Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101199**

ID профиля: **306541**

Вариант 23

№1.

Чистовик №1

$S_6 = 6a_1 + 15d$, где a_1 – первый член
d – разность (ар. пр-ии)

$$\begin{cases}(a_1+9d)(a_1+15d) > S+39 \ (1)\\ (a_1+10d)(a_1+14d) < S+55\end{cases}$$

$(a_1+10d)(a_1+14d) < S+55 \Rightarrow (a_1+9d+d)(a_1+15d-d) < S+55 \Rightarrow$

$(a_1+9d)(a_1+15d) + d(a_1+15d) - d(a_1+9d) - d^2 < S+55 \ (2)$

Также работает и с (1) $\Rightarrow$

$(a_1+9d)(a_1+15d) + d(a_1+15d) - d(a_1+9d) - d^2 > S+39 + d(a_1+15d) - d(a_1+9d) - d^2 \ (3)$

(2) и (3) $\Rightarrow$

$\cancel{S}+39 + d(a_1+15d) - d(a_1+9d) - d^2 < \cancel{S}+55$

$d(a_1+15d) - d(a_1+9d) - d^2 < 11$

$5d^2 < 16$

$d^2 < \frac{16}{5} \Rightarrow d \in \left(-\frac{4}{\sqrt5}; \frac{4}{\sqrt5}\right) \Rightarrow$ целых зн-я только 2 $(-1; 1) \Rightarrow$ т.к. наша прогрессия воз-т $\Rightarrow d = 1$

Подставим в ~~[illegible]~~ нер-ва

$$\begin{cases}(a_1+9)(a_1+15) > 6a_1+15+39\\ (a_1+10)(a_1+14) < 6a_1+15+55\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+24a_1+135 > 6a_1+54\\ a_1^2+24a_1+140 < 6a_1+70\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_1^2+24a_1-6a_1+135-54 > 0\\ a_1^2+24a_1-6a_1+140-70 < 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+18a_1+81 > 0 \ (4)\\ a_1^2+18a_1+70 < 0 \ (5)\end{cases}$$

(4): $D = 324 - 4\cdot 81 = 0 \Rightarrow x = \frac{-18}{2} = -9$
неравенство выполняется при всех $x \in (-\infty; -9) \cup (-9; +\infty)$

(5) $D = 324 - 4\cdot 70 = (2\sqrt{11})^2 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{-18 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -9 \pm \sqrt{11} \Rightarrow$

$-9-\sqrt{11} \geq -12$
$-9+\sqrt{11} \geq -6$
$-9+\sqrt{11} < -5$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases}x \in (-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11})\\ x \neq -9\end{cases}$$

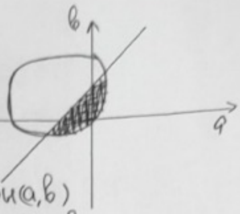
Ответ: $a_1 \in [-12; -9) \cup (-9; -6]$

Чистовик №1

Чистовик №2

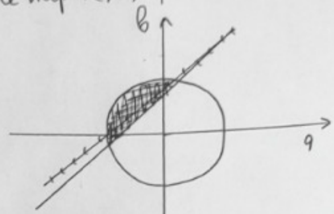
№3.

$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 8 \text{ (1)} & \text{- график окр-ти}\\ a^2+b^2\leq \min(-4a+4b,8)\end{cases}$

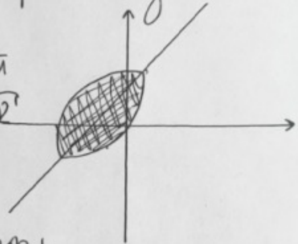


1) При $-a+b\leq 8 \Rightarrow a^2+4a+b^2-4b\leq 0 \Rightarrow$ Это будет окружность, но пересекаемая прямые $-a+b\leq 2 \Rightarrow$ заштриховал возможные пары (a,b)

2) При $-a+b>2 \Rightarrow \begin{cases}a^2+b^2\leq 8\\ b>2-a\end{cases}$



То есть закрашенная территория - возможные центры окружности в нер-ве (1)

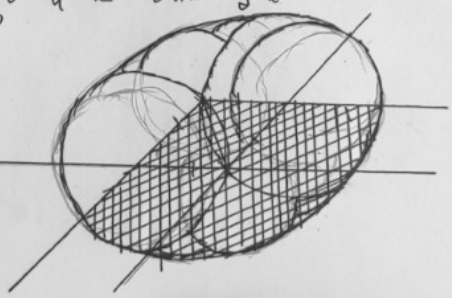


На графике я изобразил возможные центры окр-ти, каждый из которых задаёт свой радиус $=2\sqrt{2}$ поэтому итоговая фигура будет подобна овалу.

Площадь: 2 сектора по $\frac{1}{3}$ окружности с радиусом $2R$ - 2 равност-х Δ в центре + 2 сектора по $\frac{1}{6}$ окружности с радиусом $R \Rightarrow$

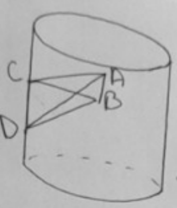
$S=\frac{2}{3}\pi(2R)^2+\frac{1}{3}\pi R^2+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot R^2=3\pi R^2-\frac{\sqrt{3}}{2}R^2=$

$=\underline{4(6\pi-\sqrt{3})}$; т.к. $R=2\sqrt{2}$



Ответ: $4(6\pi-\sqrt{3})$

№1.
№2

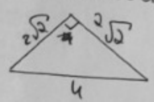


Чистовик

Минимальный радиус при $2R = AB$, т.к. диаметр это ~~максимальная~~ хорда в окружности $\Rightarrow$ ~~есть~~ а если AB - не ~~диаметр~~ диаметр (рисунок), то диаметр ещё больше $\Rightarrow$ не минимальный $\Rightarrow$

$R = \frac{AB}{2} = 2$

Тогда проекции ADB и ACB - прямоуг-е треугольники с высотой $\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2$



Высота в $ACB = \sqrt{36 - 2^2} = \sqrt{32}$
Высота в $ADB = \sqrt{49 - 2^2} = \sqrt{45}$ $\Big| \Rightarrow$

угол между основанием и $ACB \Rightarrow$

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{32}}$

между основанием и $ADB \Rightarrow$

$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{45}}$

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta \cos\alpha + \sin\beta \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{32}} \cdot \frac{2}{\sqrt{45}} + \frac{\sqrt{32 - 4}}{\sqrt{32}} \cdot$$
$$\cdot \frac{\sqrt{45 - 4}}{\sqrt{45}}$$

в $\triangle CHD$, где H - сер-на AB; по т-ме косинусов $\Rightarrow$

$$CD = \sqrt{CH^2 + DH^2 - 2HC \cdot HD \cdot \cos(\beta - \alpha)} = 32 + 45 - 2\sqrt{32} \cdot \sqrt{45} \cdot \frac{1}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{45}} \cdot$$
$$\cdot \left(4 + \sqrt{28} \cdot \sqrt{41}\right) = 77 - 8 - 2 \cdot \sqrt{28} \cdot \sqrt{41} = \underline{69 - 2\sqrt{28} \cdot \sqrt{41}}$$

№1.

чистовик

чистовик

радиус при $2R = AB$, хорда в

$a_{10} = a_1 + 9d$ $a_{11} = a_1 + 10d$ черновик

$a_{16} = a_1 + 15d$ $a_{15} = a_1 + 14d$

$S = \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n =$

$= 3(a_1 + a_6) = 3(a_1 + a_1 + 5d) = 6a_1 + 15d$

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ - арифм. пр. 9

$a_{10} a_{16} > S + 39$ все возр. е a_1

$a_{11} a_{15} < S + 55$ S - сумма 6 членов $a_1 \ldots a_6$

сост-х из целых чисел

$(a_1 + 9d)(a_1 + 15d)$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d)$

$a_1^2 + 24da_1 + 135d > 6a_1 + 15d + 39$

$a_1^2 + 24a_1 d - 15d - 6a_1 - 39 > 0$

$a_1^2 + a_1(24d - 6) - 15d - 39 > 0$

$a_1^2 + 24da_1 + 135d^2 > \cancel{6a_1 + 15} S + 39$

$a_1^2 + 24da_1 + 140d^2 < S + 55$

$5d^2 > 16$ $d^2 > \frac{16}{5}$

$d^2 \geqslant \frac{4}{5}$ $-\frac{4}{\sqrt{5}} < d < \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow d = 1 \Rightarrow$

$(a_1 + 9)(a_1 + 15) > 6a_1 + 15 + 39$

$a_1^2 + 24a_1 + 135 - 15 - 6a_1 > 0$

$a_1^2 + 18a_1 + 120 > 0$

$D = 324 - 4 \cdot 120 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-18}{2} = -9 \Rightarrow a \neq -9$

$a \in (-12; -9)$

$t > S + 39$

t

$a_1^2 + 24a_1 + 140$

$a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 15 + 55$

$a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0$

$D = 324 - 280 = 44 = 2\sqrt{11}$

$a_{12} = \frac{-18 \pm 2\sqrt{11}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{11}}{1}$

$[-9; -9 + \sqrt{11}) \Rightarrow$

$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$ $\begin{array}{r} 9 \\ - 3,5 \\ \hline 5,5 \end{array}$

$\begin{array}{r} 120 \\ - 39 \\ \hline 81 \\ 4 \\ \hline 324 \end{array}$

$-8 \; -7 \; -6 \; -9$

$(4 + \sqrt{28} \cdot \sqrt{41}) = 77 - 8 - 2 \cdot \sqrt{28} \cdot \sqrt{41}$

черновик

$a_{10} = a_1 + 9d \quad a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{16} = a_1 + 15d \quad a_{15} = a_1 + 14d$

$S = \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n =$

$= 3(a_1 + a_6) = 3(a_1 + a_1 + 5d) =$

$(a_1 + 9d)(a_1 + 15d) \quad a_1^2 + 2$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) \quad a_1^2 + 2$

$a_1^2 +$

$a_1^2 + 24da_1 + 135d^2 > \cancel{6a_1 +}$

$a_1^2 + 24da_1 + 140d^2 < S +$

$5d^2 > 16 \quad d^2 > \frac{16}{5}$

$d^2 > \frac{4}{5} \quad -\frac{4}{\sqrt{5}} < d < \frac{4}{\sqrt{5}}$

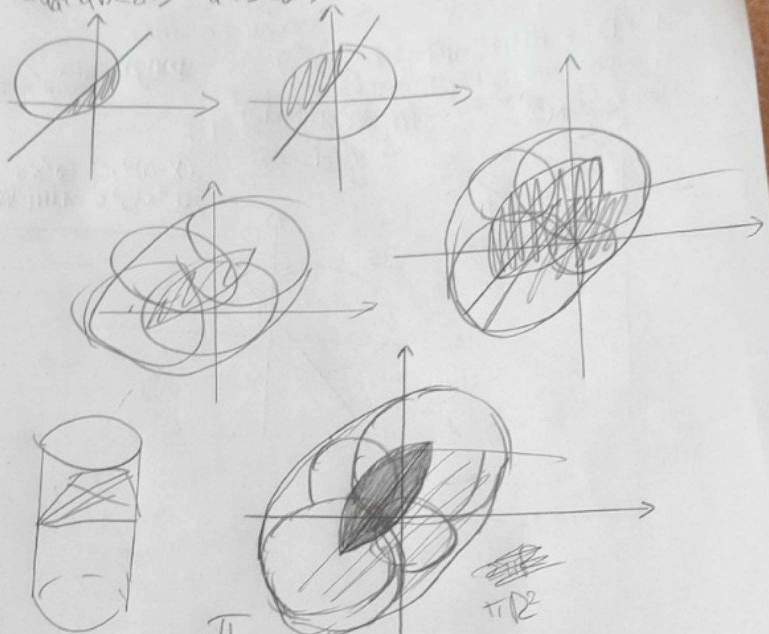
$t > S + 39$

t

$\cdot (4 + \sqrt{\ }$

Черновик

$-4a + 4b < 8 \Rightarrow -a + b < 2 \Rightarrow b < 2 - b$



πR^2

$S^{\pi} = \pi R^2 - \pi R^2$

$S - \pi R^2 \cdot \frac{1}{3}$

$2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi R^2$

$+ \frac{2}{3} \pi (2R)^2$

$+ 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} R^2$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101199**

ID профиля: **306541**

Вариант 23

№4.

Чистовик

$$\begin{cases} НОД(a,b,c) = 22 \\ НОК(a,b,c) = 2^{16} \cdot 11^{19} \end{cases}$$

Для того, чтобы все три числа делились на 22 (НОД = 22), нужно, чтобы числа делились на 2 и 11. Т.к. НОД = 22 ⇒ какое-то из чисел делится только на 11^1 или на 2^1, а может и вместе. То есть если число $a = 11^n \cdot 2^1$, число $b = 2^m \cdot 11^1$, то их НОД получится 22. Возможных вариантов получается 9:

	a	b	c
1)	22	-	-
2)	-	22	-
3)	-	-	22
4)	$11 \cdot 2^n$	-	$2 \cdot 11^m$
5)	$11 \cdot 2^n$	$2 \cdot 11^m$	-
6)	$2 \cdot 11^m$	$2^n \cdot 11$	-
7)	-	$2^n \cdot 11$	$2 \cdot 11^m$
8)	$2 \cdot 11^m$	-	$2^n \cdot 11$
9)	-	$2 \cdot 11^m$	$2^n \cdot 11$

1)–3) } Тогда НОД больше быть не может

4)–9) } в совокупности НОД тоже не сможет превосходить 22.

Осталось только подобрать числа так, чтобы они подходили под условия НОК:

Итак: $a = 22 \cdot 2^k = 11 \cdot 2^{k+1}$

$b = 22 \cdot 2^m \cdot 11^n = 2^{m+1} \cdot 11^{n+1}$

$c = 22 \cdot 11^l = 2 \cdot 11^{l+1}$

Переменные k, m, n, l принимают зн-е: $k \in [0; 15]$, $n \in [0; 18]$, $m \in [0; 15]$, $l \in [0; 18]$

Теперь рассм-м несколько случаев:

1) В одном из чисел макс-я степень 2-ки, а в другом макс-я степень 11, остальные степени не максимальные:

$k = 15$
$m \in [1; 14]$
$n = 18$
$l \in [1; 17]$

⇒ таких вариантов $14 \cdot 17 =$

17·4 =

= 114 +

...рмоны 1, а один = 2

Продолжение и чистовик

$k=15$, $m\in[1;14]$, $l=18$, $n\in[1;17]$ $\Rightarrow$ таких вариантов тоже 14·17

Ан-но будет для $m=15$ $\Rightarrow$

Общая S таких троек: $S=4\cdot14\cdot17$

2) Макс-но степени двоек и в „а" и в „b":

$k=15 \Rightarrow n=18$ ($l\in[1;17]$), $m=15 \Rightarrow n\in[1;17]$ ($l=18$) $\Rightarrow S+=17+17=34$

3) Ан-но для 11 $\Rightarrow$ + ещё ~~34~~ 28

4) Все степени max $\Rightarrow$ +1

5) Как я писал ранее наши переменные могут принимать значение 0 $\Rightarrow$ $k=0$, $m=15$, $l=15$, $n=0$ (и так ещё ~~7~~ (n-8)) $\Rightarrow$

~~$S=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5 \overset{+S_6}{=} 4\cdot14\cdot17+2\cdot34+1+8=$~~

~~$=1165$~~

~~Ответ: 1165~~

5) $k=0$, $m=15$, $n\in[1;17]$, $l=15$; $k=0$, $m=15$, $l\in[1;17]$, $n=15$ – $\frac{2}{4}$ так для 4 переменных

$=17\cdot4=68$, также и для 11 $\Rightarrow 14\cdot4=56$

6) Только 0 и 15 $\Rightarrow$ 8 значений $\Rightarrow$

$$S=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6=14\cdot17\cdot4+34+28+1+8+14\cdot4+17\cdot4=$$
$$=1147$$

Ответ: 1147

...ровны 1, а один = 2

21101199 (U306541 M1296538)

№5 Чистовик

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, $\log_{(x+4)^2}(x+34)$, $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

Область допустимых зн-й:

$$\begin{cases} \sqrt{x+34} \neq 0,1 \\ (x+4)^2 \neq 0,1 \\ \sqrt{2x+23} \neq 0,1 \\ 2x+23>0 \\ x+34>0 \\ -x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -33 \\ x = -34 \\ x = \pm 3 \\ x = -4 \\ x \neq -11 \\ x \neq -11,5 \\ x > -11,5 \\ x > -34 \\ x < -4 \end{cases}$$

Всего возможно три варианта

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34) \\ \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) - 1 = \log_{(x+4)^2}(x+34) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) \\ \log_{(x+4)^2}(x+34) - 1 = \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{(x+4)^2}(x+34) = \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) \\ \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) - 1 = \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) \end{cases}$$

Введём переменные a, b, c:

$$\left.\begin{aligned} a &= 2\log_{x+34}(2x+23) \\ b &= \tfrac{1}{2}\log_{(-x-4)}(x+34) \\ c &= 2\log_{2x+23}(-x-4) \end{aligned}\right| \Rightarrow a \cdot b = \frac{2}{c}$$

$a \cdot b \cdot c = 2 \Rightarrow$ два из них равны, а

третий больше остальных на $1 \Rightarrow = 2 \Rightarrow$

$a^2(a+1) = 2 \Rightarrow a^3 + a^2 - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$

значит двое из них равны 1, а один = 2

6) Тел...
$S = S_1 + S_2 + \ldots$

Чистовик

Продолжение №5

Осталось рассм-ть все возможные ~~отв~~ случаи:

$$\left[\begin{array}{l} 2\log_{x+34}(2x+23)=1 \\ \frac{1}{2}\log_{-x-4}(x+34)=1 \\ 2\log_{2x+23}(-x-4)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+34}=2x+23 \\ (x+4)^2=x+34 \\ \sqrt{2x+23}=-x-4 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-9 \\ \left[\begin{array}{l} x=-9 \\ x=2 \end{array}\right. \\ x=7 \end{array}\right. \Rightarrow$$

может быть случай, что ~~и~~ при $x=-9$: $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=\log_{x+4}(x+34)$

1) Проверим $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$ при -9

$\log_{\sqrt{-18+23}}(9-4)=\log_{\sqrt{5}}(5)=2 \Rightarrow$

Этот случай подходит (под ОДЗ в том числе)

2) $x=2$ - не подходит под од 3

3) $x=7$ - не подходит под од 3

Ответ: $\underline{-9}$

21101199 (U306541 M1296538)

Черновик

$$\begin{array}{r} \times\, 64 \\ 17 \\ \hline 448 \\ 64 \\ \hline +\,1088 \\ 85 \\ \hline 1161 \end{array}$$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = 1$ ОК $\underline{б}$

$\log_{(x+4)^2}(x+34) = 1$?

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = 2$

$x = 2$

$$\begin{array}{r} \times\, 14 \\ 17 \\ \hline 98 \\ 14 \\ \hline 238 \\ \times\, 4 \\ \hline +\,952 \\ 34 \\ \hline +\,986 \\ 28 \\ \hline +\,1015 \\ 8 \\ \hline 1023 \\ 56 \\ \hline 1079 \\ 63 \\ \hline \end{array}$$

$k = 0$

$m = 15$

Третий

$a^2(a+1)$

значит д

$$64 \times 17 = 448 + 64 = 1088$$

Черновик

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+$ ОК

Черновик

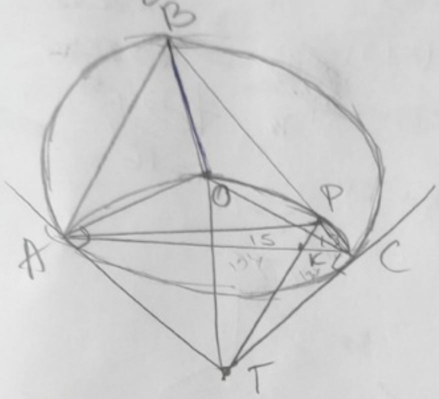
$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$

$\log_{(x+4)^2}(x+34)$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

[redacted]

$\frac{1}{\log_{x-3}}$ ✓ x 9?



$2 \cdot 11$

$a \cdot b$ 6+

$a \cdot b$

a

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{(x+2)^2}(x+34)$

$2\log_{x+34}(2x+23) - \frac{1}{0{,}5\log_{x+34}}$

$2\log_{x+34}(2x+23) - \log$ "

$2\log_{x+34}(2x+23+x+34$

черновик

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34)$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \frac{1}{\log_{(x+34)}(x+4)^2}$

20

110

$\frac{\log_{x+34}\left((2x+23)^2+(x+4)^2\right)-1}{\log_{2x+34}(x+4)^2} =$

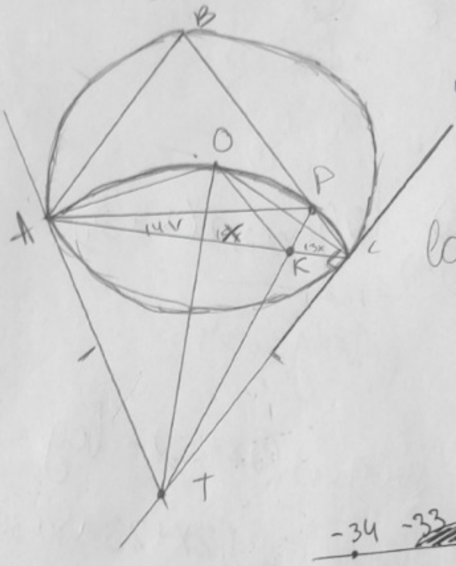
$x = -3$

$(2x+23)^2 + (x+4)^2 = x+34$

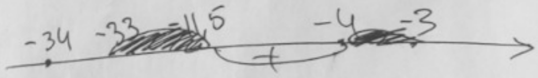
$t = 16$

$2x > -23$

$x > -$



$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$



Введём

$a = 2\log$

$b = \frac{1}{2}\log$

$c = 2\log$

Третий боль

$a^2(a+1) = 2 \Rightarrow$

значит двое