Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100626**

ID профиля: **89433**

Вариант 23

Чистовик

Задача N 1

1) Пусть разность прогрессии — d. Заметим, что d - натуральное, так как прогрессия возрастает и состоит из целых чисел.

$a_n = a_1 + d(n-1)$ - формула n-го члена

2) $\begin{cases} a_{10}a_{16} > S+39 \\ a_{11}a_{15} < S+55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_{10}a_{16} < -S-39 \\ a_{11}a_{15} < S+55 \end{cases} \Rightarrow a_{11}a_{15} - a_{10}a_{16} < 55-39$

Тогда $(a_1+10d)(a_1+14d) - (a_1+9d)(a_1+15d) < 16$

$$\underline{a_1^2} + \underline{\underline{24a_1d}} + 140d^2 - \underline{a_1^2} - \underline{\underline{24a_1d}} - 135d^2 < 16$$

$$5d^2 < 16$$

$$d^2 < \frac{16}{5}$$

$$\text{т.к. } d \in \mathbb{N} \text{ то } 0 < d < \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Оценим $\frac{4}{\sqrt{5}}$: $\frac{4}{\sqrt{5}} < 2 \Leftrightarrow 4 < 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 2 < \sqrt{5} \Leftrightarrow 4 < 5$

Следовательно $d < 2$, т.к. $d \in \mathbb{N}$, то $d = 1$.

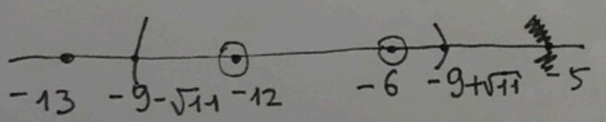
3) $S = \frac{a_1 + a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = 6a_1 + 15d = 6a_1 + 15$

Подставим $d=1$ в систему неравенств:

$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 15 + 39 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 15 + 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \\ a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1+9)^2 > 0 \\ (a_1+9)^2 - 11 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -9 \\ a_1 \in (-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11}) \end{cases}$

$-9-\sqrt{11} > -13$	$-9-\sqrt{11} < -12$	$-9+\sqrt{11} > -6$	$-9+\sqrt{11} < -5$
$\Updownarrow$	$3 < \sqrt{11}$	$\sqrt{11} > 3$	$\sqrt{11} < 4$
$4 > \sqrt{11}$	$9 < 11$	$11 > 9$	$11 < 16$
$16 > 11$			



Т.к. a_1 - целое, то $a_1 = -12; -11; -10; -8; -7; -6$

$\boxed{\text{Ответ: } -12; -11; -10; -8; -7; -6}$

1

Чистовик

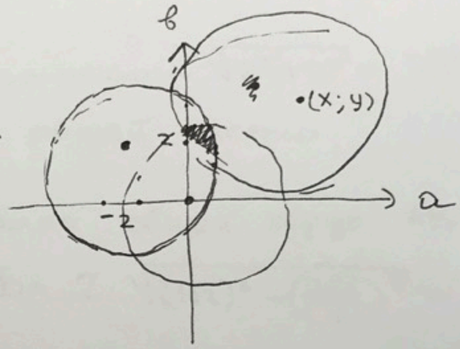
Задача №3

Чтобы понять, какие точки $(x;y)$ принадлежат фигуре М, необходимо узнать, когда система имеет решения $(a;b)$ при фиксированных (параметрах) x и y.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le \min(-4a+4b,\ 8)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 8\\ a^2+b^2\le -4a+4b\\ a^2+b^2\le 8\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 8 & (1)\\ (a+2)^2+(b-2)^2\le 8 & (2)\\ a^2+b^2\le 8 & (3)\end{cases}$$

Это три круга с радиусами $2\sqrt{2}$ в системе координат $(a;b)$.



Эта система имеет решения тогда и только тогда, когда три данных круга имеют хотя бы одну общую точку, то есть расстояния между их центрами не превосходит сумму их радиусов.

Координаты центров: (1) $a=x;\ b=y$

(2) $a=-2;\ b=2$

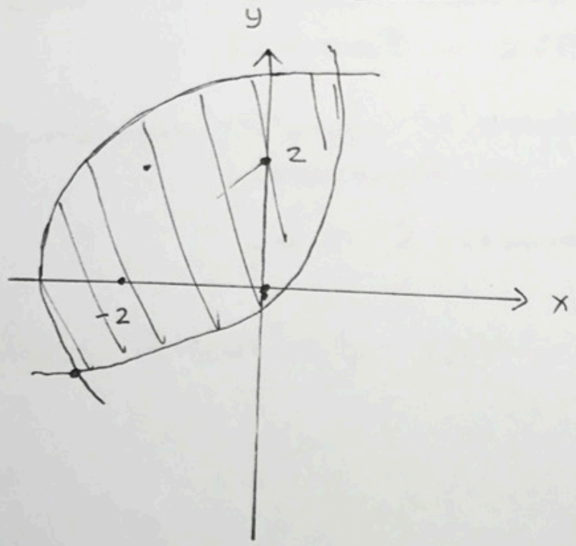
(3) $a=0;\ b=0$

тогда:
$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\le 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\\ \sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}\le 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\\ \sqrt{2^2+2^2}\le 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2\le 32\\ (x+2)^2+(y-2)^2\le 32\\ 8\le 32\end{cases}$$

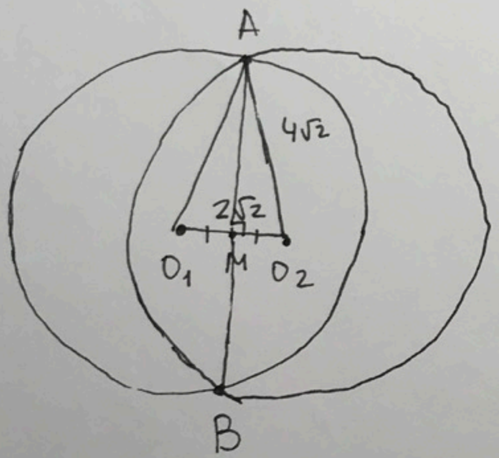
То есть фигура М ~~принадлежат~~ Это ~~\[зачёркнуто\]~~ общие точки двух кругов с радиусами $4\sqrt{2}$ и центрами $(0;0)$ и $(-2;2)$

$\boxed{\text{Чистовик}}$

Задача №3 (продолжение)



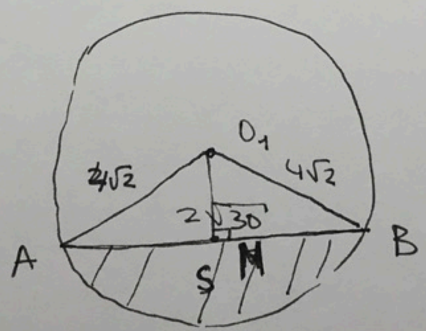
Зная расстояние между центрами — $\sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$ и радиусы, находим площадь общей части:



Длина общей хорды AB:

$$AB = 2\cdot\sqrt{(4\sqrt{2})^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{30}$$

Найдем площадь сегмента, ограниченного хордой AB:



M — середина AB $\Rightarrow O_1M \perp AB$

1) O_1M (расстояние от O_1 до AB) = половине расстояния м/у O_1 и O_2 $= \frac{O_1O_2}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow S_{\triangle AO_1B} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{30} = 2\sqrt{15}$

~~Площадь сектора:~~ $\sin\angle AO_1M = \frac{\sqrt{30}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\cos\angle AO_1M = \frac{1}{4}$

S сектора: $\frac{2\arccos\frac{1}{4}}{2\pi}\cdot\pi\cdot 32 = 32\arccos\frac{1}{4}$

Черновик

Чистовик

Задача N3
(конец)

Следовательно, $S_{\text{сегмента}} = S_{\text{сектора}} - S_{\triangle AO_1B} = 32 \arccos\frac{1}{4} - 2\sqrt{15}$

~~Площадь фигуры~~ Фигура M состоит из двух таких сегментов $\Rightarrow$

$$S_M = 2S_{\text{сегмента}} = 64\arccos\frac{1}{4} - 4\sqrt{15}$$

Ответ: $64\arccos\frac{1}{4} - 4\sqrt{15}$

4

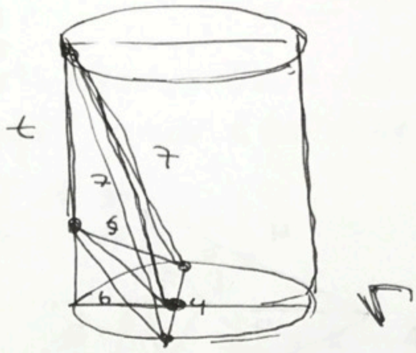
21100626 (U89433 M1301780)

Черновик

$(x-a)^2+(y-b)^2 \geq 8$

a^2+b^2

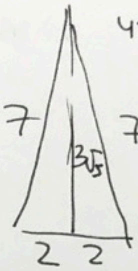
$a^2+b^2 \leq -4a+4b$



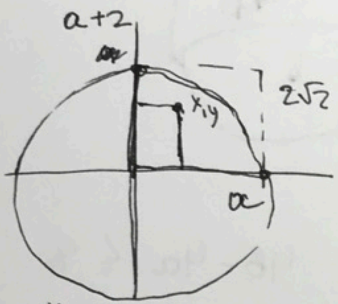
$(a-b) \leq 2$

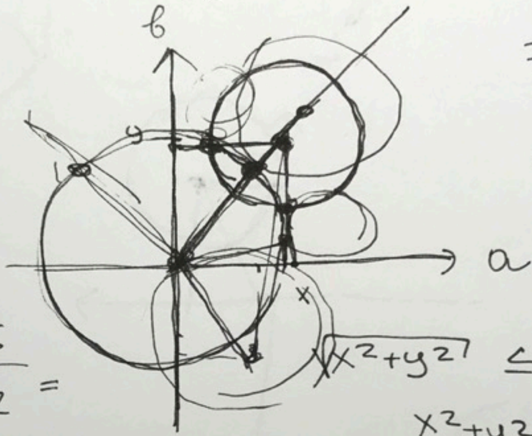
$a^2+b^2-2ab \leq 4$

$\cancel{-2ab \leq -4}$



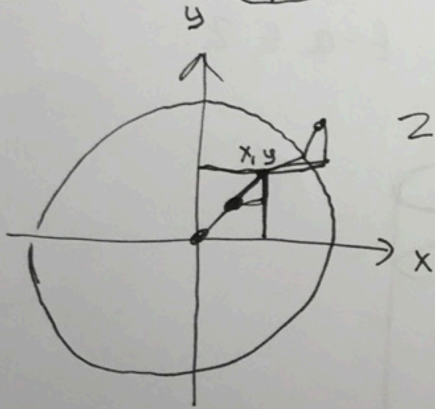
$49-4=$
45





$36-4=32$

$\boxed{4\sqrt{2}}$



$\frac{56}{2\cdot 32}=$

$\sqrt{x^2+y^2} \leq 4\sqrt{2}$

$x^2+y^2 \leq 32$

$\frac{56}{64}=\frac{7}{8}$ $a^2+b^2 \leq 8$

$a^2+b^2 \leq -4a+4b$

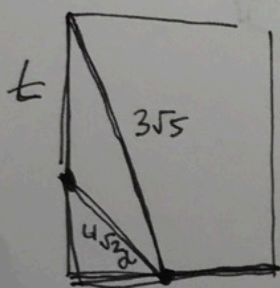
a^2+b^2

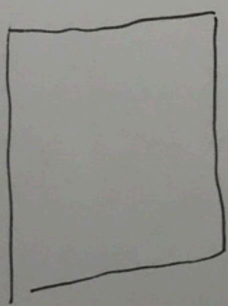
$\sqrt{x^2+y^2} \leq 4\sqrt{2}$

$\sqrt{4+4} \leq 4\sqrt{2}$

$t^2=45+32-2\cdot 4\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot\cos\alpha$

$=77-24\sqrt{10}\cos\alpha$





$a^2+b^2 \leq 8 \leq -4b-4a$

a^2+b^2

$a^2+4a+b^2-4b \leq 0$

$(a+2)+(b-2) \leq 8$

21100626 (U89433 M1301780)

a_1 d Черновик

$$S = \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = 6a_1 + 15d$$

$$a_{10} a_{16} = (a_1 + 9d)(a_1 + 15d) = a_1^2 + 135d^2 + 24ad > 6a_1 + 15d + 39$$

$$a_{11} a_{15} = (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) = a_1^2 + 140d^2 + 24ad < 6a_1 + 15d + 55$$

$$5d^2 < 16$$

$$d < \frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1$$

$$\boxed{d = 1}$$

$$\frac{4}{\sqrt{5}} \vee 2$$

$$16 < 45$$

$(a_1 + 9)(a_1 + 15$

21100626 (U89433 M1301780)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100626**

ID профиля: **89433**

Вариант 23

Чистовик

Задача № 4

Так как НОК $(a; b; c) = 2^{16} \cdot 11^{19}$, то числа a, b и c имеют в разложении на простые множители только ~~д~~ 2 и 11 (в какой-то степени)

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 11^{\alpha_2}$ Тогда $\min(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1) = 1$

$b = 2^{\beta_1} \cdot 11^{\beta_2}$ $\max(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1) = 16$

$c = 2^{\gamma_1} \cdot 11^{\gamma_2}$ $\min(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2) = 1$

$\max(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2) = 19$

В силу того, что НОД $(a; b; c) = 2^1 \cdot 11^1$

НОК $(a; b; c) = 2^{16} \cdot 11^{19}$

Два из трех показателей степеней $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ заданы, оставшийся принимает значение от 1 до 16. Аналогично, оставшийся из $(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$ принимает значение от 1 до 19.

1) Количество способов выбрать соотв. отличный показатель и поставить в соответствие степени другого простого множителя (попросту из имеющихся $\boxed{\text{различных}}$ $\alpha_1; \beta_1; \gamma_1$ сопоставить $\alpha_2; \beta_2; \gamma_2$): $14 \cdot 17 \cdot 3! \cdot 3! = \boxed{1428} \cdot 3! =$

количество способов выбрать показатель 2 отличный от 1 и 16

кол-во способов выбрать отличный показатель 11.

2) Если в разложениях встречаются одинаковые показатели

a) Если совпадают только одни из $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ и $(\alpha_2; \beta_2; \gamma_1)$

т.е. например $\alpha_1 = \beta_1 \neq \gamma_1$ и $\alpha_2 \neq \beta_2 \neq \gamma_2$

Тогда количество таких троек: ~~$\frac{3!}{2!} \cdot 4 \cdot 3! = 72$~~

$$\left(2 \cdot \frac{3!}{2!} \cdot 17 + 2 \cdot \frac{3!}{2!} \cdot 14\right) \cdot 3! = 744$$

упорядочиваем

~~кол-во вариантов какой показатель совпадает~~

1

Чистовик

Задача №4 (продолжение)

б) Если в обеих группах показатели совпадают,

4 варианта: в первой группе 1 или 16, во второй: 1 или 19

~~Итого~~ таких троек $4 \cdot 3! \cdot 3! = 144$

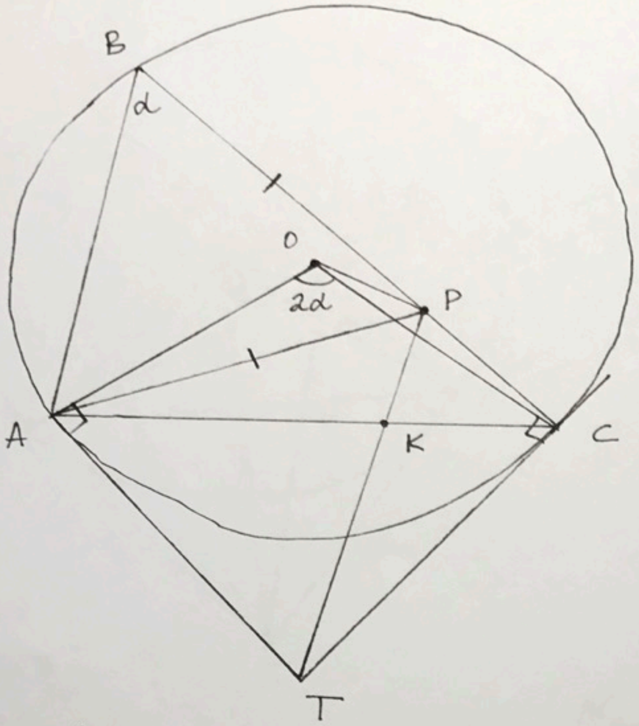
Итого: $14 \cdot 17 \cdot 3! \cdot 3! + 2 \cdot \frac{3!}{2} \cdot 14 \cdot 3! + 2 \cdot \frac{3!}{2} \cdot 17 \cdot 3! + 4 \cdot 3! \cdot 3!$

$= 8568 + 744 + 144 = 9456$

Ответ: 9456 троек

Чистовик Задача №6

3



а) 1) AOCT – вписанный, так как $\angle OAT + \angle OCT = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$

причём с диаметром OT (угол, опир. на диаметр)

AOPC – вписанный по условию.

$\Rightarrow$ точки A, O, P, C, T лежат на одной окружности.

Пусть $\angle ABC = \alpha \Rightarrow \angle AOC$ (центральный) $= 2\alpha \Rightarrow \angle AOT = \angle COT = \alpha$

(в силу рав-ва соотв. треугольников по гипотенузе и катету)

$\angle AOT = \angle APT$

$\angle COT = \angle CPT$ (опир. на одну дугу) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APT = \angle CPT = \alpha \Rightarrow PK$ – бисс угла APC

2) $\frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle CPK}} = \frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC}$ (по теор. о бисс.) $= \frac{15}{13}$

$\angle BPA = 180° - \angle APC = 180° - \angle AOC = 180° - 2\alpha \Rightarrow \angle BAP = 180° - \angle ABP - \angle BPA = \alpha$

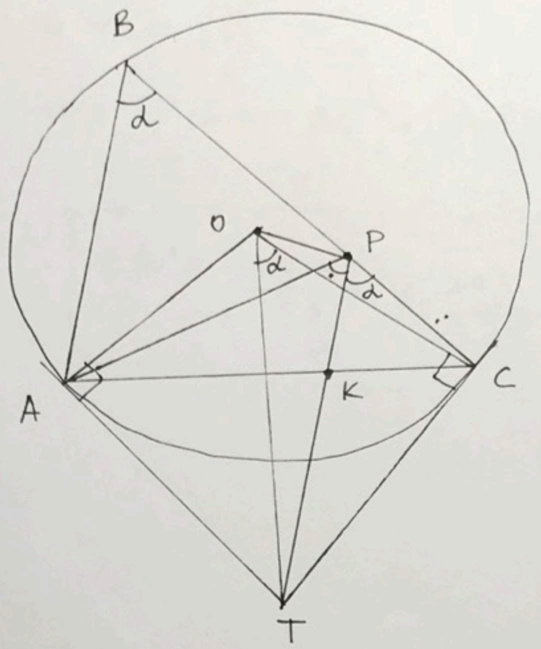
То есть $AP = BP \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{BP}{PC} = \frac{15}{13} \Rightarrow S_{\triangle}BPA = \frac{15}{13} S_{\triangle}APC = \frac{28 \cdot 15}{13}$

$S_{\triangle}ABC = S_{\triangle}BPA + S_{\triangle}APC = 28 + \frac{15}{13} \cdot 28 = \boxed{\frac{28^2}{13}} = \frac{784}{13}$

Ответ: $S_{\triangle}ABC = \frac{784}{13}$

Чистовик Задача №6

4



б) По теореме sin для $\triangle ABC$: $\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R$, где $R = OC$ – радиус опис. окр.

Окружность, описанная около точек A, O, P, C, T имеет диаметр, равный OT

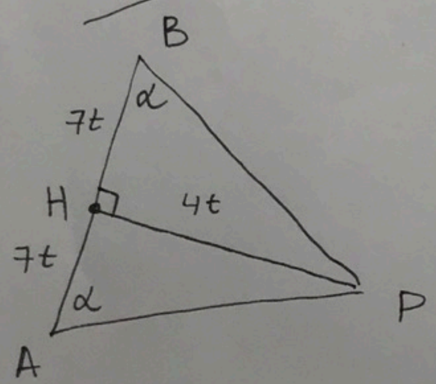
~~Т.к. OCT – прямоугольный, TOC = α (доказывали в пункте а)~~

~~то~~ $\cancel{OT = \frac{OC}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha} \Rightarrow \frac{OT}{2} = r = \frac{R}{2\cos\alpha}}$

~~По теореме sin для △APC:~~ $\cancel{\frac{AC}{\sin 2\alpha} = 2r = \frac{R}{\cos\alpha}}$

~~Получаем систему:~~ $\cancel{\frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}}$

$\cancel{\frac{AC}{\sin\alpha} = \cancel{\frac{R}{2\cos\alpha}}\ 2R}$



пусть $AB = 14t \Rightarrow PH = 4t$ т.к. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{7}$

$\Rightarrow BP = PA = \sqrt{65}\,t \Rightarrow PC = \frac{13}{15}\cdot\sqrt{65}\,t$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sin\alpha\cdot AB\cdot BC = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{\sqrt{65}}}\cdot\frac{28}{15}\cdot\cancel{\sqrt{65}}\,t\cdot 14t$

$= \frac{2\cdot 28\cdot 14}{15}t^2 = \frac{784}{13} \Rightarrow t^2 = \frac{15}{13}$

Чистовик. Задача N 6 5

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{15}{13}}$$

по теор cos: $AC^2 = 14^2 \cdot \frac{15}{13} + \frac{28^2}{15^2} \cdot \frac{15}{13} \cdot 65 - 2 \cdot \frac{7}{\cancel{\sqrt{65}}} \cdot 14 \cdot \sqrt{\frac{15}{13}} \cdot \cancel{\sqrt{65}} \cdot \frac{28}{15}\sqrt{\frac{15}{13}} \cdot \cos\alpha$

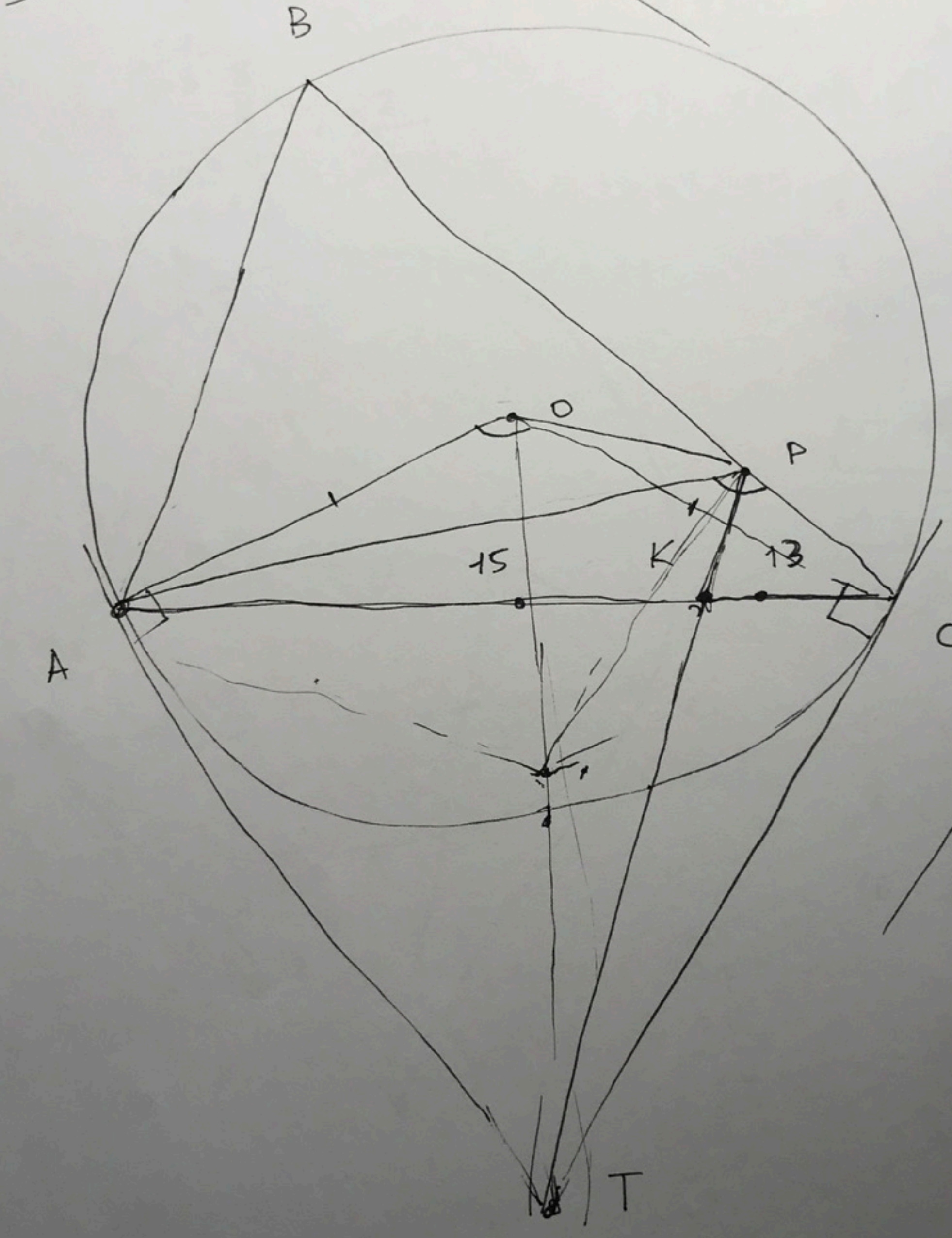
$$\boxed{AC^2 = \frac{14^2 \cdot 15}{13} + \frac{28^2 \cdot 5}{15} - 14^2 \cdot \frac{15}{13} \cdot \frac{28}{13} \cdot \frac{7}{\sqrt{65}}}$$

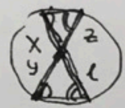
~~Чистовик~~ черновик <u>Задача N5</u>

По условию, какие-то два из этих чисел равны

1) $$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$$

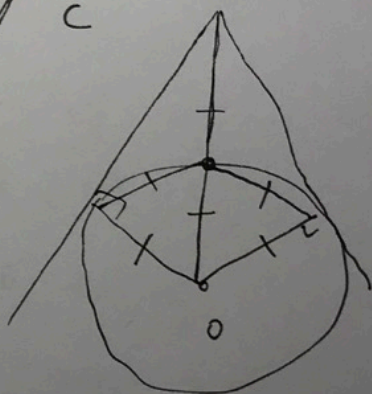
$$\frac{1}{\log_{2x+23}(\sqrt{x+34})} = \frac{1}{2}\log_{2x+23}(-x-4)$$





$$\frac{x}{y} = \frac{z}{l}$$

$$\frac{x}{l} = \frac{yz}{l^2}$$



Черновик

НОД $(a; b; c)$

НОК $(a; b; c) = 2^{16} \cdot 11^{19}$

$$\begin{array}{r} 8568 \\ 744 \\ 144 \\ \hline 9456 \end{array}$$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 11^{\alpha_2}$

$b = 2^{\beta_1} \cdot 11^{\beta_2}$

$c = 2^{\gamma_1} \cdot 11^{\gamma_2}$

$\min(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1) = 1$

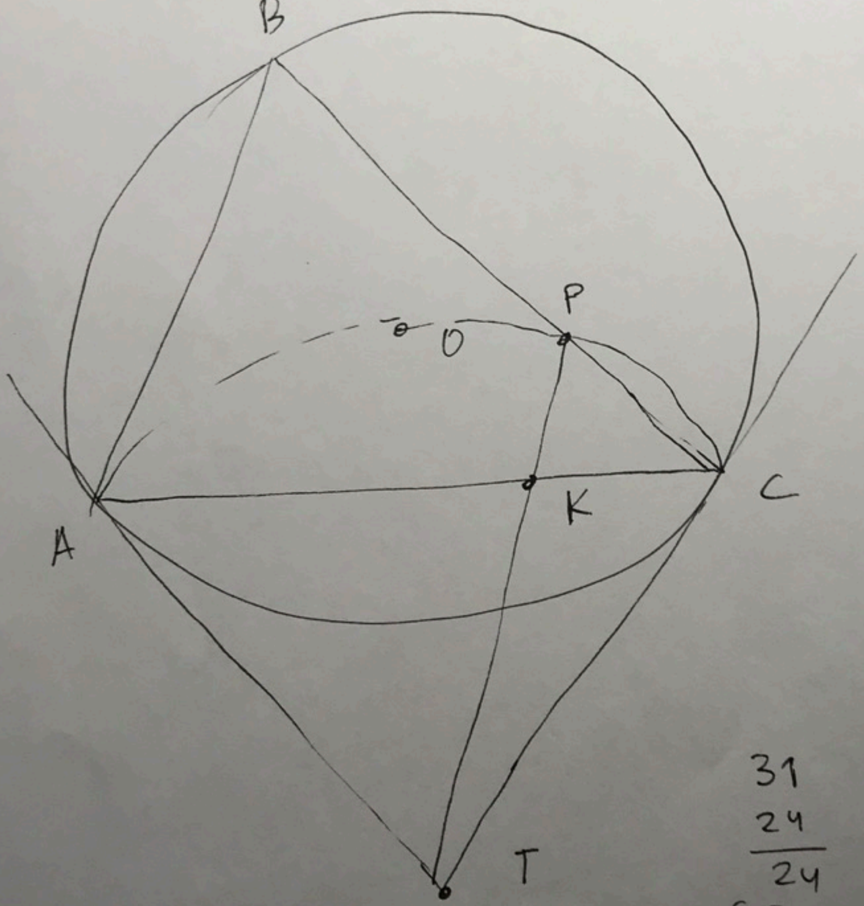
$\max(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1) = 16$

$\underline{1-16}$ $\underline{1-19}$

$16 \cdot 19 \cdot 3$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 14 \\ \hline 68 \\ 17 \\ \hline 238 \\ 6 \\ \hline \cancel{2058} \\ 1428 \end{array} \qquad \frac{2}{109}$$

1	1
1	15
16	19



$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
1	19
16	15

$$\begin{array}{r} 1428 \\ 6 \\ \hline 8568 \end{array}$$

1	15
1	19
16	1

$$\begin{array}{r} 31 \\ 24 \\ \hline 124 \\ 62 \\ \hline 644 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \\ 31 \\ \hline 24 \\ 72 \\ \hline 744 \end{array}$$