Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100836**

ID профиля: **278698**

Вариант 23

Чистовик Математика, 11 кл

№1

Пусть a_1 - первый член прогрессии, d - разность

$a_{10} = a_1 + 9d$, $a_{16} = a_1 + 15d$, $a_{11} = a_1 + 10d$, $a_{15} = a_1 + 14d$

$$\begin{cases}(a_1+9d)(a_1+15d) > S+39 \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < S+55\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1^2+24a_1d+135d^2 > S+39 \\ S+55 > a_1^2+24a_1d+140d^2\end{cases}$$

Просуммируем неравенства:

$$a_1^2+24a_1d+135d^2+S+55 > S+39+a_1^2+24a_1d+140d^2$$

$5d^2 < 16 \Leftrightarrow d^2 < \frac{16}{5}$ - единственное целое положительное d, удовлетворяющее условию, это $d=1$

$$S = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 = 6a_1+15d$$

Если $d=1$, то:

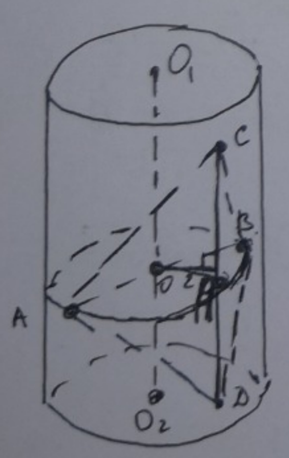
$$\begin{cases}a_1^2+24a_1+135 > 6a_1+15+39 \\ a_1^2+24a_1+140 < 6a_1+15+55\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1^2+18a_1+81 > 0 \\ a_1^2+18a_1+70 < 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(a_1+9)^2 > 0 \\ (a_1+9)^2 < 11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1 \neq -9 \\ -9-\sqrt{11} < a_1 < \sqrt{11}-9\end{cases}$$ - целые a_1, удовлетворяющие этому условию, это $-12, -11, -10, -8, -7, -6$

Ответ: $-12, -11, -10, -8, -7, -6$

№2. Т.к. треугольники ABD и ABC равнобедренные и CD параллельно оси цилиндра, AB параллельно основанию цилиндра. Тогда радиус цилиндра будет наименьшим, если AB будет пересекать ось цилиндра

$r = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$. $O_1O_2 \cap AB = O$



проведем из точки O перпендикуляр OH к CD. $OH = r = 2$. $AH = \sqrt{AO^2+HO^2} = 2\sqrt{2}$

(CD принадлежит боковой поверхности)

$HD = \sqrt{AD^2-AH^2} = \sqrt{7^2-(2\sqrt{2})^2} = \sqrt{41}$. $CD = \sqrt{AC^2-AH^2} = \sqrt{6^2-(2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{7}$ это же Пифагора:

$$CD = CH + HD = \sqrt{41} + 2\sqrt{7}$$

Ответ: $\sqrt{41} + 2\sqrt{7}$

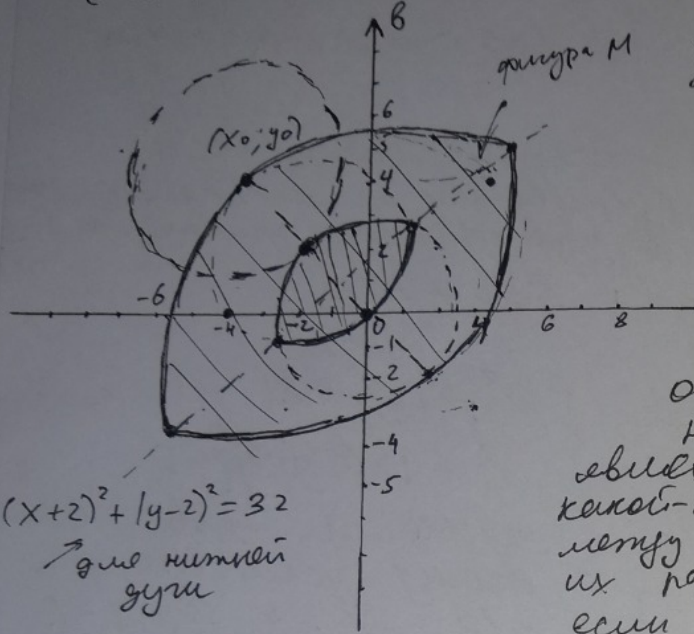
1

21100836 (U278698 M1300349)

№3. Если a^2+b^2 меньше минимального значения $(-4a+4b, 8)$, то это выражение меньше обоих чисел:

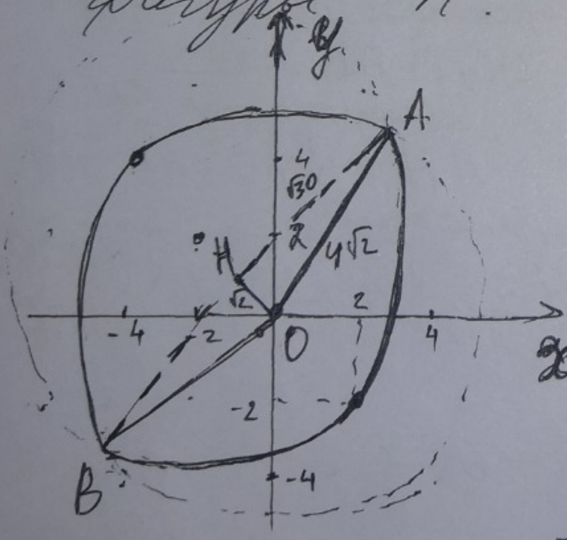
$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le -4a+4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 8 \\ (a+2)^2+(b-2)^2 \le 8 \end{cases}$$

— изобразим данную область на координатной плоскости Oab:



это область, ограниченная двумя дугами окружностей с радиусами $2\sqrt{2}$

Фигура M состоит из точек $(x;y)$ таких, что существует a и b удовлетворяющих условиям — то есть нужны такие $(x;y)$, что ~~окруж~~ круг, определяемый уравнением $(a-x)^2+(b-y)^2 \le 8$ имеет хотя бы одну общую точку с данной областью на рисунке. Граничным случаем является тот, когда круг касается какой-то из дуг, т.е расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов. $x^2+y^2=(2\sqrt{2}+2\sqrt{2})^2=32$ — если касается верхней дуги. Получаем, что все точки, на которых лежат центры окружностей, касающихся данной области — это дуги окружностей с радиусами $4\sqrt{2}$. Если центры окружностей (т.е точки $(x;y)$) будут внутри данной области, то найдется $(a;b)$ больше одного — значит и внутренние точки принадлежат фигуре M. Найдем площадь фигуры M:



$AO = R = 4\sqrt{2}$, $OH = \sqrt{2}$

$AH = \sqrt{AO^2 - OH^2} = \sqrt{30}$

$\cos\angle AOH = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$

~~S_{AOB}~~

$\cos\angle AOB = 2\cos^2\angle AOH - 1 = \frac{2}{16} - 1 = -\frac{7}{8}$

$S_{AOB} = OH \cdot AH = \sqrt{30}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{15}$

$$S_M = 2\left(\frac{\arccos(-\frac{7}{8})}{2\pi}\cdot\pi\cdot(4\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{15}\right) = 2\left(\left(\pi - \arccos\frac{7}{8}\right)\cdot 16 - 2\sqrt{15}\right) = 32\left(\pi - \arccos\frac{7}{8}\right) - 4\sqrt{15}$$

Ответ: $32\left(\pi - \arccos\frac{7}{8}\right) - 4\sqrt{15}$

2

Черновик $\frac{2a+5d}{2}\cdot 6$

$S = a_1 + a_2 + \dots a_6 = 6a_1 + 15d$

$a_{10} a_{16} \geq S + 39$ $\quad a_{11} a_{15} < S + 55$ $(a+10)(a+14) < 6a_1 + 70$

$a_{10} = a_1 + 9d$ $\quad a_{11} = a_1 + 10d$ $\quad a^2 + 24a + 140 < 6a_1 + 70$

$a_{16} = a_1 + 15d$ $\quad a_{15} = a_1 + 14d$ $\quad 90+45$ $\quad a^2 + 18a + 70 < 0$

$(a_1 + 9d)(a_1 + 15d) > 6a_1 + 15d + 39$ $\quad 15 + 39 = = 54$

$a_1^2 + 24da_1 + 135d^2 > 6a_1 + 15d + 39$

$\cancel{a_1^2}$ $+$

$-a_1^2 - 24a_1d - 140d^2 \cancel{>} -55 - 6a_1 - 15d$

$5d^2 > 16$

$-5d^2 > 39 - 55$

$d^2 \cancel{<} \frac{16}{5} = 3{,}2$ $\quad \frac{4}{5}$ $\quad d = 1$

ед. подходящей

1) $(a_1 + 9)(a_1 + 15) > 6a_1 + 54$ $\quad 135 - 54 = 8$

$a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 54$ $\quad 2 \cdot 35$

$a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0$ $\quad 70 = 14 \cdot 5$

$(a+9)^2 > 0$ $\quad a \neq -9$ $\quad 7 \cdot 10$ $\quad 70$

$32 \times 32 = 64 + 96 = 1024$

2) $a_1^2 + 24a_1 + 140 \cancel{<} 55 + 6a_1 + 15$ $\quad +81-11$

$a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0$ $\quad \sqrt{11} \approx 3{,}3$ Ответ

$(a+9)^2 < 11$ $\quad 3{,}3 - 9$

$a \in [-12; -5] / -9$

$-9 - \sqrt{11} < a < \sqrt{11} - 9$

$-12{,}3 < a < -5{,}4$

Это

21100836 (U278698 M1300349)

Черновик

$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-4b, 8) \end{cases}$ ~~80~~ 30

$\begin{cases} a^2+b^2 \le 8 \quad (2\sqrt{2})^2 \\ a^2+b^2+4a+4b \le 0 \end{cases}$

$(a+2)^2+(b+2)^2 \le 8$

M состоит из точек $x;y$ таких, что существует $a;b$, уд. условию выше

$(70-a)^2 \; (80-b)^2 \le 8$ $2\sqrt{2} > 2$

при каких $x;y$ a и b будут

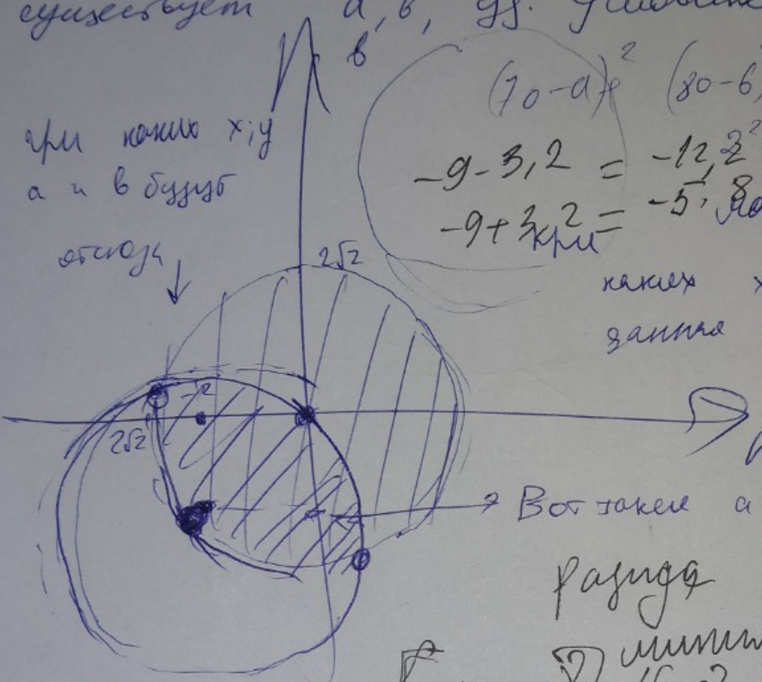
отсюда

$-9-3,2 = -12,2$ $2^2+2^2 = 2\cdot 2^2$

$-9+3,2 = -5,8$ Макс значение достигается при каких $x;y$

$(b-x)^2+(a-y)^2 \le 8$

данная окружность будет иметь хотя бы одну от. точку из данной области?



Вот такие a и b можно брать

радиус $2\sqrt{2} \approx 2\cdot 1,4 \approx 2,8$

минимальный

$[-12; -6] \setminus \{-9\}$

$AB=4$ $AC=CB=6$

CD || оси цилиндра

CD – ? $-6 < \sqrt{11}-9$

$3<\sqrt{11}$ 5,3

$-5 > \sqrt{11}-9$

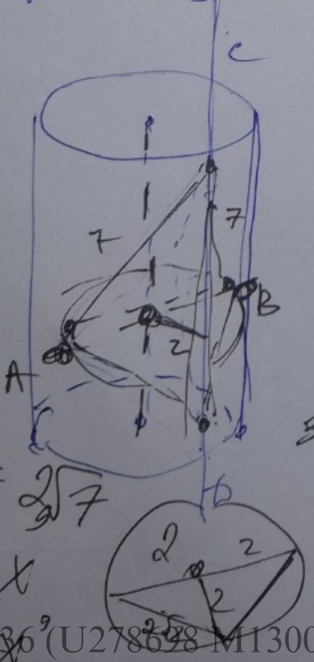
$AD=DB=7$

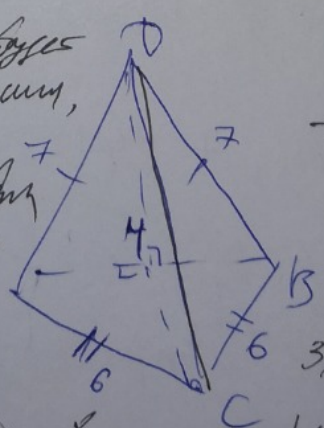
Все вершины на бок. поверхности

$4 > \sqrt{11}$

$CD \in$ бок. пов.

радиус будет наименьшим, если ABC лежит в плоскости основания





$-9-3,3$

$\sqrt{11} < 3,4$

$\sqrt{11}-9 > -6$

$3,3-9$

$-5,7$

-5

$3,4-3$

$\sqrt{11}-9 < -5$

$-5 > \sqrt{11}-9$

$4 > \sqrt{11}$

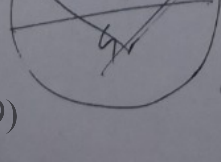
$49-8$

$2^2+2^2=8$

$36-8 =$

$= 28 = 2\sqrt{7}$

$36-9 = 27$



$49-x$

$36-x$

$r=2$

$\sqrt{49-8}$ $\sqrt{36-8}$ $\sqrt{28}$ $2\sqrt{7}$

41,3

21100836 (U278698 M1300349)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100836**

ID профиля: **278698**

Вариант 23

№4.

1. Если и НОД, и НОК состоит только из степеней 2 и 11, то и числа a, b, c состоят из степеней 2 и 11 (причем хотя бы одна 2 и 11 должны быть)
2. Хотя бы в одном числе в разложении на простые множители 2 в 1 степени, и хотя бы в одном числе 11 в 1 степени (иначе НОД был бы больше 22)
3. Хотя бы в одном числе в разложении на простые множители 2 в 16 степени и хотя бы в одном числе 11 в 19 степени (иначе НОК был бы другим)
4. В каждом числе a, b, c степени 2 и 11 не превышают 16 и 19 соответственно

Исходя из вышесказанного, число троек чисел (a, b, c) равно:

число вариантов выбрать, в каком числе 2^1, в каком 2^{16}

количество чисел, которое можно выбрать в оставшейся двойке

$$6\cdot 16\cdot 6\cdot 19 = 36\cdot 16\cdot 19 = 576\cdot 19 = 10944$$

количество чисел, которое можно выбрать в оставшейся 11

число вариантов выбрать, в каком числе 11^1, в каком 11^{19}

Ответ: 10944

№5. Пусть $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=a$, $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=b$,

~~log~~ $\log_{(x+4)^2}(x+34)=c$

$$abc = \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)\cdot\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)\cdot\log_{(x+4)^2}(x+34) =$$

$$= \frac{\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)}{\log_{\sqrt{x+34}}(-x-4)}\cdot\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = \frac{\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)}{\log_{(2x+23)}(-x-4)} =$$

$$= 2\,\frac{\log_{(2x+23)}(-x-4)}{\log_{(2x+23)}(-x-4)} = 2$$

ОДЗ: $-11{,}5<x<-4$

(Отсюда $\sqrt{(x+4)^2} = -x-4$)

1

Чистовик Математика, 11 кл

По условию, $a = b$, $c = a+1$. т.е

$a \cdot a(a+1) = 2 \Leftrightarrow a^3 + a^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (a-1)(a^2+2a+2)=0 \Leftrightarrow$

$(a-1)((a+1)^2+1)=0$ – единственное решение этого уравнения $a=1$, ($b=a=1$, $c=2$)

Рассмотрим 3 возможных случая:

1) $\begin{cases} \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=1 \\ \log_{(x+4)^2}(x+34)=1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+34} = 2x+23 = -x-4$

$3x = -27 \Leftrightarrow x = -9$ – этот корень подходит

($\log_{\sqrt{25}}5 = \log_{5^2}25 = 1$, $\log_{\sqrt{25}}25 = 2 = 1+1$)

2) $\begin{cases} \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=1 \\ \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=1 \end{cases}$ $2x+23 = x^2+4x+4 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 20 \Leftrightarrow$

$x = -1 \pm 2\sqrt{5}$ – оба эти корня не подходят (нет равенства в 1 уравнении

3) $\begin{cases} \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=1 \\ \log_{(x+4)^2}(x+34)=1 \end{cases}$ $-x-4 = \sqrt{2x+23} = \sqrt{x+34}$

$2x+23 = x+34$, $x = 11$ – не подходит под ОДЗ

Условию задачи удовлетворяет только корень $x=-9$

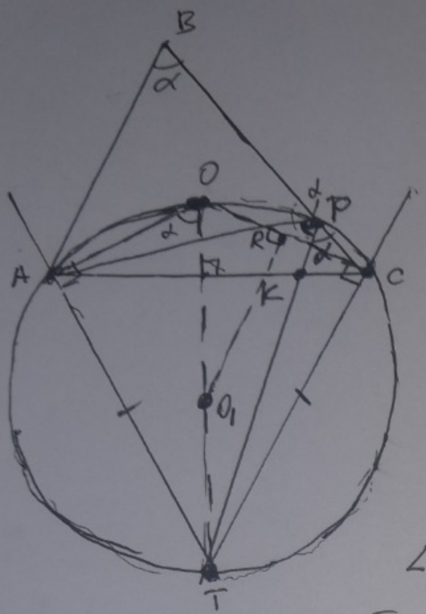
Ответ: -9

2

Чистовик Математика, 11 кл

N 6.

а)



Проведем ~~се~~ серединный перпендикуляр RO_1 от отрезка OC, где O_1 – центр описанной вокруг AOC окружности

$CT \perp OC$ (касательная), $OR \perp OC$, $OR = RC$ $\Rightarrow$ по т-е Фалесса ~~O_1R~~ $OO_1 = O_1T \Rightarrow$

T принадлежит окружности.

Пусть $\angle AOT = \alpha$. тогда $\angle AOC = 2\alpha$, $\angle ABC$ как вписанный равен $\frac{\angle AOC}{2} = \alpha$

~~AT = CT (касательные из одной точки)~~

$\angle AOT = \angle APT = \alpha$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу)

$\angle BPT = 180^\circ - \alpha$

$AT = CT \Rightarrow PT$ - биссектриса $\angle APC \Rightarrow$

$\angle ABP + \angle BPT = \alpha + 180^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow AB \parallel PT \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CPK$ (по двум углам)

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CPK}} = k^2 = \left(\frac{AC}{CK}\right)^2 = \left(\frac{15+13}{13}\right)^2 = \frac{28^2}{13^2} \quad \left(\frac{AK}{CK} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{15}{13}\right)$$

$$S_{ABC} = \frac{28^2}{13^2} S_{CPK} = \frac{28^2}{13^2} \cdot 13 = \frac{28^2}{13} = \frac{784}{13}$$

б) PK – биссектриса $\Rightarrow \frac{AP}{CP} = \frac{15}{13}$. Пусть $AP = 15y$, $CP = 13y$ $\quad tg\,\alpha = \frac{4}{7} \Rightarrow$

$S_{APC} = \frac{1}{2} 15y \cdot 13y \cdot \sin 2\alpha = 15 + 13 = 28$.

$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}$, $\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{65}}$, $\quad \sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{65}} \cdot \frac{7}{\sqrt{65}} = \frac{56}{65}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{56}{65} \cdot 15 \cdot 13 y^2 = 28 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $AP = \frac{15}{\sqrt{3}}$, $CP = \frac{13}{\sqrt{3}}$

$\cos 2\alpha = \left(\frac{7}{\sqrt{65}}\right)^2 - \left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right)^2 = \frac{33}{65}$

По т-е косинусов: $AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP \cdot PC \cdot \cos 2\alpha$

$$AC^2 = \frac{15^2}{3} + \frac{13^2}{3} - 2 \cdot \frac{15 \cdot 13}{3} \cdot \frac{33}{65}$$

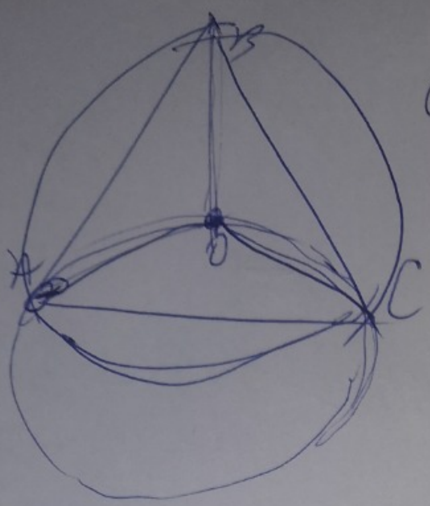
$$AC^2 = \frac{196}{3}; \quad AC = \frac{14}{\sqrt{3}} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

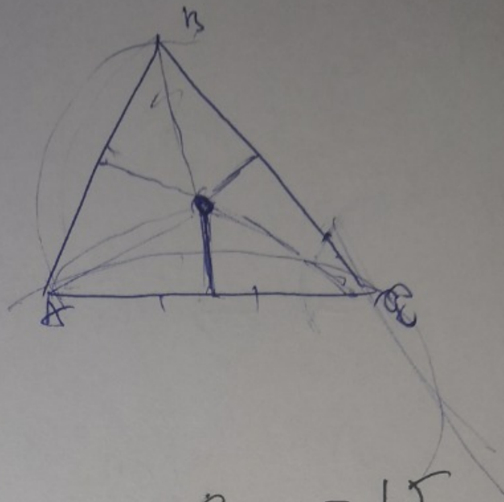
Ответ: а) $\frac{784}{13}$; б) $\frac{14\sqrt{3}}{3}$

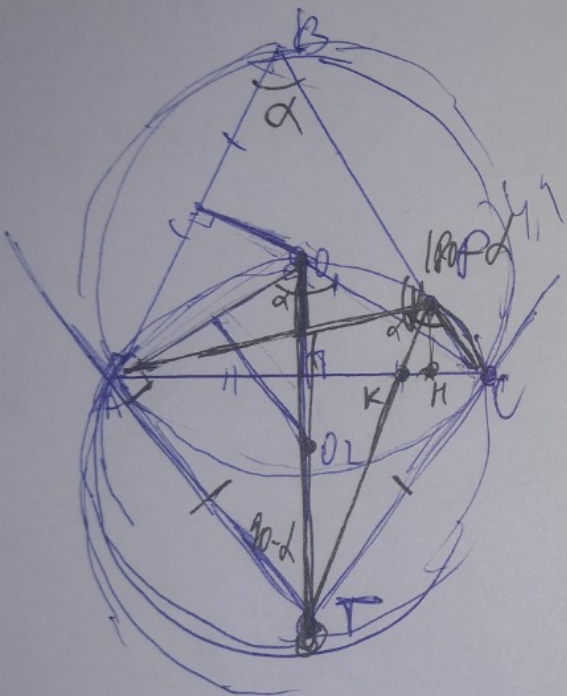
3

21100836 (U278698 M1300350)

Черновик





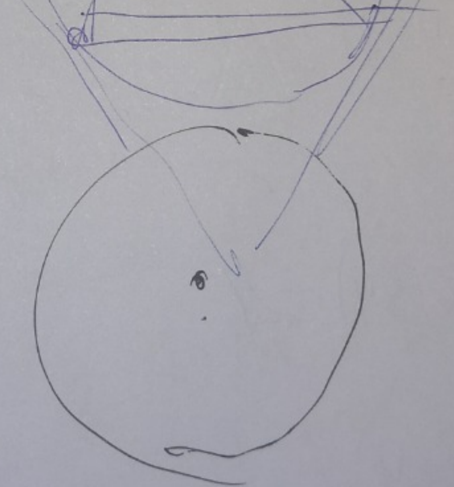


$S_{ABK} = 15$

$S_{CPK} = 13$

$S_{ABC} - ?$

$\frac{S_{CPK}}{S_{ABK}} = \frac{AK}{CK} = \frac{15}{13}$



Черновик

$\log_{5} 5$

$\log_{(-5)^2} 25$

$x = 1,\ y = 1,\ z = 2$

5 вариант:

1. $\log_{\sqrt{x+34}} 2x+23 = 1$, $2x+23 = \sqrt{x+34}$ $x+4$

$\log_{(x+4)^2}(x+34) = 1$, $\sqrt{x+34} = -x-4$

$2x+23 = -x-4 \Rightarrow$ $x = \cancel{-21}$ ~~по ОДЗ~~ не подходит

$3x = -27,\ x = -9$ подходит

2. $\log_{\sqrt{2x+2}}(-x-4) = \log_{\sqrt{5}} 5 = 2$ $-11{,}5 < x < -4$

$\sqrt{5} \approx 2{,}2$

2. $\log_{\sqrt{x+34}} 2x+23 = 1$ $2x+23 = \sqrt{x+34}$ $1 - 4{,}4 = -3{,}4$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = 1$ $2x+23 = (x+4)^2$

$\log_{(x+4)^2}(x+34) = 2$

$x^2+4x+4 = 2x+23$

$x^2+2x-19 = 0$ $2{,}2 \cdot 2$

$(x+1)^2 = 20$

$x = 1 \pm \sqrt{20}$ – по ОДЗ

3. $\log_{(x+1)^2}(x+34) = 4$ подход $1 - 2\sqrt{5}$ не прох. ОДЗ

$1 - 2\sqrt{5} > -4$

$\log_{\sqrt{2x+3}}(x-4) = 1$ $1 \pm 2\sqrt{5}$ $5 > 2\sqrt{5}$

$2\sqrt{5} \approx 3{,}1$

$-1-2\sqrt{5} < -4$ $4 \cdot 23$

$-x-4 = \sqrt{x+34} = \sqrt{2x+23}$ 92

$27+23$ $3 \vee 2\sqrt{5}$

$x+34 = 2x+23$ $9 \vee 4$ $-1-2\sqrt{5}$

$x+34 = 4x^2+92x+23^2$

$x = 11$ – по ОДЗ не подходит $x+34 = 4x^2+92x+23^2$

ответ: $x = -9$

21100836 (U278698 M1300350)

Черновик.

2^{2-10} 11^{1-19} 2^{2-16} 11^{1-8} ...

2^{1-16} 11^{2-19}

2^{1-15} 11^{1-19} 2^{1-15} 11^{1-18} 1-18

$2^x 11^y$ $2^{18} 11^9$ $2^k \cdot 11^m$

a 1-16 в c

выберем, куда 1, куда 16
выборов, куда 1, куда 19

3,4

$6^2 \cdot 16 \cdot 6 \cdot 19 =$

$= 36 \cdot 16 \cdot 19$

$xyz = 2$

$x = y$ $z = y+1$

$x \cdot x(x+1) = 2$

$x^3 + x^2 - 2 = 0$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 16 \\ \hline 216 \\ 36 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 576 \\ \times 19 \\ \hline 5184 \\ + 576 \\ \hline 10944 \end{array}$$ – ответ

63
45

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$ $\log_a b^2$ $\dfrac{\log_c a^2}{\log_c a}$ $\log_c a = \log_a b^2$

$\log_{(x+4)^2}(x+34)$ $\log_{c^2} a^2 =$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$ $\log_b c$

ОДЗ:

$x > -\dfrac{23}{2} = -11,5$

$-x < 4 + 40$

$-11,5 < x < -4$

$\log_a b^2 = \log_{c^2} a^2$

$x = 1$ $y = 1$ $z = 2$

$x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x + 2x - 2 = 0$

$(x-1)(x^2 + 2x + 2) = 0$

21100836 (U278698 M1300350)

Черновик

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 22 = 2\cdot 11 \\ НОК(a;b;c) = 2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

наиб. общий делитель

22 22·11 22·2

22·11·2

наим. общее кратное

$a = 22k$

$b = 22n$

$c = 22m$

2^{16} какое-то число точно должно содержать

2^{16}; $11^{19}k$

$2^{16}\cdot 11^{19} = ax = by = cz$

все числа вида $2^x\cdot 11^y$ (иначе НОД и НОК были бы другие)

$2^x\cdot 11^y = a$ $b = 2^t\cdot 11^g$ $c = 2^k\cdot 11^m$ все остальные больше или равные

какое-то из $x, t, k = 1$

какое-то из $g, y, m = 1$

Сколько таких способов?

$2^1\cdot 11^y$ $2^t\cdot 2^s$ $2^k\cdot 11^{f}$ $2\cdot 11^x$ $2^t\cdot 11^g$ $2^k\cdot 11$

НОК $2^{16}\cdot 11^{19}$ → какое-то равно 16, какое-то 19, все остальные меньше или равн

$2^{1-16}\cdot 11^{1-19}$ $2^{1-16}\cdot 11^{1-19}$ $2^{1-16}\cdot 11^{1-19}$

Исключаем другие без единицы, или без 19 и 16

$-11{,}5<x<-4$

2^{2-16} 11^{2-19} 2^{2-16} 11^{2-19} 2^{2-16} 11^{2-19}

$2^{1-16}\cdot 11^{1-18}$

$\log_{a^2} b^2$

$\log_{5^7}5 : \log_{2^{35}}$

$\log_c a$

$\log_b c$

$\log_a b^2 = \log_c a$

$\log_b c - \log_c a = 1$

$\log_a b^2 \cdot \log_a c = 1$

$\log_a b^2 \cdot \log_c a \cdot \log_b c =$

$= \log_a b^2 \cdot \log_b a = 2$

21100836 (U278698 M1300350)