Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100944**

ID профиля: **310786**

Вариант 23

Задача 1 $\exists\, d = a_2 - a_1 ;\ a_1 = a$ $\qquad d>0$ по усл. (возр. прогр.)

$a_2 = a_1 + d ;\ a_3 = a_1 + 2d \ldots \qquad S = 6a + \frac{5\cdot 6}{2} d = 6a + 15d$

$a_{10}\, a_{16} = (a_1 + 9d)(a_1 + 15d) = a^2 + 24ad + 135d^2 > 6a + 15d + 39$

$a_{11}\, a_{15} = (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) = a^2 + 24ad + 140d^2 < 6a + 15d + 55$

$$\begin{cases} (a^2 + 24ad + 135d^2 - 6a - 15d) > 39 \\ (a^2 + 24ad + \underbrace{135d^2 - 6a - 15d)}_{X} < 55 - 5d^2 \end{cases}$$

$~~X > 39~~ \qquad 39 < X < 55 - 5d^2$

Тогда $5d^2 < 55 - 39 = 16 ;\ d^2 < 3{,}2$

Т.к. арифм. прогр. состоит из целых чисел, d целое, иначе

a_1(целое) + d(нецелое) $\neq a_2$(целое)

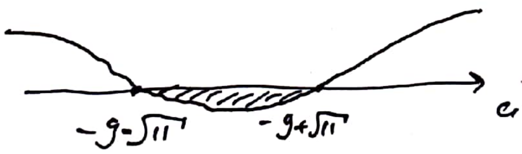
$d>0$ по усл. $\Rightarrow d = 1 \Rightarrow S = 6a + 15$

$$\begin{cases} (a_1+9)(a_1+15) = a^2 + 24a + 135 > 6a + 54 \\ (a_1+10)(a_1+14) = a^2 + 24a + 140 < 6a + 70 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 18a + 81 > 0 \\ a^2 + 18a + 70 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a+9)^2 > 0 \to \text{верно } \forall a \in \mathbb{Z} \\ a^2 + 18a + 70 < 0 \to \frac{D}{4} = 81 - 70 = 11 \end{cases}$$

$a_{1,2} = -9 \pm \sqrt{11}$

метод интервалов (исследуем знак $(a^2+18a+70)$ в зав-ти от a:



Т.о., все a_1 удовлетв. условию, лежат в пр-ке $[-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11}]$

$\sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16} \Rightarrow 3 < \sqrt{11} < 4$

$-13 < -9 - \sqrt{11} < -12 ;\ -6 < -9 + \sqrt{11} < -5$

Тогда $a \in [-12; -6] \Rightarrow \boxed{a_1 \in \{-12; -11; -10; -9; -8; -7; -6\}}$

Чистовик

Задача 3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b,\ 8) \end{cases}$$

$\leftarrow$ ~~окр~~ Круг радиусом $2\sqrt{2}$ с центром в $(\cdot)=(a;b)$

Из второго уравнения найдём ГМТ центров окружностей радиуса $2\sqrt{2}$

$x^2+y^2 \le \min(-4x+4y,\ 8)$

1) Найдём x, y : $-4x+4y=\min(-4x+4y;\ 8)$

$-4x+4y<8 \Rightarrow y<2+x$ – полуплоскость ниже прямой $y=2+x$

В этом случае $x^2+y^2 \le -4x+4y \Rightarrow x^2+4x+4+y^2-4y+4 \le 8$

$(x+2)^2+(y-2)^2 \le 8$ – круг радиуса $2\sqrt{2}$ с центром в $(-2;2)$ проходит через $(0;0)$

Нас интересует пересечение $(x+2)^2+(y-2)^2 \le 8$ и $y<2+x$

Это – часть круга, огранич. хордой

2) при $y \ge 2+x$ (выше прямой $y=x+2$):

$x^2+y^2 \le 8$

Круг радиуса $2\sqrt{2}$ с центром в $(0;0)$

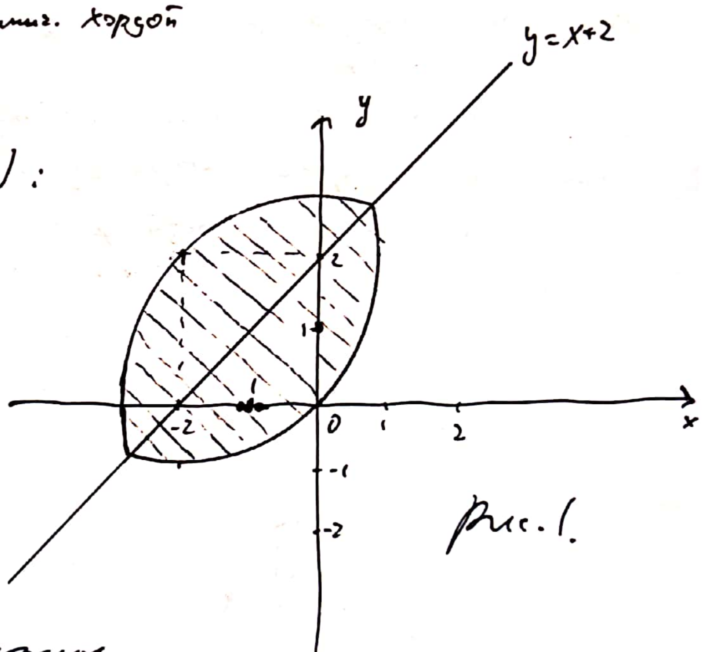


Рис. 1.

Эти „кусочки" симметричны относительно прямой $y=x+2$,

т.к. у них одинаковый радиус, ~~и центры~~

прямая $y=x+2$ является сер. пер. для отрезка, соед. точки $(0;0)$ и $(-2;2)$, которые яв. центрами окружностей.

Заштрихованная область из 2-х одинаковых „кусочков" – ГМТ центров окружностей. (рис. 1)

Площадь всей фигуры – заметаемая всеми окружностями с центрами в данном ГМТ площадь

[Чистовик]

[Страница 2 из 3]

~~Если~~ Если ГМТ центров окр-тей радиуса R_1 — круг радиуса R_2, то итоговая фигура — круг радиуса R_1+R_2, концентричный кругу ГМТ (рис. 2)

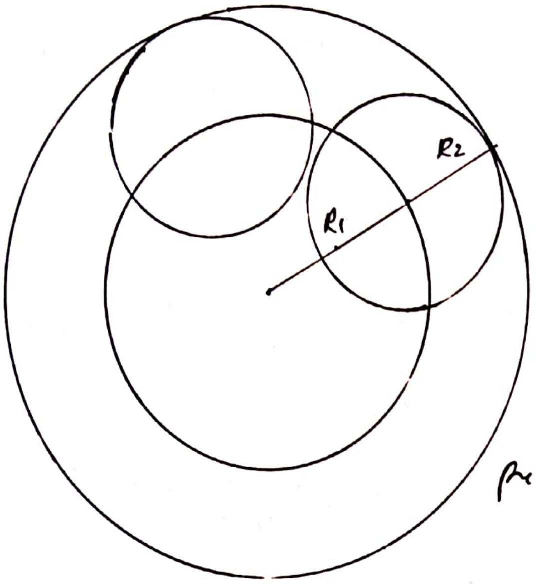
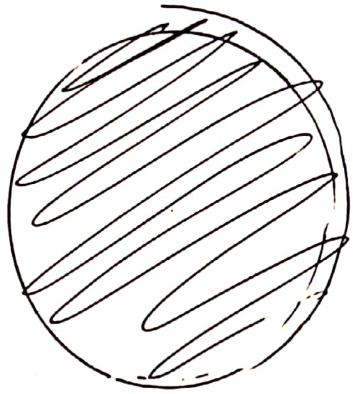
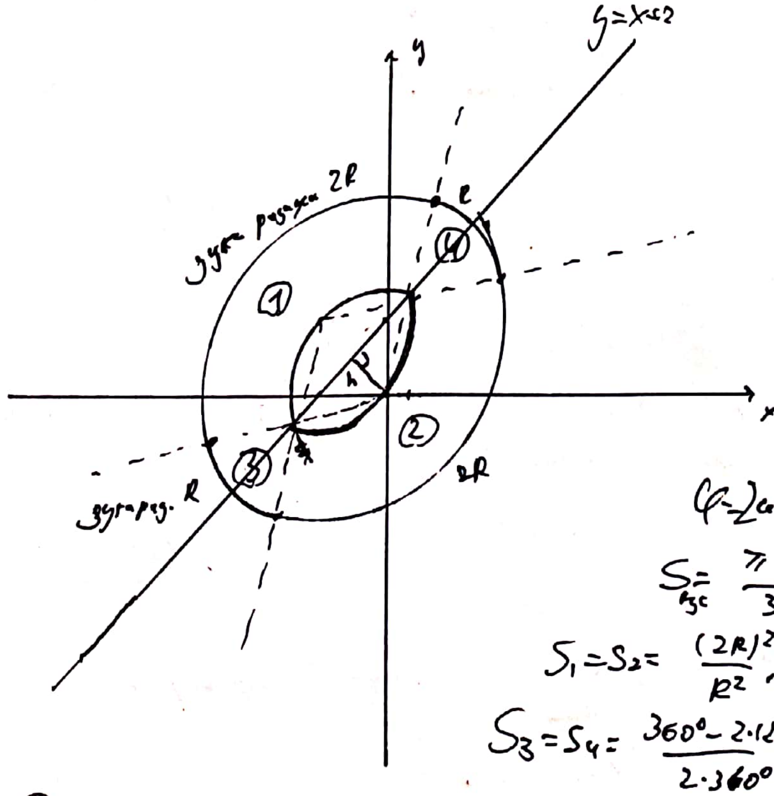


рис. 2



~~Если ГМТ — дуга, то фигура~~

В нашем случае ГМТ — только часть ~~окружн.~~ круга, поэтому для каждого кусочка такой формы фигура будет образовываться только в пределах дуги, угловой размер которой равен угловому размеру дуги, содерж. в ГМТ. Такая форма — ~~дуга~~ сектор радиуса $2+\sqrt2+2\sqrt2 = 4\sqrt2 = 2R$ — участки 1, 2



В оставшихся 2-х участках возле „стыков" кусочков фигура выглядит как сектор радиуса R с центром в (·) стыка участков 3, 4

Найдём площадь кусочка

$h=\sqrt2$ (расстояние от (0;0) до прямой $y=x+2$)

φ — угол раствора дуги кусочка

$$\varphi = 2\arccos\frac{R-h}{R} = 2\arccos\frac{1}{2} = 120^\circ$$

$$S_{кус} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\cdot\sin 60^\circ}{2} = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt3$$

$$S_1 = S_2 = \frac{(2R)^2}{R^2}\cdot S_{кус} = 4S_{кус} = \frac{32\pi}{3} - 8\sqrt3$$

$$S_3 = S_4 = \frac{360^\circ - 2\cdot 120^\circ}{2\cdot 360^\circ}\cdot\pi R^2 = \frac{\pi R^2}{6} = \frac{4\pi}{3}$$

$$S_ф = 2(S_1+S_3) = 2\left(\frac{32\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}-8\sqrt3\right) = 2\left(\frac{36\pi}{3}-8\sqrt3\right) = 8(3\pi-2\sqrt3) = \boxed{24\pi-16\sqrt3}$$

$81+11+18\sqrt{11}-2\cdot 81-18\sqrt{11}+70=0$

$S=-21 \quad d=1 \quad a=-6$

$\cancel{(-12)\cdot(-6)=72>18}$

$\cancel{(-11)(-7)=77<}$

$3\cdot 9=27>18$

$4\cdot 8=32<34$

$a=-18;\ d=1;\ S=-57$

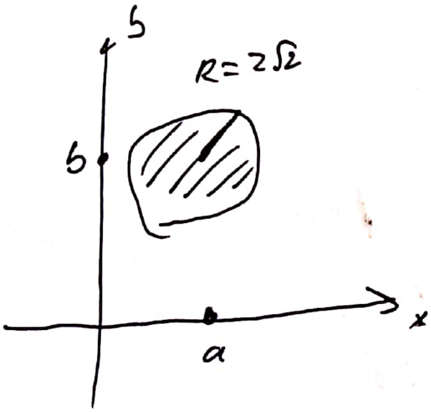
$(-3)(3)=-9>-18$

$(-2)\cdot 2=-4<-2$

$a^2+b^2\le 4b-4a$

$a^2+4a+b^2-4b\le 0$

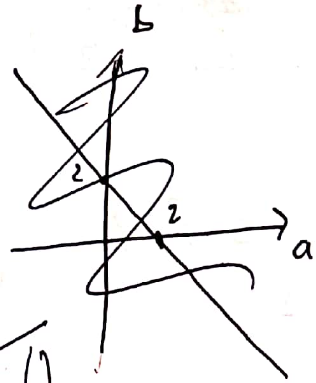
$(a+2)^2+(b-2)^2\le 8$



Таким кружки, что

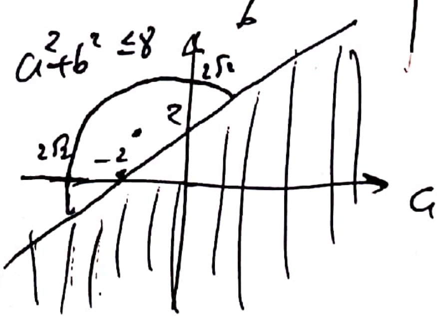
$a^2+b^2\le \min(-4a+4b;\ 8)$

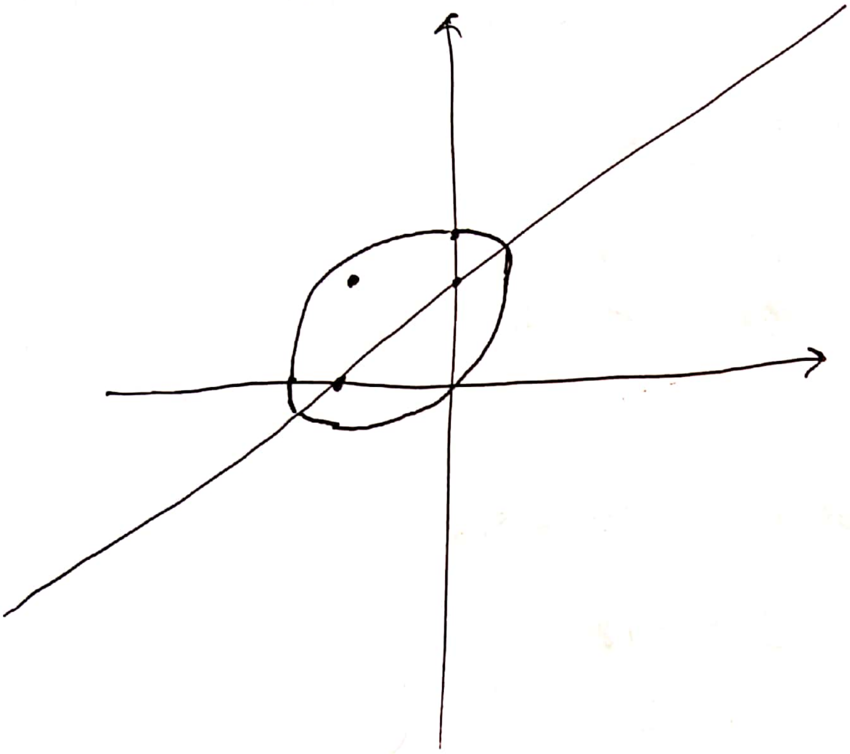
$\left\{ a^2+b^2\le 8 \right.$

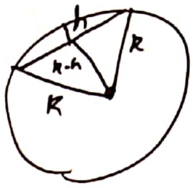


$4b-4a<8$

$b<a+2$







$$\begin{cases} a^2+b^2=8 \\ b=a+2 \end{cases}$$

$a^2+a^2+4a=4$

$a^2+2a-2=0$

$\frac{D}{4}=1+2=3$

$a_{1,2}=-1\pm\sqrt{3}$

$\cancel{2+\sqrt{3} \ ? \ 2\sqrt{2}}$

$\cancel{4+3+4\sqrt{3} \ ? \ 8}$

$1+\sqrt{3} \ ? \ 2\sqrt{2}$

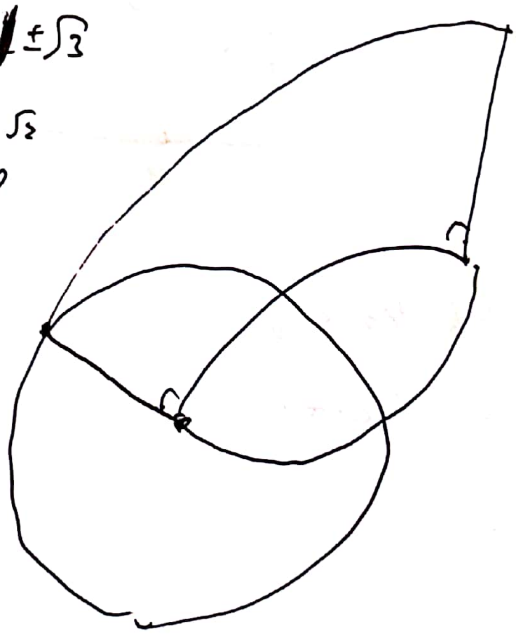
$4+2\sqrt{3} \ ? \ 8$

$2\sqrt{3} \ ? \ 4$

$12 \ ? \ 16$

$$\begin{cases} (a+2)^2+(b-2)^2=8 \\ b=a+2 \end{cases}$$

$(a+2)^2+a^2=8$



Часть 2

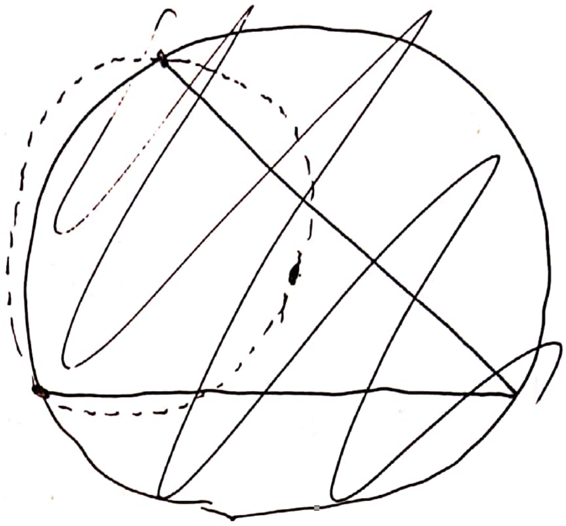
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100944**

ID профиля: **310786**

Вариант 23

Задача 3 (б) Чистовик Стр. 1 из 2



$\exists\ AK = 15x$

По общ. углу $\widehat{CAP}$:

$$\frac{S_{AKP}}{S_{ACP}} = \frac{S_{APK}}{S_{APK}+S_{CPK}} = \frac{15}{28} = \frac{AK\cdot AP}{AC\cdot AP}$$

$\Downarrow$

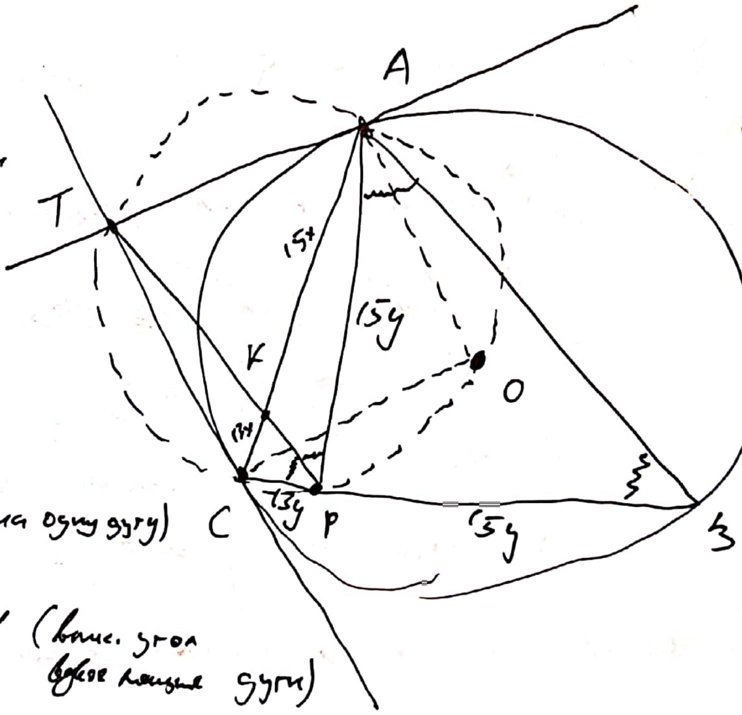
$AC = 28x \Rightarrow KC = 13x$

$TC = TA$ (Кас. к одной окр-ти)

$\Downarrow$

$\widehat{CPT} = \widehat{TPA}$ - вписн. углы, оп. на равные дуги

$\exists\ \widehat{CPT} = \alpha$



$$\frac{S_{CPK}}{S_{KPA}} = \frac{13}{15} = \frac{CP\cdot PK}{AP\cdot PK}$$

$\exists\ CP = 13y \Rightarrow AP = 15y$

$\widehat{CPA} = \widehat{COA}$ (впис. углы на одну дугу) C

$\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AOC}}{2} = \frac{\widehat{APC}}{2} = \alpha$ (впис. угол вдвое меньше дуги)

$\widehat{TPC} = \widehat{ABC} = \alpha \Rightarrow TP \parallel AB$ т.к. $C, P, B \in$ одной прямой

$\widehat{TPA} = \widehat{PAB} = \alpha$ (н.л.) $\Rightarrow \widehat{PAB} = \widehat{ABP} \Rightarrow$ равноб. Δ $AP = PB = 15y$

$$\left(\frac{S_{ABC}}{S_{KCP}}\right)^{-1} = \frac{CK\cdot CP}{CA\cdot CB} = \frac{13x\cdot 13y}{28x\cdot 28y} = \frac{13^2}{28^2}$$

$$S_{ABC} = \frac{28^2}{13^2}\cdot 13 = \frac{28^2}{13} = \frac{784}{13}$$

Задача 1(4) Т.к. НОК содержит все простые множители чисел a, b, c $\Rightarrow$ a, b, c представимы в виде $2^{\alpha} \cdot 11^{\beta}$
$\alpha, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(других пр. множ. у НОК нет)

НОД — произведение $2^{\min(\alpha)} \cdot 11^{\min(\beta)} = 22 \Rightarrow$

$= \min(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3) = \min(\beta_1; \beta_2; \beta_3) = 1$

1) ~~Пусть~~ Рассмотрим вариант, когда $\min \beta$ и $\min \alpha$ попали в одно число (одно из чисел — 22)

$\alpha_1 = 1; \alpha_2 = 1$

Тогда $\alpha_2 + \alpha_3 = 15$; $\beta_2 + \beta_3 = 18$

~~Всего 8 вариантов для разных пар α_2, α_3 и 10 вариантов для пар $\beta_2; \beta_3$~~

Для α_2 15 вариантов, для β_2 — 18

Всего $15 \cdot 18$ вариантов (второе число опред. автоматически)

15 — ячейки. $\Rightarrow$ суммарно варианты не пересек.

Итого из-за разных расстановок

Стр. 2 из 2

Чистовик

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 11^{\beta_1}$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 11^{\beta_2}$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 11^{\beta_3}$

$\max(\beta_1; \beta_2; \beta_3) = 19$

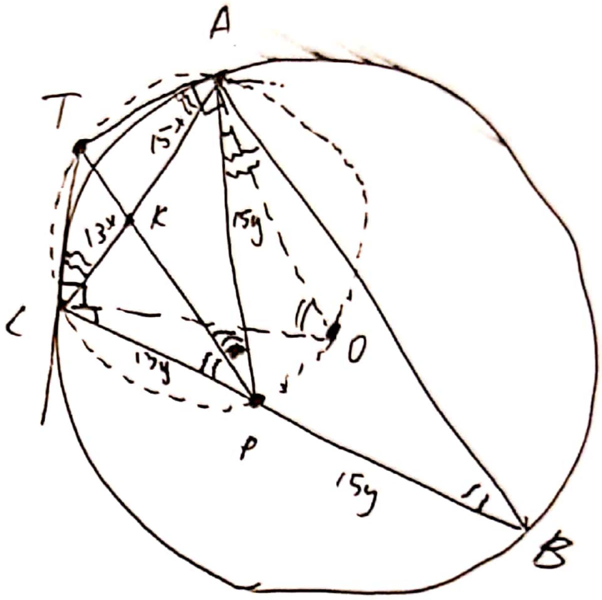
$\max \alpha = 10$

$\min \alpha = \min \beta = 1$

$\frac{AK}{AC} = \frac{15}{28}$

$AK = \frac{15}{28} AC$

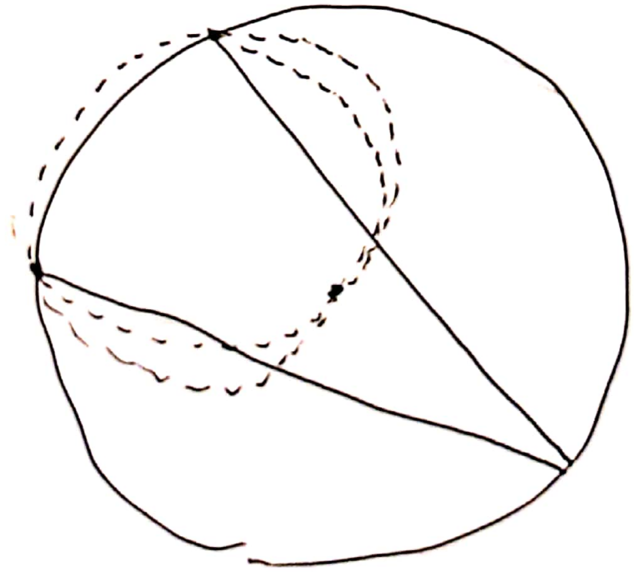
$\exists \alpha_1 = 1 \Rightarrow \alpha_2 + \alpha_3 = 15$



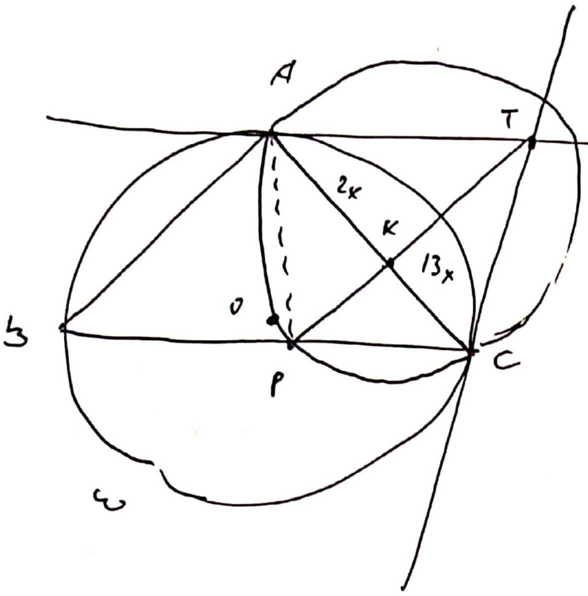
log r

$(30-2)^2 = 900 + 4 - 120 =$

$= 784$



Черновик



$S_{APK} = 15$

$S_{CPK} = 13$

$S_{ABC} - ?$

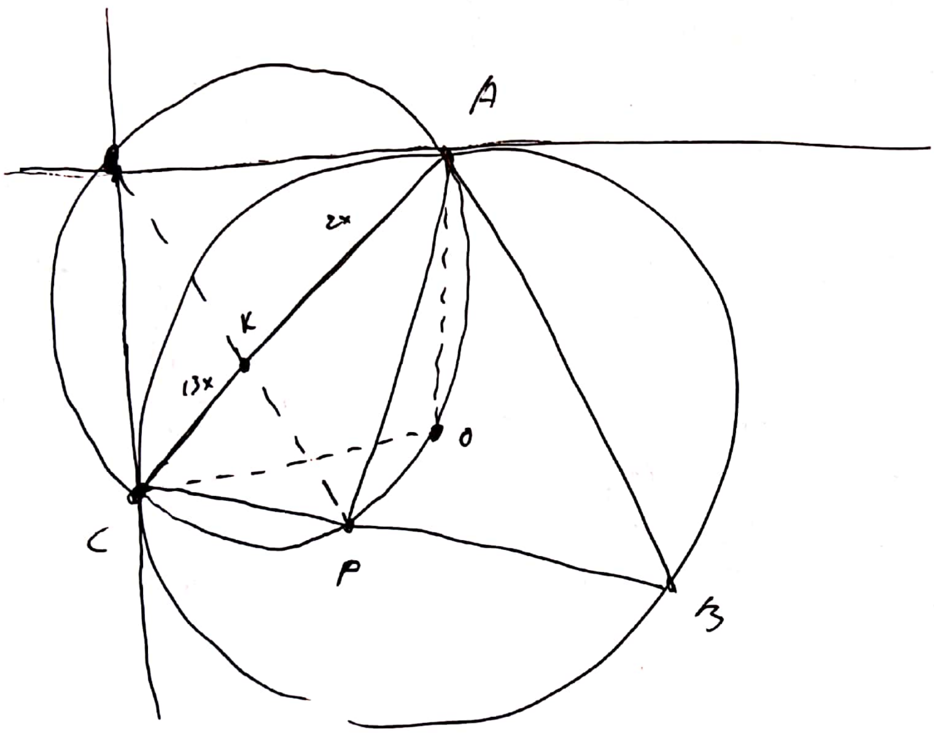
$$\frac{a}{a+b} = \frac{13}{15}$$

$$a = \frac{13}{15}a + \frac{13}{15}b$$

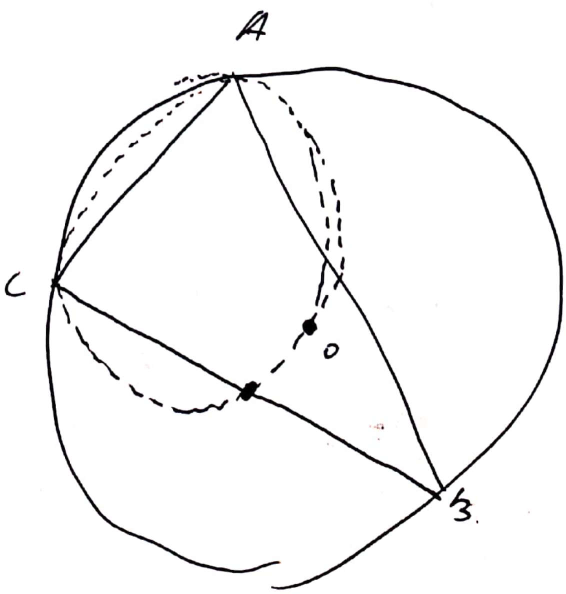
$$\frac{2}{15}a = \frac{13}{15}b$$

$$2a = 13b$$

$$a = \frac{13}{2}b$$



Черновик



$c^c = a^{a^{\frac{1}{2}c}}$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34)$

$2\log_{(x+34)}(2x+23) = \frac{1}{\log_{(x+34)}(x+4)^2}$

Черновик

$\log_{(x+34)}(2x+23) \cdot \log_{(x+34)}(x+4) = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}\log_{(x+4)}(x+34)$

$2x+23 = (x+34)$

$\frac{1}{2}\log_{(x+4)}(x+34) =$

$n = \log_2 2^n$

$\log_{a_1} a_2 = \log_{a_3} a_4$

$n = \frac{1}{\log_{2^n} 2}$

$a_2 = a_1^{\log_{a_3} a_4}$

$\log_a b^2 = \log_b bc$

$a_2^{a_3} = a_1^{a_4}$

$(2^n)^n = 2^{n^2}$

$b^{2b} = a^{bc} \Rightarrow a^c = b^2 \Rightarrow b = a^{\frac{1}{2}c}$

$\log_a b^2, \log_{c^2} a^2, \log_b c$

$\begin{cases} c^x = a \\ b^x = c \end{cases}$

$b^{x\log_b c} = a$

$b^x = c$

$c^{\log_b c} = a$

$c^c = a^b$

$\cancel{\log_2 8 = \log_3 81}$

$\cancel{\log_8 64}$

$\log_4 16 = \log_2 4$

$4^4 = 16^2$

Сканировано