

Вернемся к системе.

$$\begin{cases} (a_1+9)(a_1+15) > 6a_1 + 15 + 39 \\ (a_1+10)(a_1+14) < 6a_1 + 15 + 55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \\ a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0 \end{cases}$$

$a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0$

$D = 324 - 280 = 44$

$a_{1,2} = \frac{-18 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -9 \pm \sqrt{11}$

$$\begin{cases} a_1 \neq -9 \\ -9-\sqrt{11} < a_1 < -9+\sqrt{11} \end{cases}$$

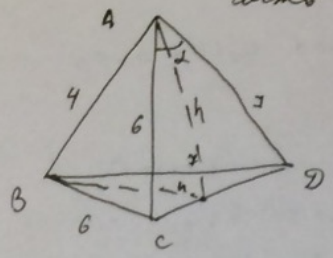
т.к. $3 < \sqrt{11} < 4$, то $-6 < -9 + \sqrt{11} < -5$, $-13 < -9 - \sqrt{11} < -12$

Тогда подходят все целые a_1 из промежутка $(-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11})$, кроме -9. Значит $a_1 \in \{-12; -11; -10; -8; -7; -6\}$

Ответ: $-12; -11; -10; -8; -7; -6$

1 лист

часть 1, вариант 23 Чистовик №2

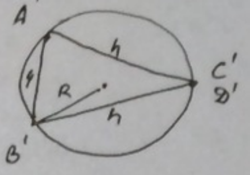


$\Delta ADC = \Delta CBD$

$CD = x$

$$\begin{cases} x^2 = 85 - 84\cos\alpha \\ 21\sin\alpha = \frac{1}{2} h x \end{cases}$$

Сечение цилиндра



$S_{A'B'C'} = \frac{h^2 \cdot 4}{4R} = \frac{h^2}{R}$

$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{h^2-2} = 2\sqrt{h^2-2}$

$\frac{h^2}{R} = 2\sqrt{h^2-2}$ $\qquad R = \frac{h^2}{2\sqrt{h^2-2}} \to \min$

$$\frac{2h \cdot 2\sqrt{h^2-2} - \frac{h^2}{\sqrt{h^2-2}}}{4(h^2-2)} = 0$$

$4\sqrt{h^2-2} = \frac{h}{\sqrt{h^2-2}}$

$4h^2 - h - 8 = 0$

$D = 1 + 128 = 129$

$h = \frac{1+\sqrt{129}}{8}$

3 лист

Минимальный радиус будет, когда $h = 4$

$$\begin{cases} x^2 = 85 - 84\cos\alpha \\ 21\sin\alpha = 2x \end{cases}$$

Отсюда находим $x = CD$.

Черновик

$S = \frac{a_1 + a_6}{2} 6 = 3(2a_1 + 5d)$

$a_{10} a_{16} = \begin{cases} (a_1 + 9d)(a_1 + 15d) > 3(2a_1 + 5d) + 39 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 3(2a_1 + 5d) + 55 \end{cases}$

$(a_1 + 9d)(a_1 + 15d) + 16 > (a_1 + 10d)(a_1 + 14d)$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{24a_1 d} + 135d^2 + 16 > \cancel{a_1^2} + \cancel{24a_1 d} + 140d^2$

$5d^2 < 16$

т.к. посл. из целых чисел, то d тоже целое, $d > 0$

$d^2 < 3,2$

$d = 1$:

$\begin{cases} (a_1 + 9)(a_1 + 15) > 3(2a_1 + 5) + 39; & a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \\ (a_1 + 10)(a_1 + 14) < 3(2a_1 + 5) + 55; & a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0 \end{cases}$

$D = 324$

$(a_1 + 9)^2 > 0$

$a_1 \neq -9$

$D = 324 - 280 = 44$

$a = \frac{-18 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -9 \pm \sqrt{11}$

$a = -13$:

$S = -63 \quad 87$

$3 < -63 + 55$

$a = \{-12; -11; -10; 10; 11; 12\}$ $\quad a = -9: 0 > \#$

$a_1 \quad a_1 + d \quad a_1 + 2d \quad a_1 + 3d \quad a_1 + 4d \quad a_1 + 5d$

$S = 6a_1 + 15d$

$a_{10} a_{16} = (a_1 + 9d)(a_1 + 15d) > 6a_1 + 15d + 39$

$a_{11} a_{15} = (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 6a_1 + 15d + 55$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{24a_1 d} + 135d^2 > \cancel{a_1^2} + \cancel{24a_1 d} + 140d^2 - 16$

$5d^2 < 16$

$d^2 < 3,2$

$d = 1$

$a = -12 \quad S = 3(-24 + 5) = 3 \cdot 19$

$-3 \cdot 3 = -9 > -57 + 39$

$-4 < -57 + 55$

$a = -6: \quad S = 3(-12 + 5) = -21$

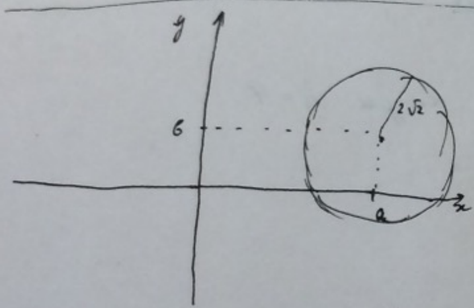
$3 \cdot 9 = 27 > 18$

$32 < 34$

$a = -5 \quad S = -15$

$40 > 24$

$45 < 40$



1) $\begin{cases} a^2 + b^2 \leq 8 \\ -4a + 4b \geq 8 \end{cases}$ $\quad b \geq 2 + a$

$a^2 + b^2 \leq -4a + 4b$

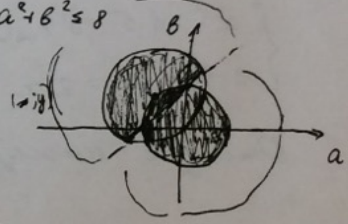
$(a + 2)^2 + (b - 2)^2 \leq 8$

$(a - x)^2 + (b - y)^2 \leq 8$

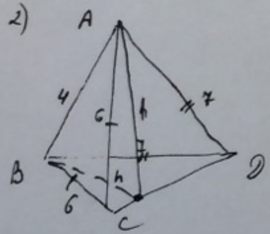
$\begin{cases} a^2 + b^2 \leq 8 \\ (a + 2)^2 + (b - 2)^2 \leq 8 \end{cases}$

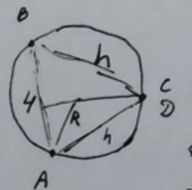
2) $\begin{cases} a^2 + b^2 \leq -4a + 4b \\ \cancel{a^2 + b^2} - 4a + 4b \leq 8 \end{cases}$ $\quad b \leq 2 + a$

$a^2 + b^2 \leq 8$



2)





$\frac{4h^2}{4R} = 2 \cdot \sqrt{h^2 - 2} \qquad h > 2$

$\cancel{h^2 = 2R}$

$R = \frac{h^2}{2\sqrt{h^2 - 2}}$

$R' = \frac{2h \cdot 2\sqrt{h^2 - 2} - h^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2 - 2}}}{4(h^2 - 2)}$

$\frac{1 + \sqrt{129}}{8} =$

$S = \frac{1}{2} h \cdot CD =$

$=$

$4h\sqrt{h^2 - 2} - h^2 / \sqrt{h^2 - 2} = 0$

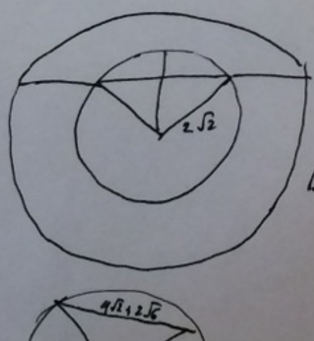
$4\sqrt{h^2 - 2} = \frac{h}{\sqrt{h^2 - 2}}$

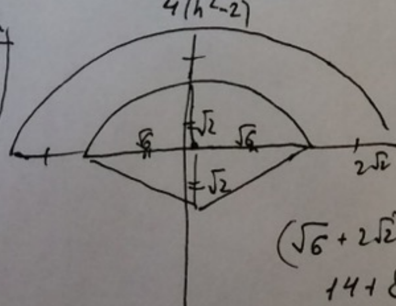
$4(h^2 - 2) = h$

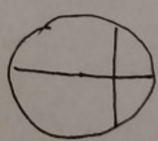
$4h^2 - h - 8 = 0$

$D = 1 + 128$

$h = \frac{1 + \sqrt{129}}{8}$



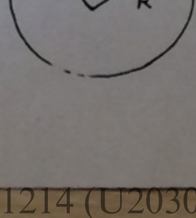




$(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})^2 = 3\sqrt{2} \cdot (2R - 3\sqrt{2})$

$14 + 8\sqrt{3} = 6\sqrt{2}R - 12$

$R = \frac{26 + 8\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}$



часть 1, вариант 23

Чистовик
№3

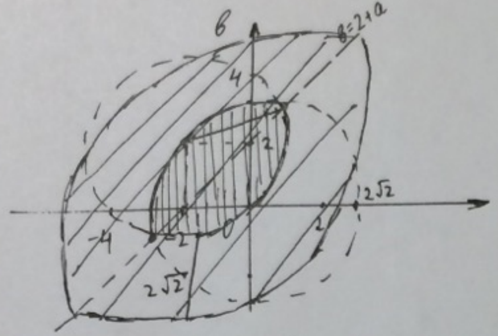
Изобразим нер-во $a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8)$ в системе координат aOb:

1) $\begin{cases} -4a+4b \le 8 \\ a^2+b^2 \le -4a+4b \end{cases}$

$\begin{cases} -4a+4b \le 8 \\ (a+2)^2+(b-2)^2 \le 8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -4a+4b > 8 \\ a^2+b^2 \le 8 \end{cases}$

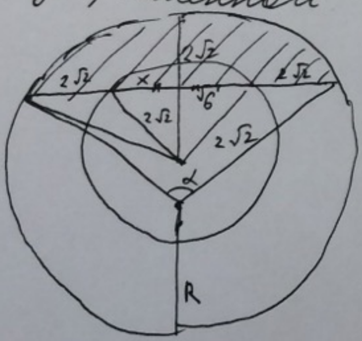
$\begin{cases} -4a+4b > 8 \\ a^2+b^2 \le 8 \end{cases}$



Посмотрим, какие пары $(x; y)$, удовлетворяющие нер-ву $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8$ пересекают закрашенную область.

$(a-x)^2+(b-y)^2 \le 8$ – в системе aOb это окр. с центром в $(x; y)$ и радиусом $2\sqrt{2}$

Тогда подходят такие т.$(x; y)$, расстояние от которых до закрашенной фигуры не более $2\sqrt{2}$.



$x^2 = \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}$

$x = \sqrt{6}$

$(2\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 = 3\sqrt{2} \cdot (2R - 3\sqrt{2})$

$14 + 8\sqrt{3} = 6\sqrt{2}R - 18$

$R = \frac{32+8\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = \frac{16+4\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$

$(4\sqrt{2}+2\sqrt{6})^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\alpha$; $\cos\alpha = 1 - \frac{(4\sqrt{2}+2\sqrt{6})^2}{2R^2}$

Зная угол α и радиус R можно найти площадь этой фигуры: $S = -\frac{1}{2}R^2\sin\alpha + \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$.

2 лист

Умножив на 2, получим ответ:

$2\left(\frac{\pi R^2 \alpha}{360} - \frac{1}{2}R^2\sin\alpha\right)$

Ответ: $2\left(\frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2}R^2\sin\alpha\right)$, где $R = \frac{16+4\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$, $\alpha = \arccos\left(1 - \frac{(4\sqrt{2}+2\sqrt{6})^2}{2R^2}\right)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101214**

ID профиля: **203031**

Вариант 23

часть 2, вариант 23 **Чистовик №5**

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, $\log_{(x+4)^2}(x+34)$, $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

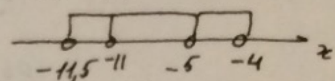
$a=\sqrt{x+34}$
$b=\sqrt{2x+23}$
$c=x+4$

$\log_a b^2$, $\log_{c^2} a^2$, $\log_b(-c)$

$a>0 \quad a\neq 1$
$c<0 \quad c\neq -1$
$b>0 \quad b\neq 1$

$2\log_a b$, $\log_{(-c)} a$, $\log_b(-c)$

ОДЗ: $\begin{cases} x>-34 \\ x>-11{,}5 \\ x+4<0 \\ x\neq -33 \\ x\neq -3 \\ x\neq -5 \\ x\neq -11 \end{cases}$



1) $2\log_a b = \log_{(-c)} a$

$2\log_a b = \frac{\log_b a}{\log_b(-c)}$

$\log_b(-c) = \frac{1}{2}\log_b^2 a$

$2\log_a b + 1 = \frac{1}{2}\log_b^2 a$

$2t+1 = \frac{1}{2t^2}$ $\quad | \; t=\log_a b$

$4t^3+2t^2-1=0$

$(2t-1)(2t^2+2t+1)=0$

$t=\frac{1}{2}=\log_a b$

$a=b^2$

$\sqrt{x+34}=2x+23$

$x+34=4x^2+92x+529$

$4x^2+91x+495=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-9 \\ x=\frac{-55}{4} \end{array}\right.$

$\underline{x=-9} \in$ ОДЗ

$x=\frac{-55}{4}<-11{,}5 \notin$ ОДЗ

3) $\log_{(-c)} a = \log_b(-c)$

$\log_{(-c)} a = \frac{\log_a(-c)}{\log_a b}$

$\log_a b = \log_a^2(-c)$

$2\log_a^2(-c)\cancel{AM} = \log_{(-c)} a + 1$ $\quad / \; t=\log_{(-c)} a$

$\frac{2}{t^2}=t+1$

$(t-1)(t^2+2t+2)=0$

$t=1 \quad -c=a$

$\sqrt{x+34}=-x-4$

$x+34=x^2+8x+16$

$x^2+7x-18=0$

$(x+9)(x-2)=0$

2) $2\log_a b = \log_b(-c)$

~~$2\log_a b = \frac{1}{\log}$~~

$2\,\frac{\log_{(-c)} b}{\log_{(-c)} a} = \frac{1}{\log_{(-c)} b}$

$\log_{(-c)} a = 2\log_{(-c)}^2 b$

$2\log_{(-c)}^2 b = \log_b(-c)+1$ $\quad | \; t=\log_b(-c)$

$\frac{2}{t^2}=t+1$

$t^3+t^2-2=0$

$(t-1)(t^2+2t+2)=0$

$t=1$

$b=-c$

$\sqrt{2x+23}=-x-4$

$2x+23=x^2+8x+16$

$x^2+6x-7=0$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-7 \end{array}\right.$

$\underline{x=-7} \in$ ОДЗ

$x=1>-4 \notin$ ОДЗ

1 лист

Черновик

$НОД(a, b, c) = 22 \quad a = 22x \quad b = 22y \quad c = 22z$

~~x y z взаимнопростые~~

$НОК(a, b, c) = 2^{16} \cdot 11^{19} = \frac{abc}{НОД}$

$НОД\ xyz = 1$

3 6 10

$НОК = 180 \frac{6}{3}$

$2^{16} \cdot 11^{19} = \frac{2^3 \cdot 11^3 xyz}{22}$

5 10 20

$xyz = 2^{14} \cdot 11^{17}$ ≠

$20 = \frac{\cancel{50 \cdot 20}\ 50 \cdot 20}{20\ \ 5\ \ 20}$

$3 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{1}$ $(3 \cdot 13) \cdot (3 \cdot 16) = 9 \cdot 13 \cdot 16$

$НОК(22x; 22y; 22z) = 2^{16} \cdot 11^{19}$

$НОК(x; y; z) = 2^{15} \cdot 11^{18}$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) \quad \log_{(x+4)^2}(x+34) \quad \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq -11 \\ x > -11{,}5 \\ x \neq -33 \\ x > -34 \\ x \neq -4 \\ x \neq -3 \\ x \neq -5 \end{cases}$

$x + 4 < 0$

$x < -4$

$-11{,}5 \quad -11 \quad -5 \quad -4$

$\log_a b^2 \quad \log_{c^2} a^2 \quad \log_b(-c)$

$2\log_a b^2 \quad \log_{c^2} a^2 \quad \log_b(-c)$

$\log_a b^2 = \log_{c^2} a^2$

$\log_2 4 \cdot \log_4 2 = 1$

$2\log_a b + \log_c a + \log_b(-c)$

$\cancel{2 \cdot 10}$ $\log_a b = \frac{1}{2}\log_{-c} a = 1$

$НОК(x; y; z) =$

$\frac{1}{\log_b a} = \frac{\log_b a}{2\log_b(-c)} \quad \log_b(-c) = \frac{2}{\ }$

3 4 12

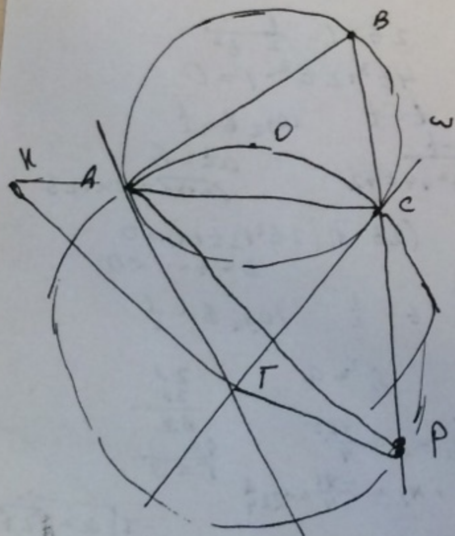
3 7 9

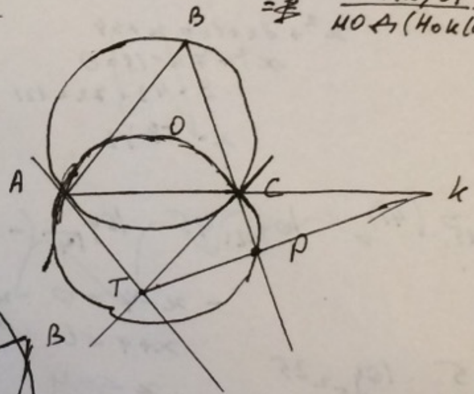
$НОК_3 =$

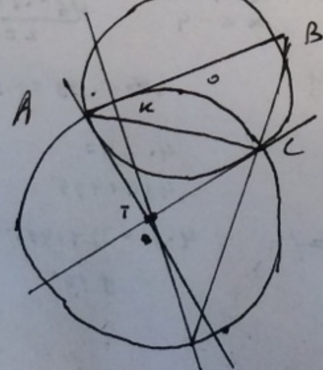
$НОК(a; b; c) = НОК(НОК(a, b); c)$

$= \frac{НОК(a; b) \cdot c}{НОД(НОК(a, b); c)}$

$\begin{cases} \log_a b = 1 \quad a = b \\ \log_{-c} a = 2 \quad (-c)^2 = a \end{cases}$







$НОД(x; y; z) = 1$

$НОК(x; y; z) = 2^{15} \cdot 11^{18}$

$НОК(x; y; z) = \frac{\frac{xy}{НОД(x; y)} z}{НОД\left(\frac{xy}{НОД(x; y)}; z\right)}$

$НОД(x; y; z) = 1$

$НОК(x; y; z) = \frac{xyz}{(НОД(x; y) \cdot НОД\left(\frac{xy}{НОД(x; y)}; z\right)} = 2^{15} \cdot 11^{18} \quad x = 2^{n_1} \cdot 11^{k_1} \quad y = 2^{n_2} \cdot 11^{k_2} \quad z =$

$\frac{2^{n_1+n_2+n_3} \cdot 11^{k_1+k_2+k_3}}{2^{n_1} \cdot 11^{n_1} \cdot НОД(2^{n_2}}$

$НОД = 1$

$НОК(x; y; z) = 2^{15} \cdot 11^{18}$

$2^{n_1} \cdot 11^{k_1} \quad 2^{n_2} \cdot 11^{k_2} \cdot 2^{n_3} \cdot 11^{k_3}$

$\min(n_1, n_2, n_3) = 15$

$c^2 = a$

$2\log_a b = \log_b(-c)$

$2\frac{\log_{-c} b}{\log_{-c} a} = \frac{1}{\log_{(-c)} b} \quad \frac{2}{\log_{-c} a} = 1$

$2\log^2_{-c} b = \log_{-c} a =$

$2t^2 = \frac{1}{t} + 1$

$2t^3 - t - 1 = 0 \quad = \log_b -c + 1$

часть 2, вариант 23. №5 продолжение

$$\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -9 \end{array}\right.$$

$x = 2 > -4 \notin ОДЗ$

$\underline{x = -9} \in ОДЗ$

При $x = -9$: $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = 1$

$\log_{(x+4)^2}(x+34) = 1$

$\log_{\sqrt{5}}(5) = 2$

При $x = -7$ $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{\sqrt{27}} 9$

$\log_{(x+4)^2}(x+34) = \log_9 27 = \frac{3}{2}$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = \log_{\sqrt{9}}(3) = 1$ — не подходит

Ответ: -9

2 мест

$\log_a b^2,\ \log_{c^2} a^2,\ \log_b(-c)$ Черновик

$2\log_a b \quad \log_{(-c)} a \quad \log_b(-c)$

1) $2\log_a b = \log_{(-c)} a$

$\frac{2}{\log_b a} = \frac{\log_b a}{\log_b(-c)}$ $\quad \log_b(-c) = \frac{\log_b^2 a}{2} = 2\log_a b + 1$

$\log_b^2 a = 4\log_a b + 2$

$t^2 - 4t - 2 = 0$

$D = 20$

$\log_b a = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5} = 2+\sqrt{5}$

2) $2\log_a b = \log_b(-c)$

$\log_{(-c)} b = \frac{1}{2\log_a b}$

$\frac{2\log_{(-c)} b}{\log_{(-c)} a} = \log_b(-c)$

$\log_{(-c)} a = \frac{2\log_{(-c)} b}{\log_b(-c)} = 2\log^2_{(-c)} b$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) \quad \log_{(x+4)^2}(x+34) \quad \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$a = \sqrt{x+34}$
$b = \sqrt{2x+23}$
$c = x+4$

$\log_a b^2 \quad \log_{c^2} a^2 \quad \log_b(-c)$

$2\log_a b \quad \log_{(-c)} a \quad \log_b(-c)$

1) $2\log_a b = \log_{(-c)} a$

$= \frac{\log_b a}{\log_b(-c)} = \frac{\log_b a}{2\log_a b + 1}$

$2\log_a^2 b \quad \log_b(-c) = \frac{1}{2}\log_b^2 a = \log_b a$

$-c = a$

$-x-4 = \sqrt{x+34}$

$x^2 + 8x + 16 = x + 34$

$x^2 + 7x - 18 = 0$

$D = 49 + 72 = 121$

$x = -9;\ 2$

$2\log_a b = \log_{(-c)} a$

$2\log_a b = \frac{\log_b a}{\log_b(-c)}$

$\log_b(-c) = \frac{\log_b a}{2\log_a b} = \frac{1}{2}\log_b^2 a$

$2\log_a b + 1 = \frac{1}{2}\log_b^2 a$

$\log_a b = t \quad 2t + 1 = \frac{1}{2t^2}$

$4t^3 + 2t^2 - 1 = 0$

$t = \frac{1}{2} \quad \log_a b = \frac{1}{2}$

$\log_{\sqrt{45}}(41) \quad \log_{121} 45 \quad \log_{\sqrt{41}}(-$

$-x-4>0 \quad -x>4$

$x+4<0 \quad x<-4$

$x<-4$

$4t^3+2t^2-1 \,|\, t-\frac{1}{2}$

$4t^3-2t^2 \quad 4t^2+4t+2$

$4t^2-1$

$4t^2-2t$

$2t-1$

$a^t = b$

$\sqrt{x+34} = 2x+23$

$(2t-1)(2t^2+2t+1)=0$

$D = 4 - \cdot < 0$

$t = \frac{1}{2} \quad \log_a b = \frac{1}{2}$

$\log_5 5 = 1 \quad \log_{5^2} 25 = 1$

$.495 = 5 \cdot 99 = 5 \cdot 11 \cdot 9$

$b^2 = a$

$\log_{\sqrt{27}} 9 \quad \log_{\sqrt{5}}(5) = 2$

$3^{\frac{3}{2}} \quad 3^2$

$\frac{4}{3}$

$\log_9 27 = \frac{3}{2} \quad \log_3 3 = 1$

$4 \cdot 121 =$

$484 + 495$

$4 \cdot 81 = 324 + 495$

819

$x_1 x_2 = \frac{495}{4}$

$x_1 + x_2 = \frac{-91}{4} = -22\frac{3}{4}$

$23 \cdot 23 = 69,\ 46,\ 529$

$4x^2+91x+495 \,|\, x+9$

$4x^2+36x \quad 4x+55$

$55x+495$

$-7 \quad a = \sqrt{27},\ b = 3,\ c = -3$

$\log_3\sqrt{27} = 2\log_3 3$

$2\log_{\sqrt{27}}\sqrt{9} = \log_{\sqrt{9}} 3 = 1$

$x^2+6x-7=0$

$x=1$

$x=-7$

$(x+9)(4x+11)$

$2\log_a b = \log_b(-c)$

$t^3+t^2-2 \,|\, t-1$

$t^3-t^2 \quad t^2+2t+2$

$2t^2-2$

$2t^2-2t$

$2t-2$

$\frac{2\log_{(-c)} b}{\log_{(-c)} a} = \frac{1}{\log_{(-c)} b}$

$\log_{(-c)} a = 2\log^2_{(-c)} b = \log_b(-c) + 1$

$2t^2 = \frac{1}{t} + 1$

$2t^3 - t - 1 = 0$

$t = 1$

$-x+4 = \sqrt{2x+23}$

$2x+23 = x^2+8x+16$

$-c = b$

$\frac{2}{t^2} = t+1 \quad t^3+t^2-2=0$

21101214 (U203031 M1295588)