Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100596**

ID профиля: **334086**

Вариант 23

Вариант 23. Часть 1. Чистовик.

Задача 1.

Пусть шаг прогрессии $= p$, $\Rightarrow a_{10} \cdot a_{16} = (a_{13} - 3p)(a_{13} + 3p) = (a_{13})^2 - 9p^2$ $(> S + 39)$, где

$S = 6a_1 + p + 2p + 3p + 4p + 5p = 6a_1 + 15p$; $a_{11} \cdot a_{15} = (a_{13} - 2p)(a_{13} + 2p) = (a_{13})^2 - 4p^2$ $(< S + 55)$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 9p^2 - (a_{13})^2 < -S - 39 \\ (a_{13})^2 - 4p^2 < S + 55 \end{cases} \Rightarrow$ (сложим почастно): $5p^2 < 55 - 39$, $\Rightarrow p^2 < 3{,}2$, $\Rightarrow$ (т.к. по усл. $\forall a_n \in \mathbb{Z}$, $\Rightarrow a_{n+1} - a_n = p \in \mathbb{Z}$ и (послед. возрастающая) $p > 0$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow (0 < p < \sqrt{3{,}2}$ и $p \in \mathbb{Z})$: $p = 1$, $\Rightarrow a_{13} = a_1 + 12$, $\Rightarrow \begin{cases} (a_1 + 12)^2 - 9 > 6a_1 + 15 + 39 \\ (a_1 + 12)^2 - 4 < 6a_1 + 15 + 55 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \\ a_1^2 + 18a + 70 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 9)^2 > 0 \\ (a_1 + 9)^2 - 11 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -9 \\ -\sqrt{11} < a_1 + 9 < \sqrt{11} \end{cases}$, $\Rightarrow$ (т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$, $\Rightarrow (a_1 + 9) \in \mathbb{Z}$), $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -3 \leq a_1 + 9 \leq 3 \\ a_1 \neq -9 \end{cases} \Rightarrow$ Ответ: $a_1 \in \{-12; -11; -10; -8; -7; -6\}$. (Подходят под условия при $p = 1$).

21100596 (U334086 M1297743)

Чистовик.

Задача 3.

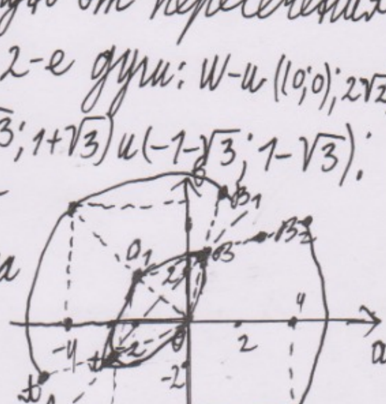
$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le \min(4b-4a;8)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le 8\\ a^2+b^2\le 4b-4a\end{cases}$ (т.к. если $a^2+b^2\le$ обоих, то оно $\le$ минимального, и если оно $\le$ мин-го, которое $\le$ максимального, то оно $\le$ обоих, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ переход равносильный) $\Leftrightarrow \begin{cases}(a-x)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le 8\\ (a+2)^2+(b-2)^2\le 8\end{cases}$. Построим данную систему

в координатной пл-ти aOb: ($a^2+b^2\le 8$ - ур-е, задающее круг с центром $(0;0)$ и радиусом $R=2\sqrt{2}$; $(a+2)^2+(b-2)^2\le 8$ - ур-е, задающее круг с центром $b(-2;2)$ и радиусом $R=2\sqrt{2}$. 2-е точки пересечения окружностей, ограничивающие данные круги, лежат на прямой $a=b-2$, равноудалённой от $(0;0)$ и $(-2;2)$, $\Rightarrow [(b-2)^2+b^2=8, \Rightarrow b^2-2b-2=0, \Rightarrow$

$\Rightarrow (b-1)^2-3=0, \Rightarrow b=1+\sqrt{3}$ и $b=1-\sqrt{3}$ - координаты точек пересечения окружностей, $\Rightarrow$ точки $(-1+\sqrt{3};1+\sqrt{3})$ и $(-1-\sqrt{3};1-\sqrt{3})$. Наконец, $(a-x)^2+(y-b)^2\le 8$ задаёт круг с центром в точке $(x;y)$. Выбранный нами $(x;y)$ будет подходить условию, если $\exists$ хоть 1-а точка на плоскости (aOb), принадлежащая всем 3-м кругам (т.к. взяв выбранный x и y, а также пару $(a;b)$ - координаты 1-й из ~~этих~~ точек, общих для 3-х кругов, то, подставив их в изнач. систему, все неравенства в ней будут верны, $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ данная пара x и y учтётся). Рассмотрим полученную от пересечения 2-х кругов фигуру: её поверхность ограничивают 2-е дуги: w-и $((0;0);2\sqrt{2})$ и w-и $((-2;2);2\sqrt{2})$, ~~пере~~ имеющие 2-е общие точки $(-1+\sqrt{3};1+\sqrt{3})$ и $(-1-\sqrt{3};1-\sqrt{3})$.

Проведём из т. O и удвоим все радиусы w-и $(O;2\sqrt{2})$, проведённые к найденной ограничивающей дуге BO_1t (точки на новой получ. дуге удалены от старой на расстоянии $(2-1)\cdot 2\sqrt{2}$, $\Rightarrow$ если поместить в эти точки $(x;y)$, то $w_3((x;y);2\sqrt{2})$ будет касаться дуги tO_1B. Аналогично сделаем для т. O_1 и радиусов окружности $w(O_1;2\sqrt{2})$ к дуге tOB (точка $O\in w(O_1;R)$, т.к. $(0+2)^2+(0-2)^2=8$, аналог. $O_1\in w(O,R)$, т.к. $(-2)^2+2^2=8$.



Чистовик.

Т.к. дуги AO_1B и AOB имеют общие точки A и B, ~~то продлив их до получения 2-х новые дуга до пересечения с прямой AB получим точки A_1 и B_1~~ и удвоением радиусов мы получили 2-е новые дуги A_1B_1 и A_2B_2, при этом точки B_1 и B_2 равноуд. от B на расст. $2\sqrt{2}$.

Проведём дугу ω-и $(B; 2\sqrt{2})$, соединив B_1 и B_2; Аналог. соединим A_1 и A_2 дугой ω-и $(A; 2\sqrt{2})$, тогда полученная фигура, ограниченная 4-мя дугами A_1B_1, B_1B_2, B_2A_2 и A_2A_1, будет содержать внутри себя (включая границы) все точки, имеющие координаты $(a;b)$, подходящие на роль $(x;y)$: все точки внутри являются центрами ω-и с $R=2\sqrt{2}$, которая или кас. фигуры AO_1BO из 2-х дуг, а все снаружи - ω-ти с $R=2\sqrt{2}$, которые не имеют с ней общих точек, ⇒ не годятся на роль $(x;y)$.

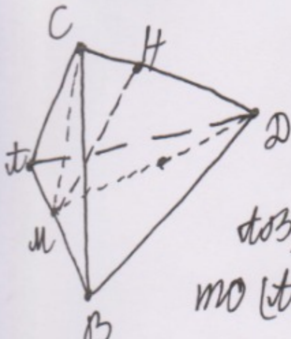
Тогда по сути $A_1A_2B_2B_1$ - и есть искомая фигура M (со всей внутренней площадью, т.к. если $\omega(T;R)$ касалась AO_1BO на границе фигуры M, то с T ближе к ней (внутр. M) $\omega(T;R)$ (внутр.) также продолжит иметь общ. точки с AO_1BO), при переносе в координаты XOY: a заменяется на x; b - на y (т.к. точки фигуры M - центры кругов $((x;y);R)$, ⇒ являются точками $(x;y)$), ⇒ фигура не изменится, ⇒ искомая площадь M = -а площади $A_1B_1B_2A_2$.

Найдём $\angle AOB$: $AB=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$ и $OA=OB=2\sqrt{2}$, ⇒ (по Th cos-ов): $\cos\angle AOB=\frac{AO^2+OB^2-AB^2}{2AO\cdot OB}=\frac{16-24}{16}=-\frac{1}{2}$ ($\angle AOB$ - тупой) и $=120°$ (т.к. $\cos(120°)=-\cos(60°)=-\frac{1}{2}$), ⇒ площадь сектора $OA_1B_1=\pi\cdot(2R)^2\cdot\frac{120°}{360°}$ (где $2R=OA_1=OB_1$ - радиус сектора) $=\frac{4\pi\cdot 8}{3}$. Аналог. $\angle OO_1A=120°$ и $S_{сектор.\, O_1A_2B_2}=\frac{4\pi\cdot 8}{3}$. ~~Пусть~~ $\angle O_1AO=\angle O_1BO=\frac{360°-2\cdot 120°}{2}=60°$ ($\Sigma\angle$-ов 4-$\angle$-ка AO_1BO и симметрия отн. AB), ⇒ $S_{сектора\, AA_1A_2}=S_{сектора\, BB_1B_2}=\frac{\pi R^2\cdot 60°}{360°}=\frac{8\pi}{6}$. Площадь Δ-а AOB: $S_{AOB}=\frac{AO\cdot OB\cdot\sin\angle AOB}{2}=\frac{8\cdot\sin(120°)}{2}=2\sqrt{3}=S_{Δ\text{-}a\, AO_1B}$; и $S_{фигуры\, AO_1BO}=(S_{сектора\, OAB}-S_{Δ\text{-}a\, AOB})\cdot 2$ (из симметрии относ. AB) $=2\cdot\left(\frac{\pi R^2\cdot 120°}{360°}-2\sqrt{3}\right)=\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}$, ⇒ Искомая $S_M=S_{сект.\, OA_1B_1}+S_{сект.\, O_1A_2B_2}+S_{сект.\, AA_1A_2}+S_{сект.\, BB_1B_2}+S_{фигуры\, AO_1BO}-2S_{ромба\, AO_1BO}$ (ромб был посчитан 3-жды: в секторах OA_1B_1, $O_1A_2B_2$ и в фигуре AO_1BO) $=2\cdot\frac{32\pi}{3}+2\cdot\frac{8\pi}{6}+\left(\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}\right)-2\cdot(4\sqrt{3})=\frac{64\pi+8\pi+16\pi}{3}-12\sqrt{3}=\frac{88\pi}{3}-12\sqrt{3}=(29\frac{1}{3})\pi-12\sqrt{3}$.

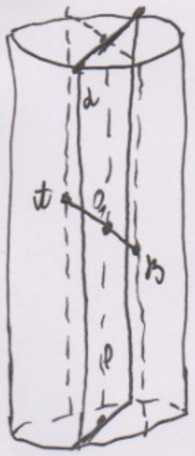
Ответ: $S_M=\frac{88\pi}{3}-12\sqrt{3}$.

Задача 2. Чистовик.

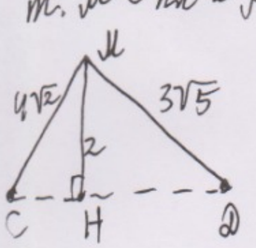
Дано:
$AC=CB=6$
$AD=DB=7$
$AB=4$



В тетраэдре: т. M – середина AB, $\Rightarrow$ ($\triangle ABC$ и $\triangle ADB$ равнобедр. по определению (по усл. $AC=CB$ и $AD=DB$) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (по св-ву) мед. к основ. AB явл. также высотами, $\Rightarrow$ $CM \perp AB$ и $DM \perp AB$, $\Rightarrow$ (по призн.: 2-е прям. в пл-и $\perp$-ы AB): плоск. $(CMD) \perp$-а AB, $\Rightarrow$ ($CD \in (CMD)$): $CD \perp AB$. Тогда, если $CD \parallel$ оси цилиндра, то ($AB \perp CD$): $AB \perp$-о оси этого цилиндра, $\Rightarrow$ AB является хордой в окружности – сечении цилиндра, $\perp$-го его оси, $\Rightarrow$ (т.к. диаметр этой окружности $\geq \forall$ её хорды): $d \geq AB$, $\Rightarrow$ $d_{min}=4$ (когда $AB \perp$ оси цилиндра и пересекает её). Тогда найдём возможн. значения CD и покажем, что цилиндры с $d=4$ вообще существуют (покажем построением): проведём $AB \perp$ оси цилиндра l, $AB \cap l =$ т. O_1: Теперь построим осевое сечение – плоскость α, $\perp$-е AB ($l \in \alpha$ и $\alpha \perp$-о AB). Тогда CD должно $\in \alpha$ и при этом лежать на 1-й образующей цилиндра, чтобы быть $\perp AB$ и $\parallel$-о l. т. O_1 – – середина AB (AB – диаметр сеч. цилиндра $\perp$-го его оси l; т. $O_1 \in l$, $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ явл. центром этой ш-и сечения, $\Rightarrow$ серединой диаметра AB, $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ т. O_1 совп. с т. M, при этом (из $\triangle$-ов AMC и AMD по Th Пифагора):



$MC=\sqrt{AC^2-AM^2}=\sqrt{36-4}=4\sqrt{2}$; $MD=\sqrt{AD^2-AM^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$. Тогда мы имеем следующее: $\triangle O_1CD$ имеет $O_1C=4\sqrt{2}$; $O_1D=3\sqrt{5}$ и $O_1H=\frac{d}{2}=2$, где $O_1H=MH$ – высота в $\triangle$-е MCD на сторону CD. Т.к. $MH \perp CD$ и т. $M \in$ пл-и β, $\perp$-ой l, то MH – радиус окружности – сечения пл-ю β цилиндра, $\Rightarrow = \frac{d}{2}=2$.



Из $\triangle$-ов CHM и HMD (по Th Пифагора): $CH=\sqrt{32-4}=2\sqrt{7}$ и $HD=$ $=\sqrt{45-4}=\sqrt{41}$, при этом относ. H у точек C и D есть 2 расположения: либо H между C и D ($\Rightarrow CD=CH+HD=2\sqrt{7}+\sqrt{41}$), либо C и D по 1-у сторону от H, $\Rightarrow$ (т.к. $CH<HD$ ($\sqrt{28}<\sqrt{41}$)): $CD=HD-CH=\sqrt{41}-2\sqrt{7}$. Это и есть возможные значения CD – искомые значения (и мы по сути построим тетраэдр, удовлетворяющий условию и с $d=4$, $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Ответ: либо $CD=\sqrt{41}-2\sqrt{7}$, либо $CD=\sqrt{41}+2\sqrt{7}$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100596**

ID профиля: **334086**

Вариант 23

Вариант 23. Часть 2. Чистовик. Страница 1

Задача 4.

$НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19}$, $\Rightarrow$ числа a, b и c из простых делителей имеют только 2 и 11, при этом есть число, в котором множитель 2 присутствует ровно в 16-й степени, а также число, в котором множитель 11 присутств. ровно в 19-й степени (больших степеней этих прост. множ. быть не может, т.к. наиб. степень содержится в НОК-е, и все 3 степени не могут быть < указанных степеней, иначе данный прост. множитель и в НОК-е был бы в меньшей степени). Рассмотрим I вариант: 1-о число содержит и 2^{16}, и 11^{19}. Т.к. $НОД(a;b;c)=22$, то все числа $\vdots 22$, $\Rightarrow a=2^{16}\cdot 11^{19}$; $b=22\cdot 2^x\cdot 11^y$; $c=22\cdot 2^z\cdot 11^k$. Заметим, что если $x\geq 1$, то $z=0$, если $z\geq 1$, то $x=0$ (иначе НОД был бы $\vdots 4$); аналог. с y и k (иначе НОД был бы $\vdots 121$), $\Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=z=0\\ \left\{\begin{array}{l}x\geq 1\\ z=0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}z\geq 1\\ x=0\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}y=k=0\\ \left\{\begin{array}{l}y\geq 1\\ k=0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}k\geq 1\\ y=0\end{array}\right.\end{array}\right.\\ k \text{ и } y\leq 18 \ (НОК)\\ x \text{ и } z\leq 15\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}1\leq x\leq 15\\ z=0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=0\\ 1\leq z\leq 15\end{array}\right.\\ x=z=0\end{array}\right. \leftarrow \text{всего 31 вариант}\\ \left[\begin{array}{l}\vdots\\ \text{(аналог. с } y \text{ и } k\text{), но} \leq 18\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ аналог. с y и k всего $18\cdot 2+1=37$ вариантов и (т.к. выбор простых множ. 2 и 11 происходит независимо друг от друга, всего пар чисел $(b;c)$ можно выбрать $31\cdot 37$. С учётом перестановок (если b или $c=2^{16}\cdot 11^{19}$), в I варианте $3\cdot 31\cdot 37$ троек чисел $(a;b;c)$ ⊛

II вар.) 2^{16} и 11^{19} у разных чисел: $a=2^{16}\cdot 11^x$; $b=11^{19}\cdot 2^y$; $c=22\cdot 2^z\cdot 11^k$, при этом

$$\left\{\begin{array}{l}1\overset{(НОД)}{\leq} x\leq 18 \text{ (если } x=19\text{, то случай уже был рассмотрен в варианте 1)}\\ 1\leq y\leq 15 \text{ (аналог., если } y=16\text{, то было в I варианте)}\end{array}\right., \text{ и при этом:}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}z=0;\ y=1\\ z\geq 1;\ z\leq 15;\ y=1\\ z=0;\ y\geq 2;\ y\leq 15\end{array}\right. \leftarrow \text{итого } (15+14+1) \text{ вариантов выбора } z \text{ и } y\\ \left[\begin{array}{l}k=0;\ x=1\\ k\geq 1;\ k\leq 18;\ x=1\\ k=0;\ x\geq 2;\ x\leq 18\end{array}\right. \leftarrow \text{итого } (18+17+1) \text{ вариант выбора } x \text{ и } k\end{array}\right.$$

Эти варианты независимы друг от друга (за исключением того, что одновр. не может быть $k=18$ и $z=15$, иначе $c=2^{16}\cdot 11^{19}$ — рассмотрено в 1-м варианте, $\Rightarrow$ итого $(30\cdot 36-1)$ вариант выбора x, y, z, k, + перестановки того, где 2^{16} и 11^{19}, итого $6\cdot(30\cdot 36-1)$ троек $(a;b;c)$ ⊛.

(*): однако заметим, что во время счёта перестановок могли быть посчитаны лишние варианты, т.к. $(a;b;c)$ и $(c;b;a)$, например, всегда считалось за 2-е тройки, но если $a=c$, то это одна и та же, посчитанная 2-жды. В 1-м варианте при =-е 2-х чисел: ($a=c=2^{16}\cdot 11^{19}$, $\Rightarrow b=22$ (НОД) - таких 3-ек 3, но было посчитано 6 раз (по 2 при кажд. из a, b или c взятом $=2^{16}\cdot 11^{19}$), $\Rightarrow$ вычитаем 3; $a=2^{16}\cdot 11^{19}$ и $b=c$ ($\Rightarrow =22$ (НОД)) - 3 пары и посчитано 3 раза), $\Rightarrow$ итого в I вар. $3\cdot 31\cdot 37-3$ тройки;

Во 2-м варианте. $a=2^{16}\cdot 11^{x}$; $b=11^{19}\cdot 2^{y}$; (a никогда $\neq b$, иначе это I варианта, а не 2-го) $c=a=2^{16}\cdot 11$ (иначе, если $k>1$, НОД $\vdots 121$), $\Rightarrow y=1$. 3-ка с перестановками встречается 3 раза, а посчитана 6, $\Rightarrow (-3)$; $c=b=11^{19}\cdot 2$; $a=11\cdot 2^{16}$ - встреч. 3 раза, а посчитана 6, $\Rightarrow (-3)$; итого во 2-м варианте $6\cdot(30\cdot 36-1)-6$, $\Rightarrow$ итого общ. Σ кол-во троек $=3\cdot 31\cdot 37+6\cdot 30\cdot 36-15=$
$=3441+6480-15=9906$. Ответ: Всего 9906 троек.

21100596 (U334086 M1297744)

Задача 5. Чистовик. Страница 3

$a=\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, $b=\log_{(x+4)^2}(x+34)$, $c=\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$. Все эти логарифмы существуют, $\Rightarrow \begin{cases} 2x+23>0 \text{ и } 2x+23\neq 1 \\ -x-4>0 \text{ и } x+4\neq \pm 1 \\ x+34>0 \text{ и } x+34\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-11{,}5 \\ x<-4 \\ x\neq -5 \\ x\neq -11 \end{cases}$ (∇).

~~Пусть $a=b$, $\Rightarrow \frac{\ln(2x+23)}{\ln(\sqrt{x+34})}=\frac{\ln(x+34)}{\ln(x+4)^2}$, $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow 2\ln(-x-4)\cdot\ln(2x+23)=\frac{1}{2}\ln^2(x+34)$, тогда $b=c-1$, $\Rightarrow \frac{\ln(x+34)}{2\ln(-x-4)}=\frac{\ln(-x-4)}{\frac{1}{2}\ln(2x+23)}-1$, $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \frac{\ln(x+34)+2\ln(-x-4)}{2\ln(-x-4)}=\frac{2\ln(-x-4)}{\ln(2x+23)}$, $\Rightarrow 4\ln^2(-x-4)=\ln(2x+23)\cdot\ln((-x-4)^2(x+34))$, $\Rightarrow \left(\ln(2x+23)=\frac{\ln^2(x+34)}{4\ln(-x-4)}\right)$~~

~~$\Rightarrow 16\ln^3(-x-4)=\ln^2(x+34)\cdot\ln((-x-4)^2\cdot(x+34))=\underbrace{\ln^3(x+34)}_{>\ln^3}+\ln^2(x+34)\cdot\ln(x+4)^2$~~

$(\sqrt{x+34})^a=2x+23$; $((x+4)^2)^b=x+34$; $(\sqrt{2x+23})^c=-x-4$, $\Rightarrow \begin{cases} (x+34)^{\frac{a}{2}}=2x+23 \\ (2x+23)^{\frac{c}{2}}=-x-4 \\ (-x-4)^{2b}=x+34 \end{cases}$ (✱) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\left((x+34)^{\frac{a}{2}}\right)^{\frac{c}{2}}\right)^{2b}=(x+34)^{\left(\frac{abc}{2}\right)}=x+34$, $\Rightarrow \frac{abc}{2}=1$, $\Rightarrow$ I вар. $(a=b$ и $c=a+1)$: $a^2(a+1)=2$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow (a-1)(\underbrace{a^2+2a+2}_{D<0,\Rightarrow\text{ нет корней}})=0.$ $\Rightarrow$ условие выполняется только при $a=1$ ($\Rightarrow$ + учитывая перестановки): $\left[\begin{array}{l} a=b=1;\ c=2 \\ a=c=1;\ b=2 \\ b=c=1;\ a=2 \end{array}\right.$.

I) $x+34=(-x-4)^2$ и $\sqrt{x+34}=\sqrt{(-x-4)^2}=\underset{(>0)}{(-x-4)}=2x+23$, $\Rightarrow x=-9$ (подх. под усл. ∇) и все $=$-а из ✱ выполняются при $a=b=1$; $c=2$, $\Rightarrow$ подх.;

II) $-x-4=\sqrt{2x+23}=\sqrt[4]{x+34}$, $\Rightarrow (x+4)^4=x+34=(2x+23)^2$, $\Rightarrow 4x^2+91x+(23^2-34)=0.$

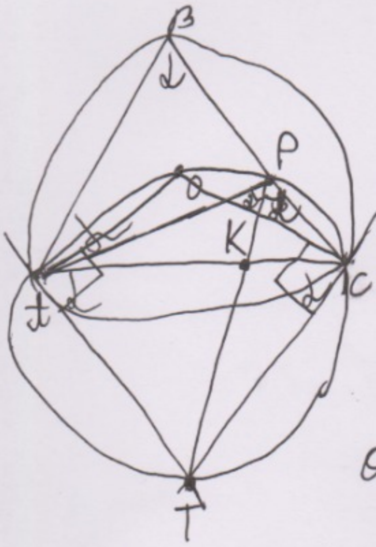
$D=91^2-16\cdot(23^2-34)=91^2-92^2+16\cdot 34=$

$=-183+340+180+24=361=19^2$, $\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-91\pm 19}{8}$, $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{110}{8} \text{ (не подх. к ∇, т.к. } 8x>-92\ (>-110)) \\ x=-9 \text{ – не подх., т.к. } 5^4\neq 25 \end{array}\right.$, $\Rightarrow$ нет подходящ. x-ов.

III) $(x+4)^2=(\sqrt{2x+23})^2=x+34$, $\Rightarrow x=34-23=11$ – не подх., т.к. $45\neq 15^2$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ единств. подходящий $x=-9$. Ответ: при $x=-9$.

Задача 6. Чистовик. Страница 4.



$S_{APK}=15$
$S_{CPK}=13$
S_{ABC} — ?
AC — ?
$\angle ABC=\arctg\frac{4}{7}$

1) $AT=TC$ (отрезки касательных); $\angle OAC=\angle OCT=90°$, ⇒ $W_2(O_2; O_2O)$, построенная на OT, как на диаметре, имеет на себе т. A и C (впис. $\angle$-ы $=90°$, опир. на диаметр), ⇒ (т.к. через 3 т. не на 1-й прям. A, O, C можно провести только одну окружность, то ей является W_2 и т. $A, O, P, C, T \in W_2$, тогда (из =-х вписанных $\angle$-ов, опир. на 1-у дугу):
$\angle APK (=\angle APT) = \alpha$ и $\angle TPC = \angle TAC$ = ($\angle$-ы при основ. Δ-а ATC (по опр.: $AT=TC$) =-ы по св-ву) $=\angle ACT=\angle APT=\alpha$, ⇒ PK — бис. $\angle$-а APC, ⇒ (т.к. $S_{APK}=\frac{AP\cdot PK\cdot\sin\alpha}{2}=15$ и $S_{CPK}=\frac{CP\cdot PK\cdot\sin\alpha}{2}=13$, ⇒ $\frac{S_{APK}}{S_{CPK}}=\frac{15}{13}=\frac{AP}{CP}$ = (бисс. PK в Δ-е APC) $\frac{AK}{KC}$, ⇒ $\begin{cases} AP=15x \\ CP=13x \end{cases}$ ⇒

2) При этом $OA=OC$ (радиусы) и $\angle AOT=\angle TOC=\alpha$ (впис., опир. на одинак. дуги) ⇒ $S_{\Delta APC}=S_{APK}+S_{CPK}=28=\frac{AP\cdot PC\cdot\sin 2\alpha}{2}$; $\angle AOC=2\alpha$, ⇒ (из $W(O; OB)$): $\angle ABC=\alpha$ (впис. и центр. $\angle$-ы, опир. на 1-у дугу), тогда $\angle ABC=\angle TPC=\alpha$, ⇒ (соотв. $\angle$-ы =-ы): $AB \parallel PT$, при этом $\angle APC$ — внешний для Δ-а APB, ⇒ $\angle BAP=\angle APC-\angle ABP=2\alpha-\alpha=\alpha$, ⇒ (по призн.: $\angle$-ы при основ. =-ы) ΔABP — равнобедр. с основ. AB, ⇒ $AP=PB=15x$, ⇒ $S_{\Delta APB}=\frac{BP\cdot PA\cdot\sin\angle APB}{2}=\frac{(15x)^2\cdot\sin(2\alpha)}{2}$ (т.к. $\angle APB=180°-\angle APC=180°-2\alpha$ и $\sin 2\alpha=\sin(180°-2\alpha)$ (смежн. $\angle$-ы)) $=\frac{15}{13}\cdot\frac{(13x)\cdot(15x)\cdot\sin 2\alpha}{2}=\frac{15}{13}\cdot S_{\Delta APC}=\frac{15}{13}\cdot 28$, ⇒ $S_{\Delta ABC}=S_{APC}+S_{APB}=28\cdot\left(1+\frac{15}{13}\right)=\frac{28^2}{13}$.

3) $tg\alpha=tg\angle ABC=\frac{4}{7}$, ⇒ ($\alpha$ — остр. по усл. и $tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, ⇒ $\cos^2\alpha=\frac{49}{49+16}$, ⇒ $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{16}{65}$, ⇒ $\sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{65}}$), ⇒ $\sin 2\alpha=2(\sin\alpha)(\cos\alpha)=\frac{56}{65}$. Из Δ-а ATC по Th sin-ов: $\frac{AT}{\sin\alpha}=2R_{w_2}=OT=\sqrt{OA^2+AT^2}$ (Th Пифагора) и $\frac{AC}{\sin(2\alpha)}=2R_{w_2}$ и $\frac{AC}{\sin\alpha}=2R_w=2OA$, ⇒ $(AT=y)$: $y=\frac{4}{\sqrt{65}}\cdot\sqrt{R_w^2+y^2}$ $|^2$, ⇒ $\frac{49y^2}{65}=\frac{16R_w^2}{65}$; $AC=2R_w\cdot\frac{4}{\sqrt{65}}$ ~~[illegible]~~

$\frac{S_{APC}}{28}=\frac{15\cdot 13\cdot x^2\cdot 56}{65\cdot 2}=28$, ⇒ $x=\sqrt{\frac{1}{3}}$, ⇒ (по Th cos-ов) $AC^2=AP^2+CP^2-2AP\cdot CP\cdot\cos 2\alpha$, ⇒

Чистовик

$$\Rightarrow LC^2 = \frac{15^2}{3} + \frac{13^2}{3} - \frac{2\cdot 15\cdot 13}{3}\cdot\left(\sqrt{1-\left(\frac{56}{65}\right)^2}\right) = 75 + \frac{169}{3} - \frac{\overset{2}{\cancel{130}}}{\cancel{65}}\cdot\sqrt{9\cdot 121} = 75 - 66 + \frac{169}{3} = \frac{196}{3}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (LC>0)\ LC = \frac{14}{\sqrt{3}};$$

Ответ: — — ; $S_{ABC} = \frac{28^2}{13}$.