# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101032**

ID профиля: **900711**

Вариант 23

Чистовик

№1.

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_6$

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + d$

$\ldots$

$a_6 = a_1 + 5d$

$\Downarrow$

$S = 6a_1 + 15d = (a_1 + 15d) + 5a_1 = x + 5a_1$

пусть: $\boxed{a_1 + 15d = x}$

$a_{10}a_{16} =$
$= (a_1 + 15d)(a_1 + 9d) =$
$= x(x - 6d)$

$\Downarrow$

$x(x - 6d) > x + 5a_1 + 39$

$a_{11}a_{15} =$
$= (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) =$
$= (x - 5d)(x - d)$

$\Rightarrow (x - 5d)(x - d) < x + 5a_1 + \cancel{55}\,39 + 16$

$(x - 5d)(x - d) - 16 < x + 5a + 39$

$\Downarrow$

$(x - 5d)(x - d) - 16 < x + 5a + 39 < x(x - 6d)$

$\Downarrow$

$(x - 5d)(x - d) - 16 < x(x - 6d)$

$\cancel{x^2} - \cancel{6dx} + 5d^2 - 16 < \cancel{x^2} - \cancel{6dx}$

$5d^2 < 16$

$d^2 < 3{,}2$

$d = 1$ – единственное решение для $d$

$a_1 \in \mathbb{Z}$

$a_2 \in \mathbb{Z}$

$\Downarrow$

т.к. $a_2 - a_1 \in \mathbb{Z}$

то и $d \in \mathbb{Z}$

Кроме того, т.к. прогрессия возрастающая, то разность прогрессии тоже положительная

$(d > 0)$

Рассмотрим систему неравенств:

1) $(a_1 + 15)(a_1 + 9) > 6a_1 + 15 + 39$ (вместо $d$ подставляем "1")

$a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 54$

$a_1^2 + 2 \cdot 9 \cdot a_1 + 81 > 0$

$(a_1 + 9)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq 9$

чистовик

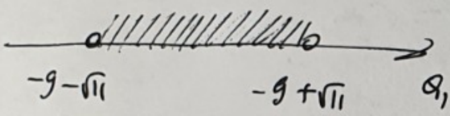
2) $(a_1+10)(a_1+14) \le 6a_1+15+55$

$a_1^2+18a_1+70 \le 0$

$D = 324-280 = 4\cdot 11 = (2\sqrt{11})^2$

$a_1 = -9 \pm \sqrt{11}$

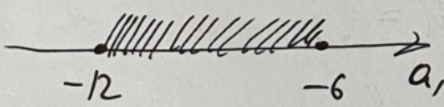
$3 < \sqrt{11} < 4$



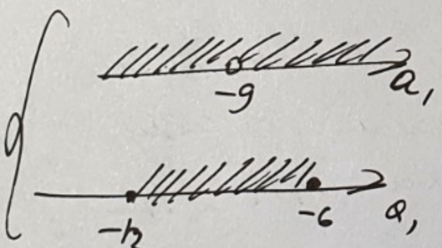

$-13 < -9-\sqrt{11} < -12$

$-6 < -9+\sqrt{11} < -5$

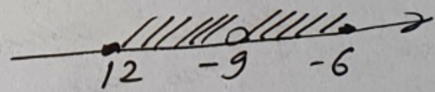
для $a_1 \in \mathbb{Z}$ имеем:




Совмещая 1 и 2 получаем значения $a_1$:




$\Rightarrow$




$$\begin{cases} a_1 \in [-12; -6] \\ a_1 \in \mathbb{Z} \\ a_1 \neq -9 \end{cases}$$

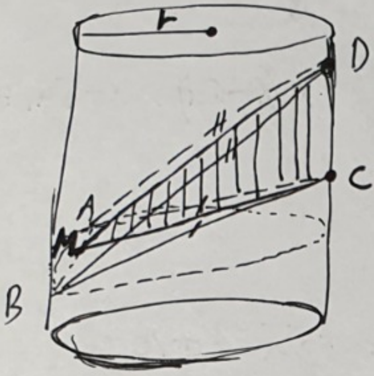
Ответ: $a_1 \in \{-12; -10; -8; -7; -6\}$

2.

Чистовик

№2.

Рассмотрим $ABCD$ вписанный в цилиндр.:




$DC$ – лежит на образующей по условию

$AC = BC = 6 \quad AB = 4$

$AD = BD = 7$

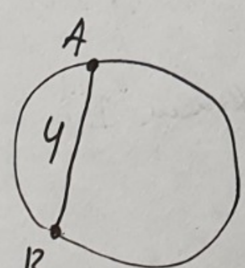
1) $DM$ – медиана, биссектр, высота в $\triangle ABD$
(аналогично для $\triangle ABC$)
$\Downarrow$
$(DCM) \perp AB \Rightarrow DC \perp AB$
$\Downarrow$
т.к. $DC \parallel OO_1$
($OO_1$ – ось цилиндра)
то $(ABC) \perp OO_1$,
$OO_1 \in (DCM)$
($MC$, $MD$ – серединные $\perp$)

2) Заметим, что $r_{min} = 2$
$r_{min}$ – минимальный радиус цилиндра:

1. $DC$ – не влияет на $r$ ($DC \parallel OO_1$)
2. В "основании" призмы может находиться, только $\triangle ABC$, т.к. $DC \parallel OO_1$
3. На основании выше сказанного укажем вывод о том, что $r$ зависит от $AB$

$\Downarrow$

рассмотрим сечение (проходящее через $AB$, $\parallel$ основаниям цилиндра)



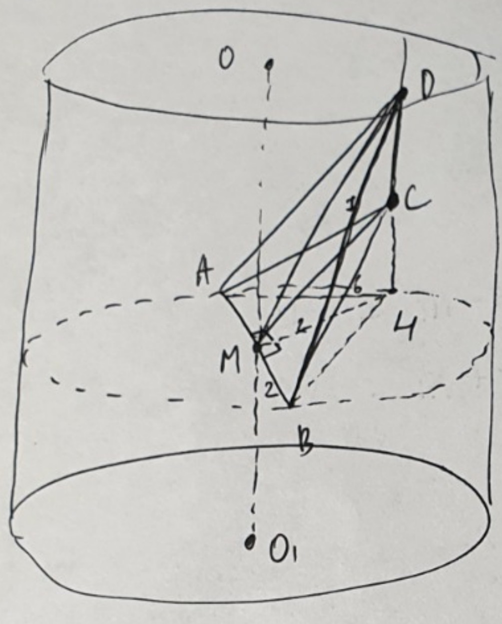

→ заметим, что минимальный $r$, достигается, когда $AB$ – диаметр. $\Rightarrow$

→ $AB$ – диаметр $\Rightarrow r_{min} = \frac{4}{2} = 2$

3

Чистовик

Рассмотрим данный рисунок (для $r_{min}$)




В первую очередь найдем MC, MD:

$MC = \sqrt{CB^2 - MB^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$MD = \sqrt{DB^2 - MB^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$MH = 2 = r_{min}$

$\Downarrow$

Т.к. $MH \perp DC$ (по т. обратной т. о трех $\perp$):

$DH = \sqrt{45 - 4} = \sqrt{41}$

$CH = \sqrt{32 - 4} = 2\sqrt{7}$

$\Downarrow$

$DC = \sqrt{41} - 2\sqrt{7}$

~~Ответ~~

Следует сказать, что такое решение — единственное, т.к. ADB не может являться "основанием" в силу того, что мы получим $MH > MC$ (противоречие)

$\Downarrow$

Ответ: $DC = \sqrt{41} - 2\sqrt{7}$.

4

Чистовик

№3. $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(4b-4a, 8) \end{cases}$

Рассмотрим 2ое нер-во:

$a^2+b^2 \le \min(4(b-a), 8)$

Заметим, что если $(b-a) \le 2$, то $4(b-a) \le 8 \Rightarrow$ имеем $a^2+b^2 \le 4(b-a)$

Заметим, что если $b<a$, то $a^2+b^2 \le i$, где $i<0$

невозможно

$\Downarrow$

$b \ge a$.

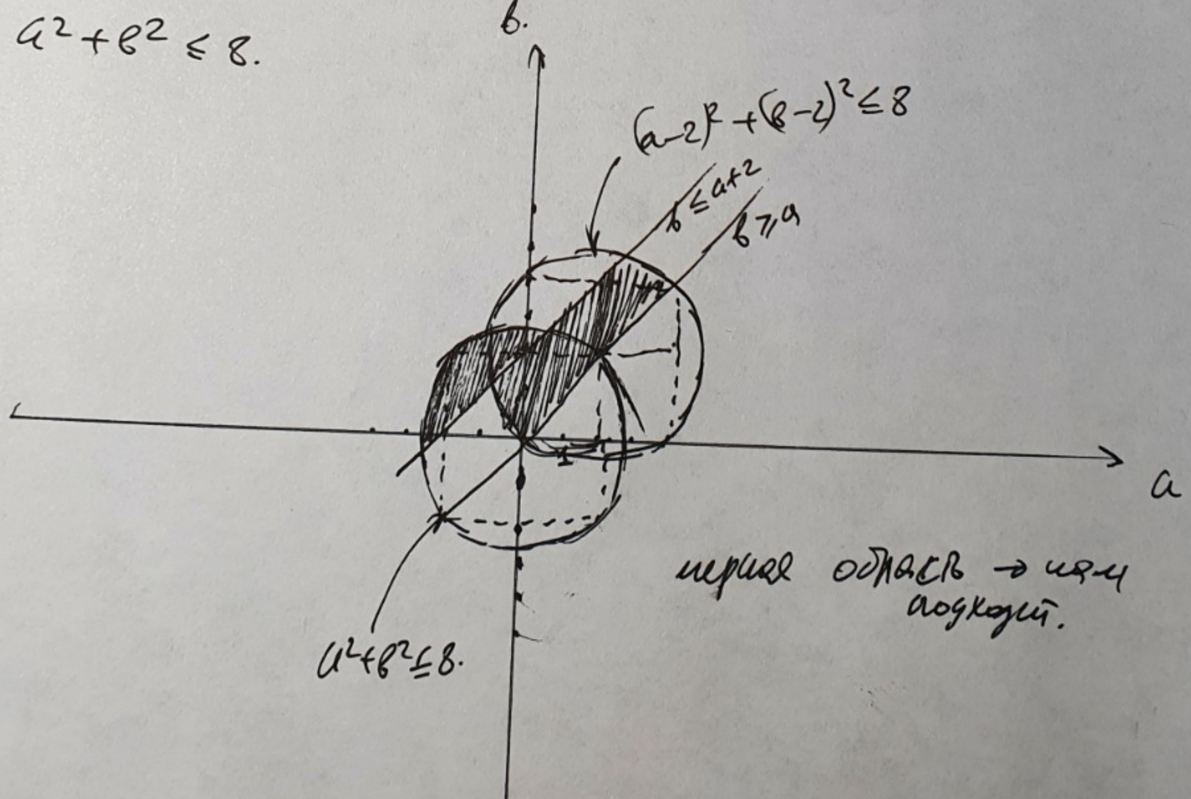
$\Downarrow$

$a^2-4a+4+b^2-4b+4 \le 8$

$(a-2)^2+(b-2)^2 \le 8 \rightarrow \begin{matrix} b \ge a \\ b \le a+2 \end{matrix}$

если $b > a+2$:

$a^2+b^2 \le 8$.




штрих область → нам подходит.

5

21101032 (U900711 M1304654)

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101032**

ID профиля: **900711**

Вариант 23

Чистовик.

№4.

$НОД(a,b,c) = 22$ НОК состоит из простых чисел "2", "11"

$НОК(a,b,c) = 2^{16} \cdot 11^{19}$ ⇓

Сами числа a, b, c можно представить, как:

$a = 2^x \cdot 11^y$

$b = 2^z \cdot 11^i$

$c = 2^j \cdot 11^k$

1) Т.к. $НОД(a,b,c) = 22$ ⇐

$x,y,z,i,j,k \geq 1$

Причем опять же т.к. :

то среди $x,z,j$ и $y,i,k$

найдется хотя бы едина единица

потому что $22 = 2^1 \cdot 11^1$

и если $(x,y,z,i,j,k) > 1$, то

НОД будет тоже $> 22$, другими словами

$НОД(a,b,c) = 2^{(\min(x,z,j))} \cdot 11^{(\min(y,i,k))} = 2 \cdot 11 = 22.$

2) Т.к. $НОК(a,b,c) = 2^{16} \cdot 11^{19}$, то

~~$x,y,z,i,j,k \leq 1$~~

$x,z,j \leq 16$

$y,i,k \leq 19$

Причем опять же т.к.:

$НОК(a,b,c) = 2^{\max(x,z,j)} \cdot 11^{\max(y,i,k)}$

то $\max(x,z,j) = 16$

$\max(y,i,k) = 19$

Чистовик

Таким образом имеем варианты степеней для чисел a, b, c:

$2^p$:

$p \in \{1, 16, [1;16]\}$

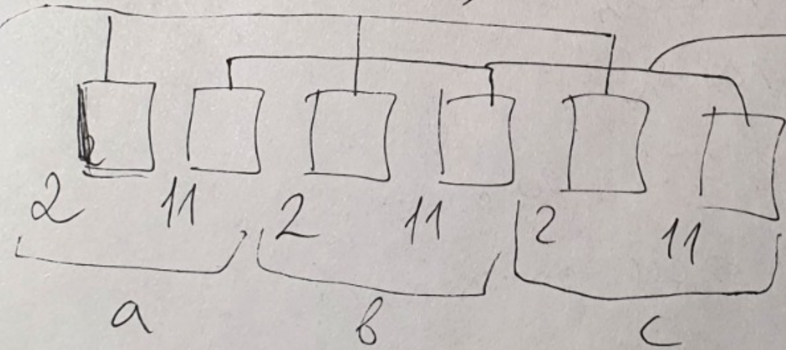
это число задаёт промежуток, так как оно не участвует в образовании НОК и НОД

$11^m$:

$m \in \{1, 19, [1;19]\}$

Рассмотрим всевозможные комбинации:

| a | b | c | |
|---|---|---|---|
| ~~$2^{16}\cdot 11^{19}$~~ | ~~$2^1\cdot 11^1$~~ | ~~$2^1\cdot 11^{[1;19]}$~~ | ~~$\rightarrow 19$~~ |
| ~~$2^{16}\cdot 11^1$~~ | ~~$2^{16}\cdot 11^{19}$~~ | ~~$2^1\cdot 11^{[1;19]}$~~ | ~~$\rightarrow 19.$~~ |
| ~~$2^{16}\cdot 11^{19}$~~ | ~~$2^1\cdot 11^{(1-19)}$~~ | | |




| a | b | c | S |
|---|---|---|---|
| 1 | 19 | 1–19 | 19 |
| 1 | 1–18 | 19 | 18 |
| 19 | 1 | 2–19 | 18 |
| 19 | 1–19 | 1 | 19 |
| 2–18 | 1 | 19 | 17 |
| 2–18 | 19 | 1 | 17. |

$S_{11}^{\square} = 108.$

| a | b | c | S |
|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 1–16 | 16 |
| 1 | 1–15 | 16 | 15 |
| 16 | 1 | 2–16 | 15 |
| 16 | 1–16 | 1 | 16 |
| 2–15 | 1 | 16 | 14 |
| 2–15 | 16 | 1 | 14 |

$S_2^{\square} = 90$

$\rightarrow S = S_{11}^{\square} \cdot S_2^{\square} = 108 \cdot 90.$

$= 9720$

Ответ: 9720

2

Чистовик

№5.

Найдём ОДЗ:

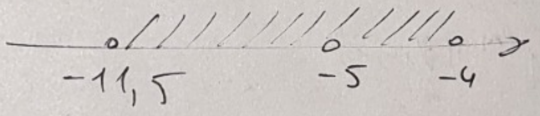
$a = \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) \rightarrow 2x+23>0$, $\boxed{x>-11,5}$; $x \neq -33$, $x > -34$

$b = \log_{(x+4)^2}(x+34) \rightarrow (x+4)^2>0$, $\boxed{\begin{matrix} x\neq -4 \\ x \neq -5 \\ x\neq -3 \end{matrix}}$, $x>-34$

$c = \log_{\sqrt{2x+23}}(-(x+4)) \rightarrow x > -11,5$, $\boxed{x<-4}$

$\Downarrow$

$x \in$




Заметим, что если $x=-9$, то

$a = \log_5 5 = 1$

$b = \frac{1}{2}\log_5 25 = 1$

$c = 2\log_5 5 = 2$

$a = b$

$a = c-1$

$b = c-1$

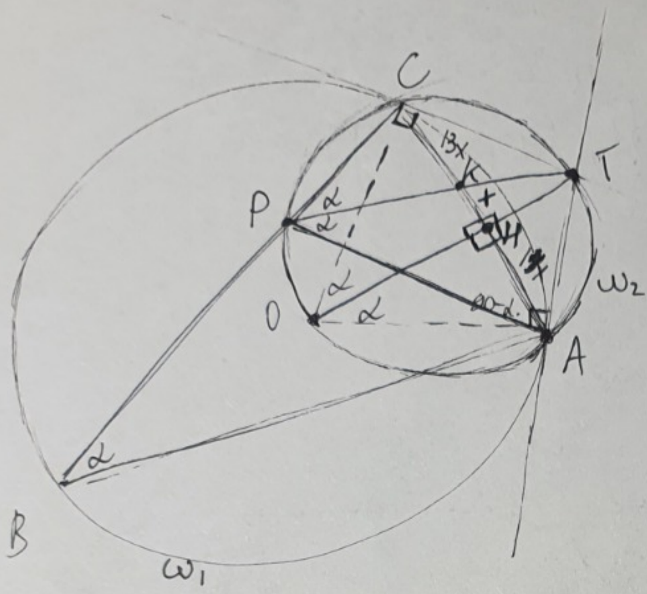
С учетом ОДЗ $x=-9$ подходит, причем при $a=b$, $x=-9$ — единственное решение, т.к. логарифмич. ф-ции пересекаются ровно в 1 точке

Ответ: $x=-9$.

3

Чистовик.

№6.




Пусть $\angle CBA = \alpha$,

тогда $\angle COA = 2\alpha$;

Заметим, что $\angle OCT = 90°$,

а значит $OT$ — диаметр окр-ти $\omega_2$

(если проводить касательные неодновременно, то первая из них при раз упадет в $T$, и вторая туда же, в силу того, что $OT$ уже будет диаметром)

$\Downarrow$

$CT = TA$ (степень точки $T$ относит. $\omega_1$)

$\Downarrow$

$CO = OA$

$\Downarrow$

$OT$ — биссектр. $\angle COA$

$\Downarrow$

$\angle COT = \angle TOA = \alpha$;

$\angle OAC = \angle OTC = 90-\alpha$.

$\Downarrow$

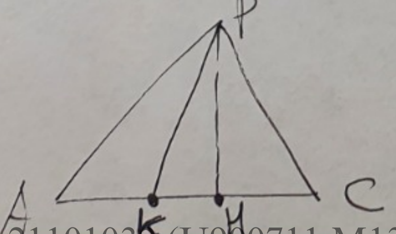
$\angle OHA = 90° \Rightarrow OH$ — высота $\triangle OCA$

$\angle APC = 2\alpha = \angle AOC$, причем $\angle CPT = \alpha$, $\angle TPA = \alpha$.

$\Downarrow$

$PT$ — биссектр $\triangle PCA$.

Расс-м $\triangle PCA$:




$\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{15}{13} \Rightarrow$ т.к. высота общая, то $\frac{AK}{KC} = \frac{15x}{13x} \Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{14x}{14x}$

$KH = 15x - 14x = x$.

$\Downarrow$

14

21101032 (U900711 M1304655)