Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100889**

ID профиля: **825427**

Вариант 23

Чистовик

1. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = S$

Т.к. прогрессия возрастающая, то $d>0$, где d – разность.

$a_{10}a_{16} > S+39$ $\qquad S = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 =$

$a_{11}a_{15} < S+55$

$$= a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + (a_1+3d) + \dots + (a_1+5d) =$$

$$= 6a_1 + 15d.$$

$a_{10} = a_1+9d$, $a_{16} = a_1+15d$, $a_{11} = a_1+10d$, $a_{15} = a_1+14d$ (Из ариф. прогрессии)

Значит $a_{10}a_{16} = (a_1+9d)(a_1+15d) > S+39 = 6a_1+15d+39$

и $a_{11}a_{15} = (a_1+10d)(a_1+14d) < S+55 = 6a_1+15d+55$

$(a_1+9d)(a_1+15d) = a_1^2+24a_1d+135d^2 > 6a_1+15d+39$

$(a_1+10d)(a_1+14d) = a_1^2+24a_1d+140d^2 < 6a_1+15d+55$

Умножим $a_1^2+24a_1d+135d^2 > 6a_1+15d+39$ на -1.

$\Rightarrow -a_1^2-24a_1d-135d^2 < -6a_1-15d-39$ и прибавим к $a_1^2+24a_1d+140d^2 < 6a_1+15d+55$ т.к. теперь у них одинаковый знак неравенства

Получаем $5d^2 < 16 \Rightarrow d^2 < \frac{16}{5} \Rightarrow -\frac{4}{\sqrt5} < d < \frac{4}{\sqrt5}$, но т.к. $d>0$ по условию, то $0<d<\frac{4}{\sqrt5}$. Так как ариф. прогрессия состоит из целых чисел, то $a_1, d \in \mathbb{Z}$, $d>0$. Но $\frac{4}{\sqrt5}$ $3>\sqrt5>2$. Значит $\frac{4}{\sqrt5} < 2$.

Между $[0;2)$ только $d=1$ подходит.

Значит, $d=1$.

$\Rightarrow (a_1+9)(a_1+15) > 6a+15+39$; $(a_1+10)(a_1+14) < 6a_1+15+55$

$a_1^2+24a_1+135 > 6a_1+54$; $a_1^2+24a_1+140 < 6a_1+70$.

$\Rightarrow a_1^2+18a_1+81>0$ и $a_1^2+18a_1+70<0$

$D = 324-324 = 0$ $\qquad D = 324-280 = 44$

$a_1 = \frac{-18}{2} = -9$ $\qquad a_1 = \frac{-18+\sqrt{44}}{2} = -9+\sqrt{11}$ $\quad a_2 = \frac{-18-\sqrt{44}}{2} = -9-\sqrt{11}$

$$\begin{cases} a_1+18a_1+81>0 \\ a_1^2+18a_1+70<0 \end{cases} \begin{cases} a\in(-\infty;-9)\cup(-9;+\infty) \\ a\in(-9-\sqrt{11};-9+\sqrt{11}) \end{cases} \Rightarrow a\in(-9-\sqrt{11};-9)\cup(-9;-9+\sqrt{11})$$

Но т.к. $a\in\mathbb{Z}$, то $3<\sqrt{11}<4 \Rightarrow \boxed{-13<-9-\sqrt{11}<-12}$ и $\boxed{-6<-9+\sqrt{11}<-5}$

Значит, $a\in[-12;-9)\cup(-9;-6]$, $a\in\mathbb{Z}$

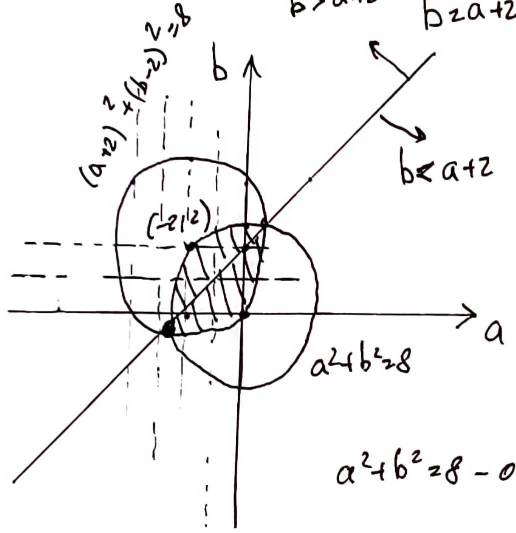
Ответ: $a_1 \in \{-12;-11;-10;-8;-7;-6\}$

1

Чистовик

3. $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8) \end{cases}$. Для начала найдем все пары (a,b) при которых выполн. систему.

$a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8)$. – То есть если $-4a+4b<8$, то $a^2+b^2 \le -4a+4b$. Иначе $a^2+b^2 \le 8$



Значит, если какая-либо пара (a,b) лежит ~~[illegible]~~ в $-4a+4b \le 8$, то она должна лежать в $a^2+b^2 \le -4a+4b$.

$a^2+b^2 \le 8$, $a^2+b^2 \le -4a+4b \Rightarrow a^2+4a+4+b^2-4b+4 \le 8$

$\Rightarrow (a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$ – окружность

$a^2+b^2 \le 8$ – окружность

$-4a+4b=8$ – прямая

$b=a+2$

$a^2+b^2=8$ – окружность с центром в $(0,0)$ с $R=\sqrt{8}$

$(a+2)^2+(b-2)^2=8$ – окружность с центром в $(-2;2)$ с $R=\sqrt{8}$

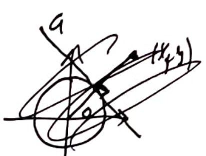
Если (a,b) выполн. $-4a+4b<8$, т.е $b<a+2$, то решение $(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$

Иначе решение $a^2+b^2 \le 8$. Следовательно, закрашенная область – это ~~[illegible]~~ все наши пары (a,b) которые удовл. $a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8)$.

Рассмотрим $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8$. На плоскости X и Y это точки внутри окружности с центром в (a,b) и радиусом $\sqrt{8}$.

Значит (x,y) удовл. системе если расстояние до ~~[illegible]~~ ближайшей точки (a,b), которая является решением меньше либо равно $\sqrt{8}$. ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~



~~[illegible]~~

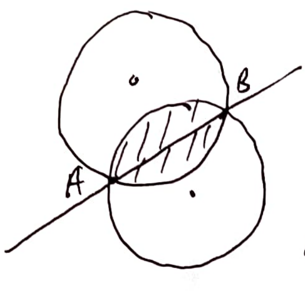
См. след лист. →

Чистовик

3. → продолжение решения

~~Значит, фигура M это множество (x, y), которое удовлетворяет:~~

Найдем площадь нашего „глазика".



Точки пересечения окружностей и прямых совпадают, т.к. центры симметричны относительно прямой и они имеют одинаковый радиус. Просто посчитаем площадь половины глазика и умножим на 2.

Найдем AB.

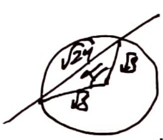
$$\begin{cases}(a^2+b^2)=8\\ b=a+2\end{cases}\quad \begin{cases}a^2+a^2+4a+4=8\\ b=a+2\end{cases}\quad \begin{cases}2a^2+4a-4=0\\ b=a+2\end{cases}\quad \begin{cases}a^2+2a-2=0\\ b=a+2\end{cases}$$

$D=4+8=12 \quad a_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=-1\pm\sqrt{3}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-1-\sqrt{3}\\ b=1-\sqrt{3}\end{cases}\\ \begin{cases}a=-1+\sqrt{3}\\ b=1+\sqrt{3}\end{cases}\end{array}\right.$$ — точки пересечения графиков.

$AB^2=(-1-\sqrt{3}-(-1+\sqrt{3}))^2+(1-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3}))^2$ по т. Пифагора

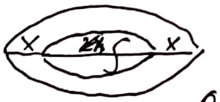
$AB^2=4\cdot3+4\cdot3=24 \Rightarrow AB=\sqrt{24}$.



Найдем α: $24=8+8-2\cdot8\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$ (по т. косинусов)

$\Rightarrow \alpha=\dfrac{2\pi}{3}$. Значит площадь „полуглазика" $S=\dfrac{\pi R^2}{3}-S_\Delta$, где S_Δ − площадь треугольника. $S_\Delta=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}=4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ ($S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$).

$\Rightarrow S=\dfrac{\pi\cdot8}{3}-2\sqrt{3}$. $\Rightarrow S_o=S\cdot2=\dfrac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}$ − площадь глазика.



. Множество решений (x, y) лежат еще на $\sqrt{8}$ дальше глазика, $\Rightarrow$ Они подобны. $k=\dfrac{AB}{AB+2\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{24}+2\sqrt{8}} \Rightarrow S_1=S_o\cdot k^2$.

$$\Rightarrow S_M=\left(\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{24}+2\sqrt{8}}\right)^2=\left(\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}\right)\cdot\frac{6}{14+2\sqrt{48}}$$

Ответ: $S_M=\dfrac{32\pi-24\sqrt{3}}{14+2\sqrt{48}}$.

3.

Чер...

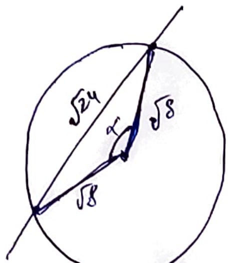
Черновик

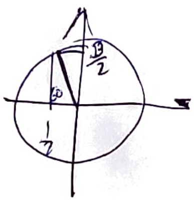
$a^2+b^2=8$

$(a+2)^2+(b-2)^2=8$

$a^2+4a+b^2-4b=0$

$8=4a-4b$





$a^2+b^2=8$

$b=a+2 \qquad a=b-2$

$a^2+a^2+4a+4=8$

$2a^2+4a=4$

$a^2+2a-2=0$

$D=4+8=12$

$a_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=-1\pm\sqrt{3}$

$\Delta=\frac{-1+\sqrt{3}}{\cancel{\pm 2}}-(-1-\sqrt{3})=$

$=-1+\sqrt{3}+1+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$b^2-4b+4+b^2=8$

$2b^2-4b-4=0 \qquad D=4+8=12$

$b^2-2b-2=0 \qquad b_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}=1\pm\sqrt{3}$

$\Delta b=1+\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$

$x^2=4\cdot3+4\cdot3=24$

$x=\sqrt{24}$

$24=8+8-2\cdot8\cos\alpha$

$8=-16\cos\alpha$

$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$

$\alpha=120^\circ \quad \frac{2\pi}{3}$

$\frac{1}{2}\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}\sin120=$

$=4\sin120$

$\sin120$

$\frac{8\pi}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}$

$S=\cancel{8\pi}2+\frac{\cancel{16\pi}}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}\right)\cdot2$

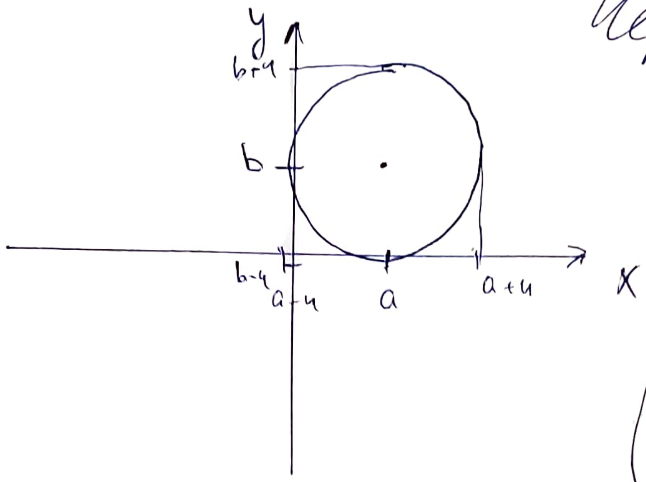
$\frac{24}{24+}$

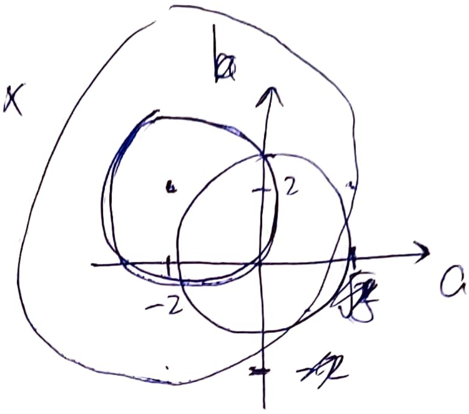
$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{8}}$

$\frac{6}{}$

2

Черновик



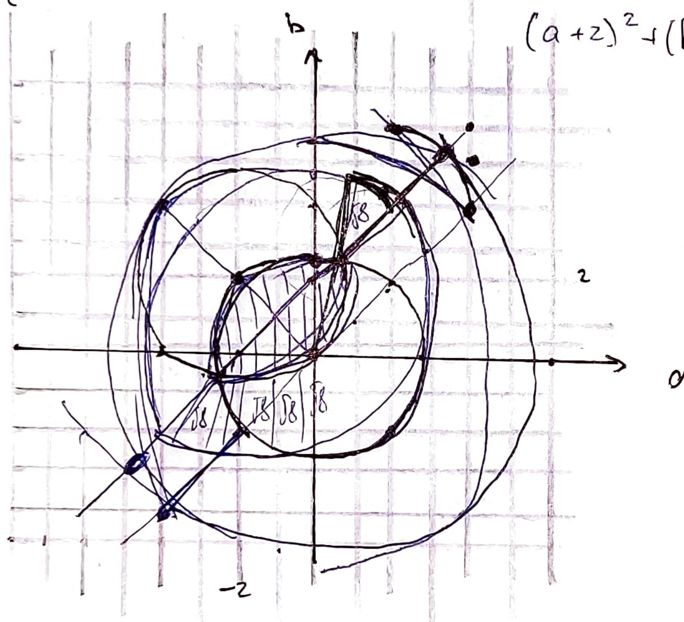


$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le -4a+4b \end{cases}$$

$a^2+4a+4+b^2-4b+4 \le 8$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$

$\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$



$a^2+b^2 \le 8$

$a^2+b^2 \le (2\sqrt{2})^2$

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$1{,}4 \cdot 2 = 2{,}8$

$2{,}8 \cdot 2{,}8$: 224, 56, 784

при $= 4$

$16 \le$

$-4a+4b=0$

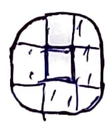
$-4a+4b=0$

1

-1

$4a=4b$

$a=b$



$4 \cdot 1 = 4$

$2 \le$

$b=8$

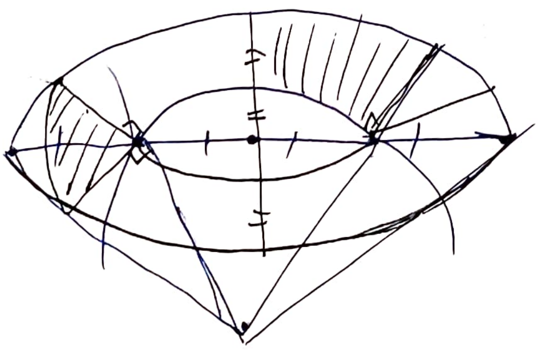
$-4a+4b \ge 8$

$4b \ge 8+4a$

$b \ge 2+a$

$b=2+a$

$p\sqrt{8}$



$d=2x$

$d=4x$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100889**

ID профиля: **825427**

Вариант 23

Чистовик.

5. Возьмем их произведение:

$$\log_{\sqrt{x+34}} 2x+23 \cdot \log_{(x+4)^2}(x+34) \cdot \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) =$$

$$= \frac{2\log_{2x+23} -x-4}{\log_{2x+23}\sqrt{x+34}} \cdot \log_{(x+4)^2}(x+34) = 2\log_{\sqrt{x+34}}(-x-4) \cdot \frac{1}{\log_{\sqrt{x+34}}(x+4)^2} =$$

$$= 4\log_{(x+4)^2}(-x-4).$$

ОДЗ:

$x+34>0$; $2x+23>0$; $-x-4>0$ $\Rightarrow x \in (-11{,}5; -4)$ — ОДЗ.

$x>-34$ $\quad 2x>-23$ $\quad x<-4$

$x+34 \neq 1$

$x \neq -33$ $\quad x>-11{,}5$

На ОДЗ $4\log_{(x+4)^2}(-x-4) = 4\cdot\frac{1}{2} = 2$

т.к. два числа равны, а одно больше их на 1, то

$a^2(a+1)=2.$

Если $a<-1$, то $a^2>0$, $(a+1)<0 \Rightarrow a^2(a+1)<0$, тогда $2>0$.

Если $-1 \leq a \leq 0$, то $\cancel{a^2 \geq 0}$ $0 \leq a^2 \leq 1$, $0 \leq (a+1) \leq 1$,

Значит $a^2(a+1)$ меньше 1, то не 2.

$\Rightarrow a>0$. Если $a<1$, то $a^2<1$, $a+1<2$, $\Rightarrow a^2(a+1)<2$.

Значит, $a=1$. Если $a>1$, то $a^2>1$, $(a+1)>2 \Rightarrow a^2(a+1)>2$.

~~Допустим, что $\log_{\sqrt{x+34}} 2x+23 = 1 \Rightarrow x+34 = (2x+23)^2 = 4x^2+92x+529$~~

~~$4x^2+91x+495=0$ $D=45^2-4\cdot4\cdot495 = 45\cdot45-16\cdot495<0$.~~

~~Значит, $\log_{\sqrt{x+34}} 2x+23 \neq 1$~~ Допустим, что $\log_{(x+4)^2}(x+34)=1$.

$(x+4)^2 = x+34 \Rightarrow x^2+8x+16=x+34 \Rightarrow x^2+7x-18=0$ $D=49+72=121$.

$x_1=\frac{-7+11}{2}=2$, $x_2=\frac{-18}{2}=-9$. $x\neq2$ (ОДЗ) $\Rightarrow x=-9$.

Проверим для $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) \overset{\boxed{x=-9}}{\Rightarrow} \log_{\sqrt{5}} 5 = 2$. Значит, $\log_{\sqrt{x+34}} 2x+23 \overset{x=-9}{\Rightarrow}$

$\log_{\sqrt{25}} 5 = 1$. Подходит. Для $x=-9$.

См. след. стр. →

Чистовик.

5. Продолжение →

Допустим, что $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=1$

$\sqrt{2x+23} = -x-4 \Rightarrow 2x+23 = x^2+8x+16 \Rightarrow x^2+6x-7=0$

$D = 36+28 = 64$ $\quad x_1 = \frac{-6+8}{2} = 1$, $x_2 = \frac{-14}{2} = -7$; $x \neq 1$ (ОДЗ)

Проверим для $\log_{(x+4)^2}(x+34) \overset{x=-7}{=} \log_9 27$ — не подходит.

Проверим для $\log_{\sqrt{x+34}} 2x+23 \overset{x=-7}{=} \log_{\sqrt{27}} 9$ — не подходит.

Значит, $\log_{(x+4)^2}(x+34)=1$, только при $x=-9$ — подходит.

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=1$, только при $x=-7$ — не подходит.

Т.к. нам минимум есть 2 единицы, то $\log_{\sqrt{x+34}} 2x+23 = 1$ — можно не проверять.

Ответ: При $x=-9$

4.

Чистовик

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c)=22 \\ \text{НОК}(a,b,c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=22 \\ \dfrac{abc}{\text{НОД}(a;b;c)}=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{НОД}(a,b,c)=22 \\ abc=2^{17}\cdot 11^{20} \end{cases}$$

Т.к. a, b и c содержат 22 в множителях и 22 - НОД, то никто из a, b и c не содержит общих множителей (если поделить a, b, c на 22), кроме 1. Давайте сократим a, b и c на 22. Тогда $abc=\dfrac{2^{17}\cdot 11^{20}}{2^3\cdot 11^3}=2^{14}\cdot 11^{17}$ и НОД $(a,b,c)=1$.

Посчитаем кол-во способов распределить 2.

a	b	c
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
~~1~~	~~1~~	~~1~~

— 6 способов (где 1 - есть двойка, а если 0 - двойки нет) в множителях.

Для

a	b	c
0	0	1
0	1	0
1	0	0

— по одному способу - 2^{14}, т.е. 3 в сумме.

Для

a	b	c
0	1	1
1	0	1
1	1	0

— от 2^1 до 2^{13} для каждого, т.е в сумме $13\cdot 3=39$ способов.

Значит, всего $39+3=42$ - способа распределить степени 2 по множителям a, b, c, где НОД $(a,b,c)=1$.

Посчитаем, кол-во способов распределить 11.

Аналогично, для

a	b	c
0	0	1
0	1	0
1	0	0

— по одному способу - 11^{17} - для каждого - 3 способа.

Для

a	b	c
0	1	1
1	0	1
1	1	0

— от 2^1 до 2^{16} для каждого, т.е. в сумме $16\cdot 3=48$ способов

Значит, всего $48+3=51$ - способов распределить степени 11 по множителям a, b, c где НОД$(a,b,c)=1$.

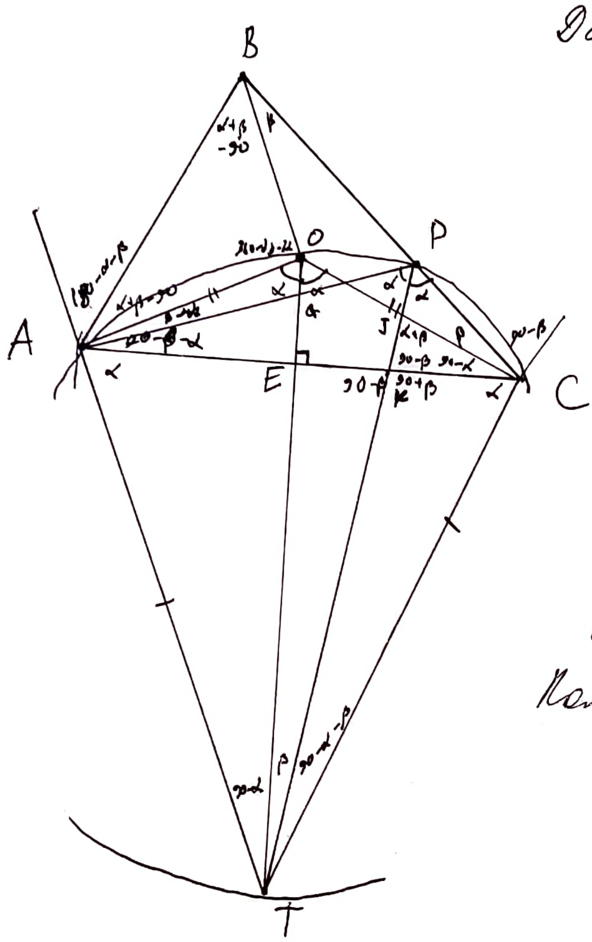
Следовательно, в сумме способов $51\cdot 42=2142$ (для 2 и 11).

Ответ: 2142 троек.

3.

Чистовик

6.



Дано: $S_{APK} = 15$

$S_{CPK} = 13$

1) $AO = OC$ (ABC - вписанный, O - центр)

2) $AT = TC$ (AT и CT - касательные)

3) $\angle OAT = \angle OCT$ (AT и CT - кас.)

⇓

$\triangle AOT = \triangle OCT$

Отметим пересечение AC и OT за E.

⇒ $OT \perp AC$.

Посчитаем углы.

Получим, что $\triangle APK \sim \triangle TKC$

$\triangle KPC \sim \triangle AKT$

$\triangle AOG \sim \triangle PJC$, где G - перес. OE и AP и J - перес OC и PT.

т.к. $\angle AOT = \angle APT$ и $\angle TOC = \angle TPC$.

⇒ $S_{\triangle AOC} = 15 + 13 = 28$.

⇒ $S_{тр} = 28 \cdot 3 = 84$.

Ответ: $S = 84$

4.