Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100598**

ID профиля: **78735**

Вариант 23

23 ВАРИАНТ №1 Чистовик 1

$S = a_1 + \ldots + a_6 = 6a_1 + (d + 2d + \ldots 5d) = 6a_1 + 15d$

$a_{10} \cdot a_{16} = (a_1 + 9d)(a_1 + 15d) = a_1^2 + 24a_1d + 135d^2 > 6a_1 + 15d + 39$

$a_{11} \cdot a_{15} = (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) = a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 < 6a_1 + 15d + 55$

возраст. $\to d > 0$

сост. из целых чисел $\to a_1 \in \mathbb{Z}$; $a_2 - a_1 = d \in \mathbb{Z}$

$(a_1^2 + 24a_1d + 135d^2) + (6a_1 + 15d + 55) > (a_1^2 + 24a_1d + 140d^2) + (6a_1 + 15d + 39)$

$16 > 5d^2$

Т.к. $d \in \mathbb{Z}$ и $d > 0 \to d = 1$

$a_1 \neq -9$!

$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 15 + 39 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 15 + 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \\ a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+9)^2 > 0 \\ \cancel{a_1 \in \left(-\infty; \frac{-9-2\sqrt{11}}{2}\right) \cup \left(\frac{-9+2\sqrt{11}}{2}; +\infty\right)} \end{cases}$

$D = \frac{-18 \pm \sqrt{18 \cdot 18 - 4 \cdot 70}}{2} = -9 \pm \sqrt{11}$

$\cancel{a_1 \in \left(\frac{-9-2\sqrt{11}}{2}; \frac{-9+2\sqrt{11}}{2}\right)}$

$a \in (-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11})$

$\cancel{-3\tfrac{2}{3} < \frac{-9+2\sqrt{11}}{2} < -1}$

$\cancel{-4 < 2\sqrt{11} - 9 < -2}$

$\cancel{5 < 2\sqrt{11} < 7}$

$\cancel{\sqrt{25} < \sqrt{44} < \sqrt{49}}$

$\cancel{-8 < \frac{-9-2\sqrt{11}}{2} < -7}$

$\cancel{-16 < -9 - 2\sqrt{11} < -14}$

$\cancel{-7 < -2\sqrt{11} < -5}$

$\cancel{7 > 2\sqrt{11} > 5}$

$\cancel{\sqrt{49} > \sqrt{44} > \sqrt{25}}$

~~Ответ: $a_1 \in (-\infty; -8] \cup [-1; +\infty)$, $a_1 \in \mathbb{Z}$~~

~~Ответ: $a_1 \in \{-7; -6; -5; -4; -3; -2\}$~~

$-13 < -9 - \sqrt{11} < -12$

$-4 < -\sqrt{11} < -3$

$-\sqrt{16} < -\sqrt{11} < -\sqrt{9}$

$-6 < -9 + \sqrt{11} < -5$

$3 < \sqrt{11} < 4$

$\sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16}$

$\to a_1 \in [-12; -6]$

Ответ: $a_1 \in \{-12; -11; -10; -8; -7; -6\}$

21100598 (U78735 M1295871)

23 ВАРИАНТ

№3

Чистовик 2

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8$ → окр. с центром в т. $(a;b)$ и радиусом $2\sqrt{2}$

$a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8)$

при $4(b-a) \ge 8$

$(b-a) \ge 2$

$a^2+b^2 \le 8$

↓

в коорд. сист. b от a окр. с центром в $(0;0)$ и радиусом $2\sqrt{2}$

при $4(b-a) < 8$

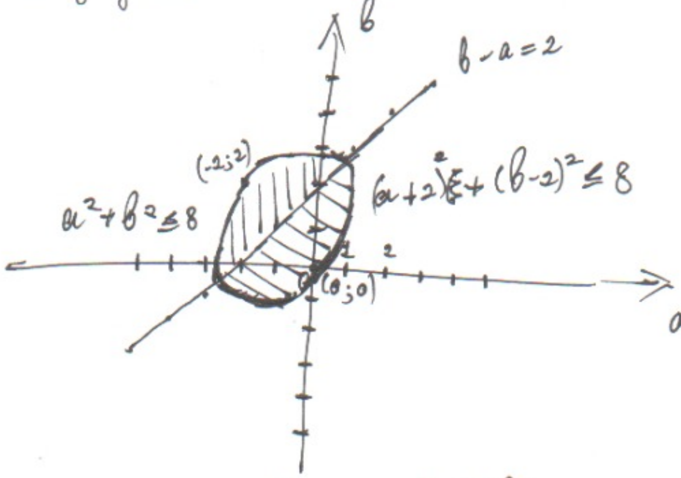
$(b-a) < 2$

$a^2+b^2 \le -4a+4b$

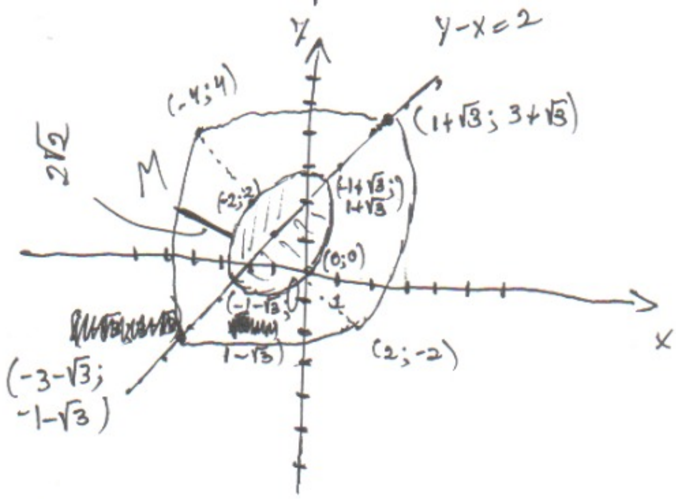
$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$

↓

в коорд. сист. b от a окр. с центром в $(-2;2)$ и радиусом $2\sqrt{2}$



Т.к. окр. с центрами в $(a;b)$ являются решениями, то можно заменить в этой системе коорд a на x и b на y и получить множество центров таких окружностей, а искомой фигурой M будут все точки на расстоянии не более $2\sqrt{2}$



$\begin{cases} b-a=2 \\ a^2+b^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+2 \\ a^2+2a-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\left[\begin{aligned} a_1=-1-\sqrt{3};\ b_1=1-\sqrt{3} \\ a_2=-1+\sqrt{3};\ b_2=1+\sqrt{3} \end{aligned}\right.$

$(-1;1)$ – центр

$S_M = S_1 + S_2 + l_1 \cdot 2\sqrt{2} + l_2 \cdot 2\sqrt{2}$

площади частей изн. окр.

длины этих частей окр.

окр. находятся под углом α – ?

$\sqrt{(-1+\sqrt{3}+1+\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3}-1+\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$

$\cos\alpha = \dfrac{-(2\sqrt{6})^2+(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}$

$\alpha = \dfrac{2\pi}{3} = 120^\circ$

21100598 (U78735 M1295871)

23 ВАР $\quad$ № 3 $\quad$ Чистовик. 3

$$l = \pi \cdot r = 2\sqrt{2} \cdot \pi$$

$$l_1 = l_2 = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot l = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

$$(l_1 + l_2) \cdot 2\sqrt{2} = \frac{8\pi}{3} \cdot 2$$

$$\alpha = 120^\circ \to \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

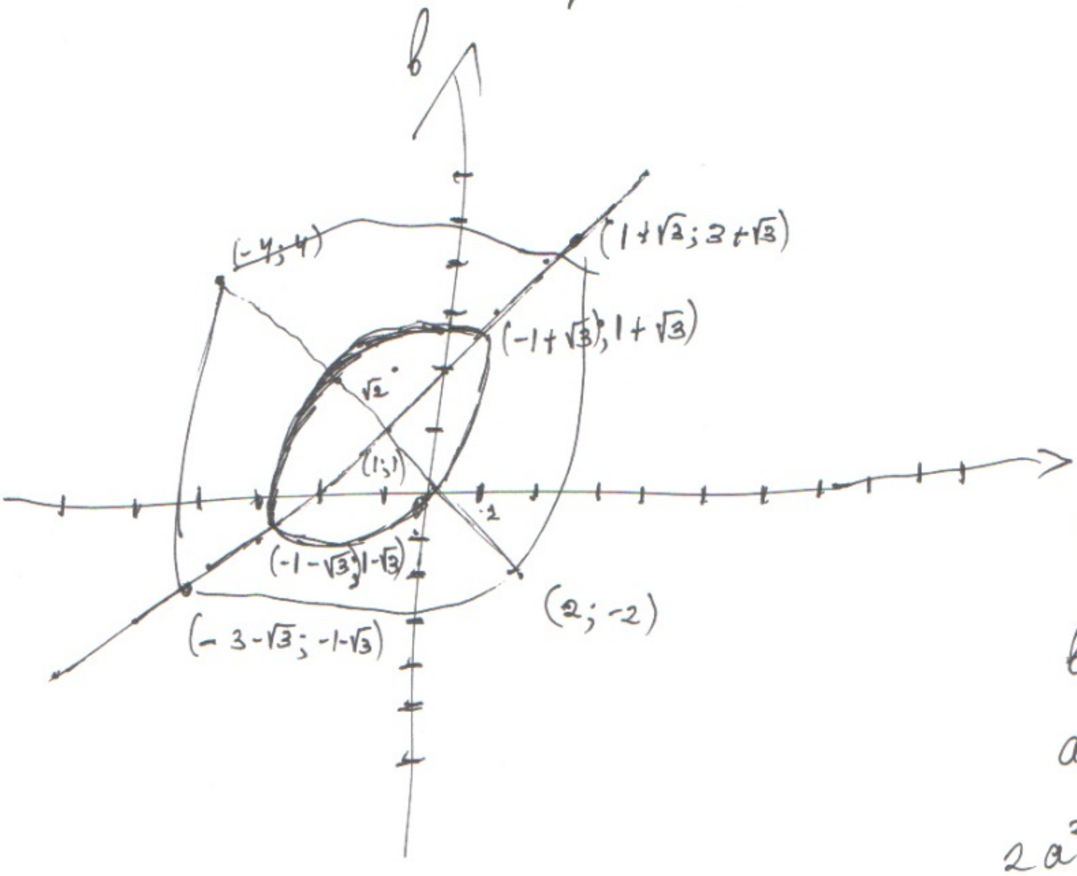
$$S_\Delta = \frac{1}{2} 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin\alpha = 2\sqrt{3}$$

$$S_1 + S_2 = 2 \cdot \left(\pi r^2 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} - S_\Delta\right) = \left(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right) \cdot 2$$

$$S_M = \left(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right) \cdot 2 + \frac{8\pi}{3} \cdot 2 = \frac{32\pi}{3} + 4\sqrt{3}$$

21100598 (U78735 M1295871)

Черновик



$4(b-a) < 8$

$b-a<2$

$b<a+2$

$a^2+b^2 \le -4a+4b$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$

$b=a+2$

$a^2+b^2 \le 8$

$2a^2+4a+4 \le 8$

$a^2+2a-2 \le 0$

$\cancel{(a+1)^2 \le 3}$

$\cancel{(a+1)^2 \le 3}$

$a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100598**

ID профиля: **78735**

Вариант 23

Вар 23 №4 Чистовик 1

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 22 \\ НОК(a;b;c) = 2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases} \qquad a, b, c \in N$$

$\downarrow$

$a;b;c \to$ произведения 2 и 11 (иначе НОК другой)

Пусть 1 из чисел $= 2^{16}\cdot 11^{19}$

~~Тогда 2 других будут равны 22 (если меньше → 1, 2, 11, то НОД не равен~~

Тогда каждый из оставшихся 2-ух должен делиться на 22, но оба не могут делиться на 4 или на 11 (иначе НОД другой)

и каждый имеет степень 2 и 11 не больше 16 и 19 (иначе НОК другой) $\to$ НОД и НОК будут 22 и $2^{16}\cdot 11^{19}$

Случай 2-ух 22 рассмотрим отдельно $\to$ 3 варианта перестан (3 вар. выбр. место для $2^{16}\cdot 11^{19}$)

Случай 2-ух $2^{16}\cdot 11^{19}$ и 22 тоже $\to$ 3 вар.

Тогда остаются $2^{16}\cdot 11^{19}$; $2^k\cdot 11^t$; 22 $\quad k,t\in Z \quad k+t\neq 2; k+t\neq$ $(1\le k\le 16; 1\le t\le 19)$

$(\overset{302}{16\cdot 19-2})\cdot 6 = 1812$

число способов выбр. k и t

число перестановок 3 разл. чисел

Или $2^{16}\cdot 11^{19}$; $2^k\cdot 11$; $2\cdot 11^t$ $\quad k,t\in Z$ $(1< k\le 16; 1< t\le 19)$ — при $k=1$ и $t=1$ сводится к предыдущ

~~$(16\cdot 19-1)\cdot 6 = 1818$~~ (303) $6\cdot 15\cdot 18 = 270\cdot 6 = 1620$

Итого ~~1818~~ 1620 $+ 1812 + 3 + 3 =$ ~~3636~~ 3438

Вар 23 №4 чистовик 2

Если ни одно из чисел $\neq 2^{16} \cdot 11^{19}$, то

одно из них $= 2^{16} \cdot 11^{k}$ $(0 < k < 19)$, $k \in Z$, иначе 2^{16} не будет в НОК

а другое $= 2^{t} \cdot 11^{19}$ $(0 \leq t < 16)$, $t \in Z$, иначе 11^{19} не будет в НОК

Тогда при $t > 1$ и $k > 1$ 3-ье может быть только 22 (большие степени 2 и 11 увеличат НОД)

$17 \cdot 14 \cdot 6 = \underline{1428}$ $(t > 1$ и $k > 1)$

Если же $t = 1$ и $k = 1$, то 3-ье м.б. $2^{n} \cdot 11^{m}$, где $n, m \in Z$ $n + m \neq 35$

$(1 \leq n \leq 16$; $1 \leq m \leq 19)$

Рассмотрим отдельно $n = 1$ и $m = 19$ и $n = 16$ и $m = 1$

↓ 3 вар. ↓ 3 вар.

$(16 \cdot 19 - 3) \cdot 6 = \underline{1806}$ (301)

$1806 + 3 + 3 = \underline{1812}$ $(t = 1$ и $k = 1)$

Если $t = 1$ и $k > 1$, то 3-ье $2^{n} \cdot 11$, где $1 \leq n \leq 16$, $n \in Z$

но при $n = 16$ сведётся к предыдущему, иначе совпад. не будет

~~Рассмотрим~~

$2^{n} \cdot 11^{m} \neq 2^{16} \cdot 11^{k} \neq 2 \cdot 11^{19}$ (не найти равных)

$6 \cdot (17 \cdot 15) = \underline{1530}$

Если $k = 1$ и $t > 1$, то 3-ье $2 \cdot 11^{m}$, где $1 \leq m \leq 18$, $m \in Z$

при $m = 19$ сведётся к предпредыдущему случаю аналогично предыдущ

$6 \cdot (18 \cdot 14) = \underline{1512}$ (252)

Ответ: $3438 + 1428 + 1812 + 1530 + 1512 = 9720$

№5 Чистовик 3

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$ $\log_{(x+4)^2}(x+34)$ $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$x+34>0$
$x>-34$
$x+34\neq 1$
$x\neq -33$

$2x+23>0$
$x>-11,5$

$(x+4)^2>0$
$x\neq -4$
$(x+4)^2\neq 1$
$x\neq -5;-3$

$2x+23\neq 1$
$2x\neq -22$
$x\neq -11$

$-x-4>0$
$x<-4$
~~$-x-4\neq 1$~~
~~$x\neq -5$~~

$x\in(-11,5;-11)\cup(-11;-5)\cup(-5;-4)$

$a=b=c-1$

логарифмы

$$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=\frac{2\lg(2x+23)}{\lg(x+34)}=2\frac{n}{m}$$

$$\log_{(x+4)^2}(x+34)=\frac{\lg(x+34)}{2\lg(-x-4)}=\frac{1}{2}\frac{m}{p}$$

$$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=\frac{2\lg(-x-4)}{\lg(2x+23)}=\frac{2p}{n}$$

1) ~~$2\frac{n}{m}=2\frac{p}{n}=\frac{1}{2}\frac{m}{p}-1$~~

~~$\begin{cases} pm=n^2 \\ 4np=(m-2p)m \\ 4p^2=(m-2p)n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=\frac{n^2}{m} \\ 4\frac{n^3}{m}=(m^2-2\frac{n^2}{1}) \\ 4\frac{n^4}{m^2}=mn-2\frac{n^3}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=\frac{n^2}{m} \\ 4n^3=m^3-2n^2m \\ 4n^4=m^3n-2n^3m \end{cases}$~~

№5 Чистовик 4

$\lg(2x+23)$ и $\lg(x+34)$ – возр.

$\lg(-x-4)$ – убыв.

$\frac{1}{2}\frac{m}{p}$ – возр. $\frac{2p}{n}$ – убыв

$\frac{1}{2}\frac{m}{p}-1=\frac{2p}{n}$ и $\frac{1}{2}\frac{m}{p}=\frac{2p}{n}$ и $\frac{1}{2}\frac{m}{p}+1=\frac{2p}{n}$

имеют не более 1 решения

$\frac{2p}{n}=\frac{1}{2}\frac{m}{p}+1$ при $x=-9$ выполняется

$\left(\text{и } 2\frac{n}{m}=\frac{1}{2}\frac{m}{p}=1\right)$

Черновик

$2^{16} \cdot n^k$ 22 $2^t \cdot 11^{19}$ $4p^2+2pn-mn=0$

$mn-2pn=4p^2$

$D=n^2+4mn=0$

$2p_{1,2}=\frac{-n\pm\sqrt{n^2+4mn}}{2}$

$2^{16} \cdot 11$ $2 \cdot 11^{19}$ $2^n \cdot 11^m$

$2^{16} \cdot 11^k$ $2 \cdot 11^{19}$ $2^n \cdot 11$

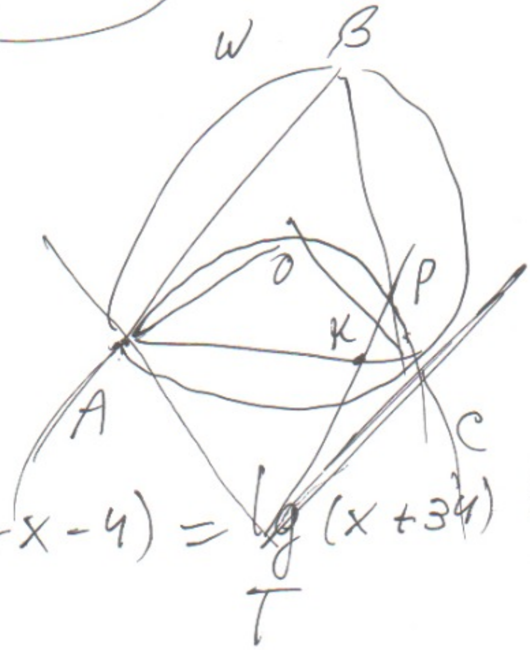
$\frac{1}{2}\frac{m}{p}$ - возр.

$2\frac{p}{n}$ - убыв.

3438

3240 3042 $X=-9$

6480



9720	2
4860	2
2430	2
1215	3
405	5
81	3^4

1

1

2

$4\lg^2(-x-4)=\lg(x+34)\ \lg(2x+23)$

$\lg(x+34)>1$

$x\in(-11;-5)$ → $n>1$ $-x-4>2x+23$

$p>1$ $-3x>27$

$x<-9$

$2x+23<x+34$

$2x+23>x+34$ →

$x>11$

$x+34>-x-4$

$2\frac{n}{m}<2$

$2x>-38$

$x>-19$ $\frac{1}{2}\frac{m}{p} > \frac{1}{2}$

$\frac{2p}{n}=2\frac{n}{m}= pm=n^2$