Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100569**

ID профиля: **275442**

Вариант 23

$2+\sqrt{32-(a+2)^2}$

ЧИСТОВИК
лист 2

РНОВИК

ЧЕРНОВИК

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=S$

$S=\frac{a_1+a_1+5d}{2}\cdot 6=3(2a_1+5d)$

$\cancel{\frac{13}{5}}$ $a_{10}=a_1+9d$ $13\sqrt{3}$

$a_{16}=a_1+15d$

60

$a_{10}\cdot a_{16}=a_1^2+15a_1d+9a_1d+9\cdot 15d^2$

$a_1^2+24a_1d+9\cdot 15d^2>6a_1+15d+39$

$(a_1+10d)(a_1+14d)$

$\cancel{a_1^2}+\cancel{24a_1d}+10\cdot 14d^2<\cancel{6a_1}+\cancel{15d}+55$ ⊕

$\cancel{6a_1+15d+39}$ $<a_1^2+\cancel{24a_1d}+9\cdot 15d^2$

4
15
9
135

$10\cdot 14d^2-9\cdot 15d^2<16$

$5(28-27)d^2<16$

$d^2<\frac{16}{5}$

$d\in\left(-\sqrt{\frac{16}{5}};\sqrt{\frac{16}{5}}\right)$

<2

$\overset{\shortparallel}{d}=1.$

$a_1^2+\underbrace{18a_1}_{-18}+70<0$ $7\ \ 10$ $2\ \ 5$

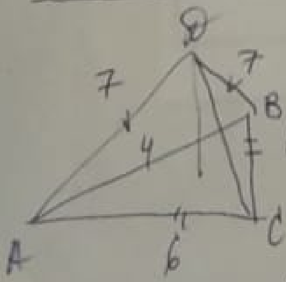
$a_1^2+24a_1+9\cdot 15-6a_1-15-39>0$

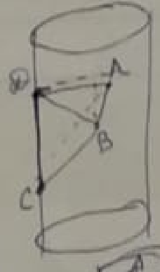
$a_1^2+18a_1+8\cdot 15-3\cdot 13>0$

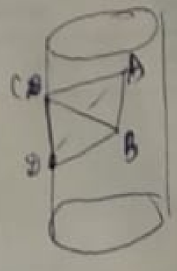
$a_1^2+\underbrace{18a_1}_{-18}+3(40-13)>0$

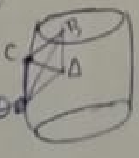
3 · 27
9 3

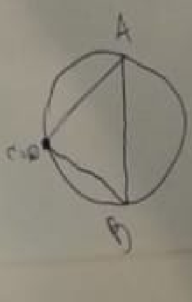
$(a_1+9)^2>0$

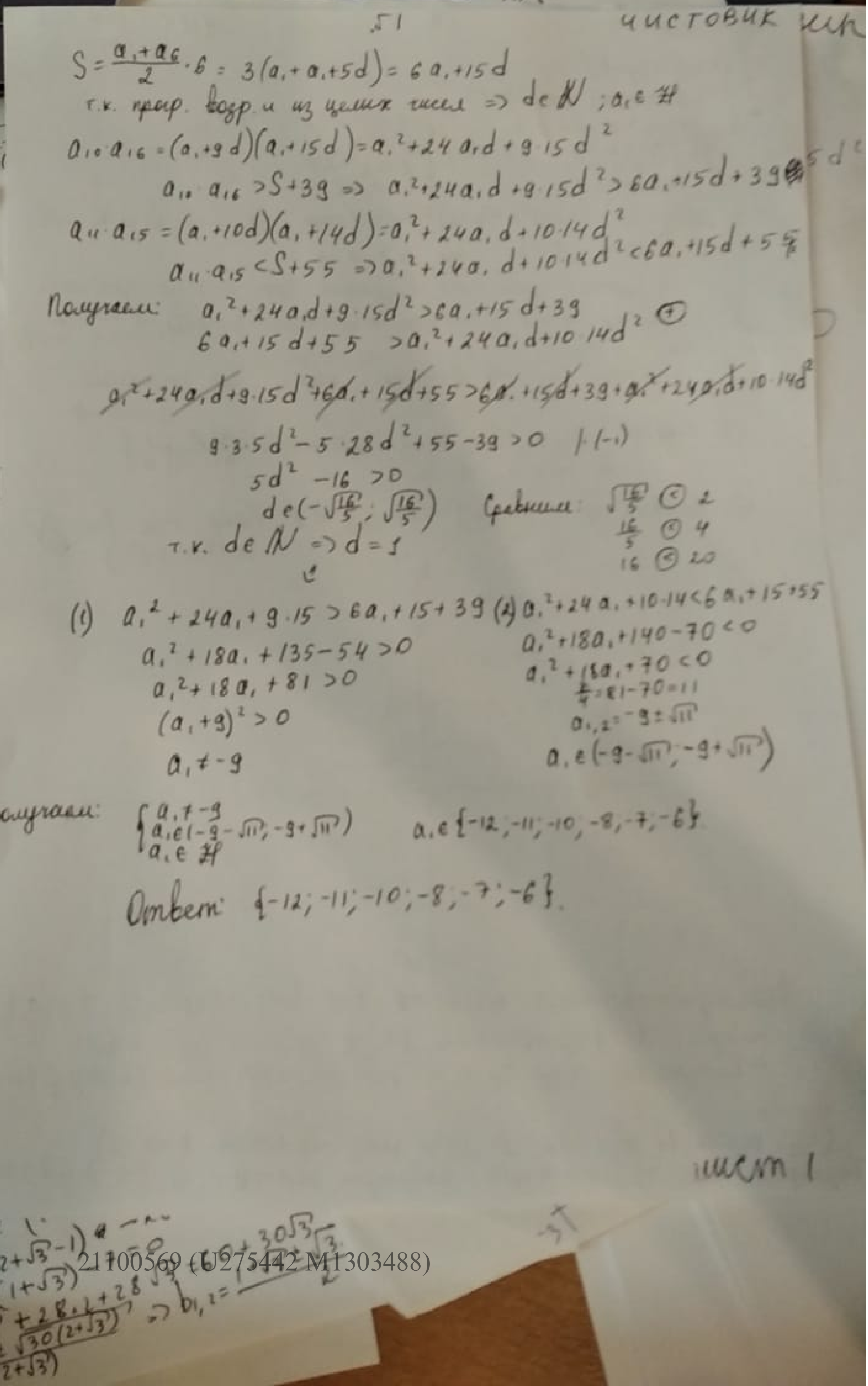












№1 ЧИСТОВИК

$S=\frac{a_1+a_6}{2}\cdot 6=3(a_1+a_1+5d)=6a_1+15d$

т.к. прог. возр. и из целых чисел $\Rightarrow d\in\mathbb{N}$; $a_1\in\mathbb{Z}$

$a_{10}\cdot a_{16}=(a_1+9d)(a_1+15d)=a_1^2+24a_1d+9\cdot15d^2$

$a_{10}\cdot a_{16}>S+39\Rightarrow a_1^2+24a_1d+9\cdot15d^2>6a_1+15d+39$

$a_{11}\cdot a_{15}=(a_1+10d)(a_1+14d)=a_1^2+24a_1d+10\cdot14d^2$

$a_{11}\cdot a_{15}<S+55\Rightarrow a_1^2+24a_1d+10\cdot14d^2<6a_1+15d+55$

Получаем: $a_1^2+24a_1d+9\cdot15d^2>6a_1+15d+39$ ⊕

$6a_1+15d+55>a_1^2+24a_1d+10\cdot14d^2$

$\cancel{a_1^2}+\cancel{24a_1d}+9\cdot15d^2+\cancel{6a_1}+\cancel{15d}+55>\cancel{6a_1}+\cancel{15d}+39+\cancel{a_1^2}+\cancel{24a_1d}+10\cdot14d^2$

$9\cdot3\cdot5d^2-5\cdot28d^2+55-39>0\quad|\cdot(-1)$

$5d^2-16>0$

$d\in\left(-\sqrt{\frac{16}{5}};\sqrt{\frac{16}{5}}\right)$ Сравним: $\sqrt{\frac{16}{5}}$ ⓒ 2

$\frac{16}{5}$ ⓒ 4

т.к. $d\in\mathbb{N}\Rightarrow d=1$ 16 ⓒ 20

(1) $a_1^2+24a_1+9\cdot15>6a_1+15+39$

$a_1^2+18a_1+135-54>0$

$a_1^2+18a_1+81>0$

$(a_1+9)^2>0$

$a_1\neq-9$

(2) $a_1^2+24a_1+10\cdot14<6a_1+15+55$

$a_1^2+18a_1+140-70<0$

$a_1^2+18a_1+70<0$

$\frac{D}{4}=81-70=11$

$a_{1,2}=-9\pm\sqrt{11}$

$a_1\in(-9-\sqrt{11};-9+\sqrt{11})$

Получаем: $\begin{cases}a_1\neq-9\\a_1\in(-9-\sqrt{11};-9+\sqrt{11})\\a_1\in\mathbb{Z}\end{cases}$ $a_1\in\{-12;-11;-10;-8;-7;-6\}$

Ответ: $\{-12;-11;-10;-8;-7;-6\}$.

лист 1

зык
сть
усло-
D//001:

$(\cdot)\cap\ b_1=(2-\sqrt3)a$ и $a^2+b^2=32 \Rightarrow b=\sqrt{32-a^2}$

$$a^2+a^2(4+3-4\sqrt3)=32$$

$$a^2(8-4\sqrt3)=32$$

$$a=\pm\sqrt{\frac{8}{2-\sqrt3}} \Rightarrow b=\pm\sqrt{8(2-\sqrt3)}$$

$(\cdot)\cap\ b_2=(2+\sqrt3)a$ и $a^2+b^2=32$

$$a^2+a^2(7+4\sqrt3)=32$$

$$a=\pm\sqrt{\frac{8}{2+\sqrt3}} \Rightarrow b=\pm\sqrt{8(2+\sqrt3)}$$

$$S_2=\int_{-\sqrt{\frac{8}{2+\sqrt3}}}^{0}\left(a(2+\sqrt3)-\sqrt{32-a^2}\right)da+\int_{0}^{\sqrt{\frac{8}{2-\sqrt3}}}\left(a(2-\sqrt3)-\sqrt{32-a^2}\right)da=$$

$$\cancel{=\frac{2+\sqrt3}{2}a^2-\frac{(32-a^2)^{\frac32}}{\frac32}\Bigg|_{-\sqrt{\frac{8}{2+\sqrt3}}}^{0}+\frac{2-\sqrt3}{2}a^2-\frac{(32-a^2)^{\frac32}}{\frac32(-2a)}\Bigg|_{0}^{\sqrt{\frac{8}{2-\sqrt3}}}}=$$

$$\cancel{=32\sqrt{32}}$$

$$S_{общ}=32\pi+\int_{-\sqrt{\frac{8}{2+\sqrt3}}}^{0}(2+\sqrt3)a\,da+\int_{0}^{\sqrt{\frac{8}{2-\sqrt3}}}(2-\sqrt3)a\,da-\int_{-\sqrt{\frac{8}{2+\sqrt3}}}^{\sqrt{\frac{8}{2-\sqrt3}}}\sqrt{32-a^2}\,da-$$

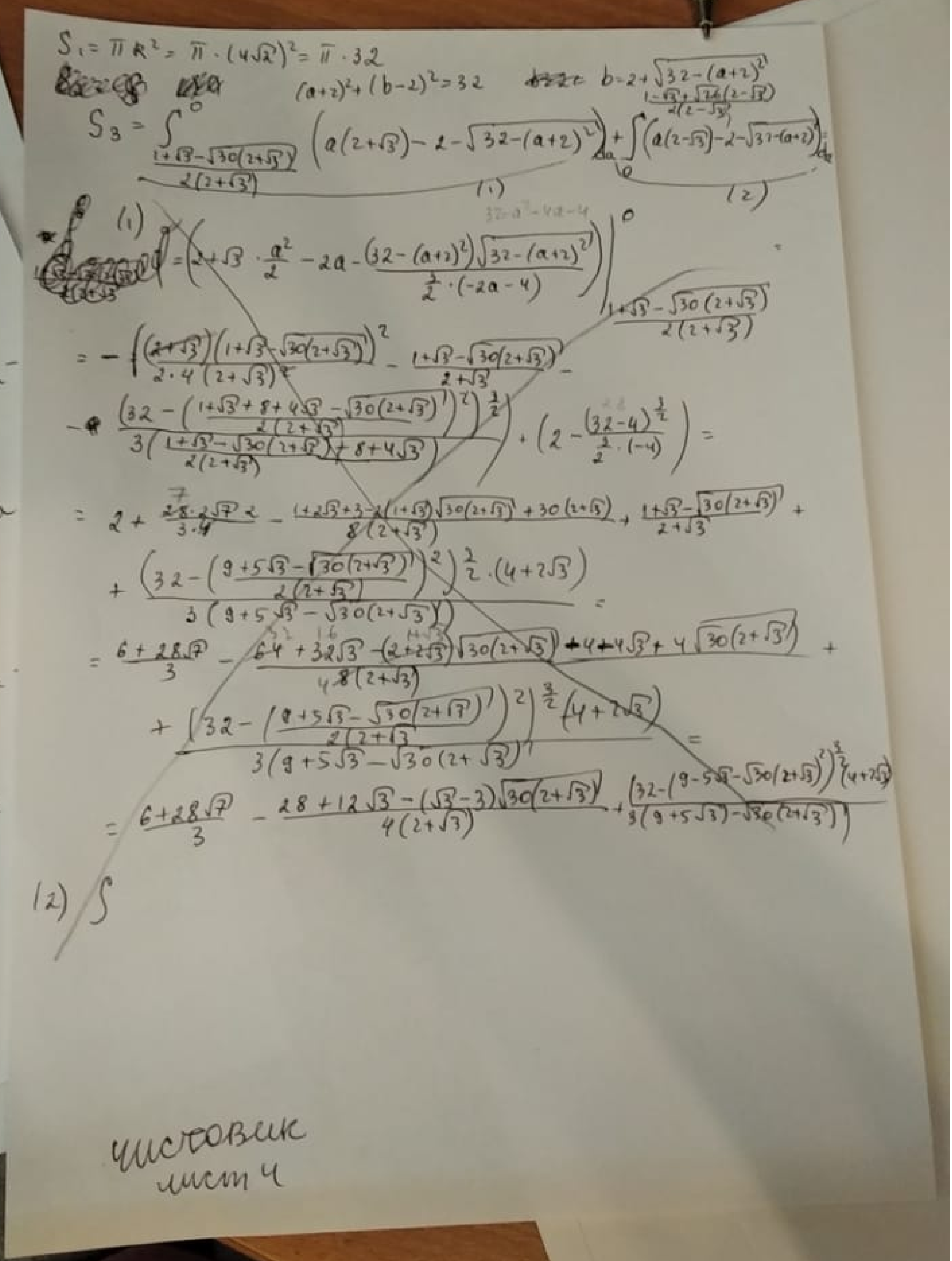
$$-\int_{\frac{1+\sqrt3-\sqrt{30(2+\sqrt3)}}{2(2+\sqrt3)}}^{0}(2+\sqrt3)a\,da-\int_{0}^{\frac{1-\sqrt3+\sqrt{26(2-\sqrt3)}}{2(2-\sqrt3)}}(2-\sqrt3)a\,da+\int_{\frac{1+\sqrt3-\sqrt{30(2+\sqrt3)}}{2(2+\sqrt3)}}^{\frac{1-\sqrt3+\sqrt{26(2-\sqrt3)}}{2(2-\sqrt3)}}\left(2+\sqrt{32-(a+2)^2}\right)da$$

Не ~~[illegible]~~ успела посчитать

Ответ: $32\pi+\int_{-\sqrt{\frac{8}{2+\sqrt3}}}^{0}a(2+\sqrt3)da+\int_{0}^{\sqrt{\frac{8}{2-\sqrt3}}}a(2-\sqrt3)da-\int_{-\sqrt{\frac{8}{2+\sqrt3}}}^{\sqrt{\frac{8}{2-\sqrt2}}}\sqrt{32-a^2}\,da-$

$$-\int_{\frac{1+\sqrt3-\sqrt{30(2+\sqrt3)}}{2(2+\sqrt3)}}^{0}(2+\sqrt3)a\,da-\int_{0}^{\frac{1-\sqrt3+\sqrt{26(2-\sqrt2)}}{2(2-\sqrt3)}}(2-\sqrt3)a\,da+\int_{\frac{1+\sqrt3-\sqrt{30(2+\sqrt3)}}{2(2+\sqrt3)}}^{\frac{1-\sqrt3+\sqrt{26(2-\sqrt3)}}{2(2-\sqrt3)}}\left(2+\sqrt{32-(a+2)^2}\right)da.$$

чистовик
лист 5



$S_1 = \pi R^2 = \pi \cdot (4\sqrt{2})^2 = \pi \cdot 32$

$(a+2)^2 + (b-2)^2 = 32 \qquad b = 2 + \sqrt{32-(a+2)^2}$

$$S_3 = \underbrace{\int_{\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{30(2+\sqrt{3})}}{2(2+\sqrt{3})}}^{0} \left(a(2+\sqrt{3}) - 2 - \sqrt{32-(a+2)^2}\right) da}_{(1)} + \underbrace{\int_{0}^{\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{26}(2-\sqrt{3})}{2(2-\sqrt{3})}} \left(a(2-\sqrt{3}) - 2 - \sqrt{32-(a+2)^2}\right) da}_{(2)} =$$

(1)

$32 - a^2 - 4a - 4$

$$= \left(2+\sqrt{3} \cdot \frac{a^2}{2} - 2a - \frac{(32-(a+2)^2)\sqrt{32-(a+2)^2}}{\frac{3}{2} \cdot (-2a-4)}\right)\Bigg|_{\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{30(2+\sqrt{3})}}{2(2+\sqrt{3})}}^{0} =$$

$$= -\left(\frac{(2+\sqrt{3})(1+\sqrt{3}-\sqrt{30(2+\sqrt{3})})^2}{2 \cdot 4 (2+\sqrt{3})^2} - \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{30(2+\sqrt{3})}}{2+\sqrt{3}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\left(32 - \left(\frac{1+\sqrt{3}+8+4\sqrt{3}-\sqrt{30(2+\sqrt{3})}}{2(2+\sqrt{3})}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3\left(\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{30(2+\sqrt{3})}}{2(2+\sqrt{3})} + 8 + 4\sqrt{3}\right)}\right) + \left(2 - \frac{(32-4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot (-4)}\right) =$$

$$= 2 + \frac{\overset{7}{\cancel{28}} \cdot 2\sqrt{7} \cdot 2}{3 \cdot 4} - \frac{1+2\sqrt{3}+3-2(1+\sqrt{3})\sqrt{30(2+\sqrt{3})}+30(2+\sqrt{3})}{8(2+\sqrt{3})} + \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{30(2+\sqrt{3})}}{2+\sqrt{3}} +$$

$$+ \frac{\left(32 - \left(\frac{9+5\sqrt{3}-\sqrt{30(2+\sqrt{3})}}{2(2+\sqrt{3})}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot (4+2\sqrt{3})}{3(9+5\sqrt{3}-\sqrt{30(2+\sqrt{3})})} =$$

$$= \frac{6+28\sqrt{7}}{3} - \frac{\overset{32}{\cancel{64}} + \overset{16}{\cancel{32\sqrt{3}}} - \overset{1+\sqrt{3}}{\cancel{(2+2\sqrt{3})}}\sqrt{30(2+\sqrt{3})} + 4 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{30(2+\sqrt{3})}}{4 \cancel{8}(2+\sqrt{3})} +$$

$$+ \frac{\left(32 - \left(\frac{9+5\sqrt{3}-\sqrt{30(2+\sqrt{7})}}{2(2+\sqrt{3})}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} (4+2\sqrt{3})}{3(9+5\sqrt{3}-\sqrt{30(2+\sqrt{3})})} =$$

$$= \frac{6+28\sqrt{7}}{3} - \frac{28+12\sqrt{3}-(\sqrt{3}-3)\sqrt{30(2+\sqrt{3})}}{4(2+\sqrt{7})} + \frac{\left(32-\left(9-5\sqrt{3}-\sqrt{30(2+\sqrt{3})}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}(4+2\sqrt{3})}{3(9+5\sqrt{3})-\sqrt{30(2+\sqrt{3})}}$$

(2) $\int$

чистовик
лист 4

№ 3

ЧИСТОВИК
лист 2

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le \min(-4a+4b,8)\end{cases} \quad (1)$$

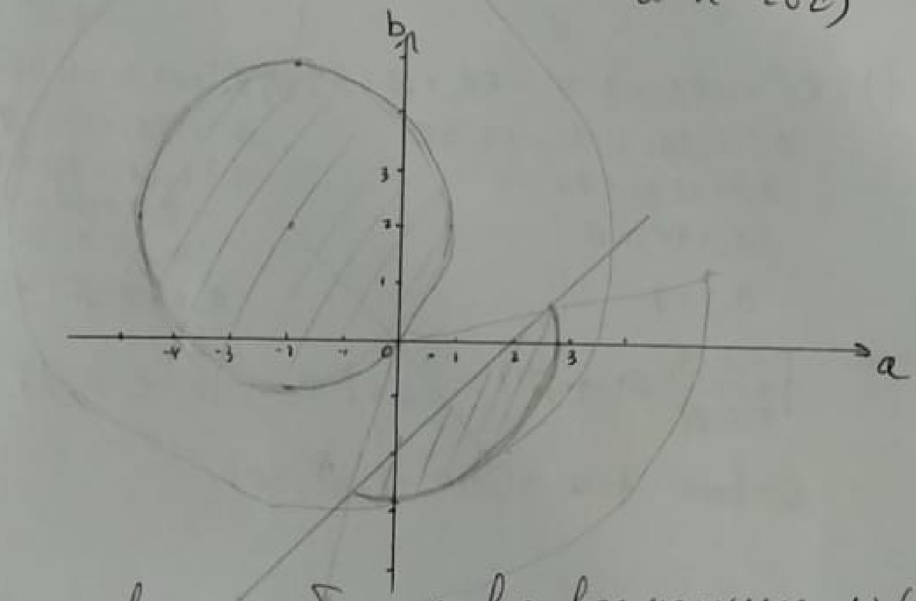
(1) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le -4a+4b\\ -4a+4b\le 8\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\le 8\\ -4a+4b\ge 8\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a+2)^2+(b-2)^2\le 8\\ b-a\ge 2\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\le 8\\ b-a\le 2\end{cases}\end{array}\right.$

① Постр. гр. $(a+2)^2+(b-2)^2=8$ (окр. с ц. $(-2;2)$ и $R=2\sqrt{2}$) в сист. aob на $b\ge a-2$ и рассм. плоск-ть внутри окр. и над прямой $b=a-2$

② Постр. гр. $a^2+b^2\le 8$ (окр. с ц. $(0;0)$ и $R=2\sqrt{2}$) в сист. aob на $b\le a-2$ и рассм. пл-ть внутри окр. и под прямой $b=a-2$

③ Постр. гр. ф. $b=a-2$ (прямая) $\begin{array}{c|c|c|} a & 0 & 2 \\ \hline b & -2 & 0 \end{array}$ в сист. aob.

④ Постр. гр. $(a-x)^2+(b-y)^2\le 8$ (окр. с ц. $(x;y)$ и $R=2\sqrt{2}$)



Заштрихованная область – все возможные (·) $(a;b)$. Тогда найдем всевозможные $(x;y)$ такие, что если в (·) $(x;y)$ построить окр-ть с $R=2\sqrt{2}$, то эта обл-ть будет $\cap$ окр-ть.

1 сл. окр-ть $\cap$ обл-ть 1. (т.е над прямой $b=a-2$)
Подходят все (·), лежащие внутри окр-ти с ц. $(-2;2)$ и $R=4\sqrt{2}$

2сл. окр-ть ∩ обл-ть 2 (т.е под прямой $b=a-2$)

Нам подходит та часть ~~окр~~ пл-ть, огранич-я окр-стью с ц. $(0;0)$ и $R = 4\sqrt{2}$, прямыми, прох-ми через (·)$(0;0)$ и (·)∩ $b=a-2$ и окр-ти $a^2+b^2=8$.

Найдем (·)∩: $a^2+b^2=8 \cap b=a-2$

$$a^2+a^2-4a+4=8$$
$$2a^2-4a-4=0$$
$$a^2-2a-2=0$$
$$\frac{D}{4}=1+2=3$$
$$a_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$$
$$1+\sqrt{3} \Rightarrow b=-1+\sqrt{3}$$
$$1-\sqrt{3} \Rightarrow b=-1-\sqrt{3}$$

$b_1 = ka+c$

прох. через (·)$(0;0)$ и $(1+\sqrt{3}; -1+\sqrt{3})$

$$0=c$$
$$-1+\sqrt{3}=k(1+\sqrt{3}) \qquad k=\frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{2}=\frac{3+1-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

$$\boxed{b_1=(2-\sqrt{3})a}$$

$b_2=ka+c$ прох. через (·)$(0;0)$ и $(1-\sqrt{3}; -1-\sqrt{3})$

$$0=c$$
$$-1-\sqrt{3}=(1-\sqrt{3})k \qquad k=\frac{-1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\frac{(-1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{1-3}=\frac{3+1+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

$$\boxed{b_2=(2+\sqrt{3})a}$$

Тогда общая $S=S_1+S_2-S_3$

S_3 – S обл-ть, заключ. между $b_1=a(2-\sqrt{3})$; $b_2=a(2+\sqrt{3})$ и окр-тью $(a+2)^2+(b-2)^2=32$

Найдем (·)∩: b_1 и окр:

$$a^2+4a+4+a^2(4+3-4\sqrt{3})-4a(2-\sqrt{3})+4=32$$
$$a^2(8-4\sqrt{3})-4a(2-\sqrt{3}-1)-24=0 \quad |:4$$
$$a^2(2-\sqrt{3})-a(1-\sqrt{3})-6=0$$
$$D=1+3-2\sqrt{3}+24\cdot2-24\cdot\sqrt{3}=52-26\sqrt{3}$$
$$a_{1,2}=\frac{1-\sqrt{3}\pm\sqrt{26(2-\sqrt{3})}}{4-2\sqrt{3}} \Rightarrow b_{1,2}=\frac{1-\sqrt{3}\pm\sqrt{26(2-\sqrt{3})}}{2}$$

Найдем (·)∩: b_2 и окр

$$a^2+4a+4+a^2(4+3+4\sqrt{3})-4a(2+\sqrt{3})=32$$
$$a^2(8+4\sqrt{3})-4a(2+\sqrt{3}-1)-28=0 \quad |:4$$
$$a^2(2+\sqrt{3})-a(1+\sqrt{3})-7=0$$
$$D=1+3+2\sqrt{3}+28\cdot2+28\sqrt{3}=60+30\sqrt{3}$$
$$a_{1,2}=\frac{1+\sqrt{3}\pm\sqrt{30(2+\sqrt{3})}}{2(2+\sqrt{3})} \Rightarrow b_{1,2}=\frac{1+\sqrt{3}\pm\sqrt{30(2+\sqrt{3})}}{2}$$

чистовик
лист 3

$a^2 + a^2(4+$

$a^2(8-4\sqrt{3}) = $

$\Rightarrow b =$

$a^2+b^2=32$

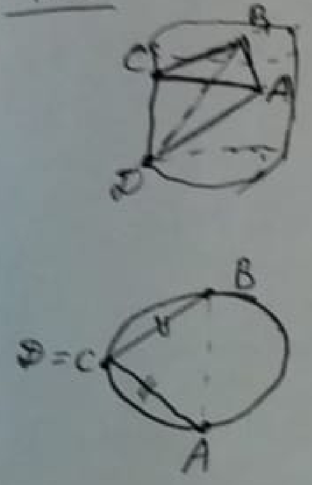
$a = \sqrt{\frac{8}{2-\sqrt{3}}}$

$\sqrt{3}$

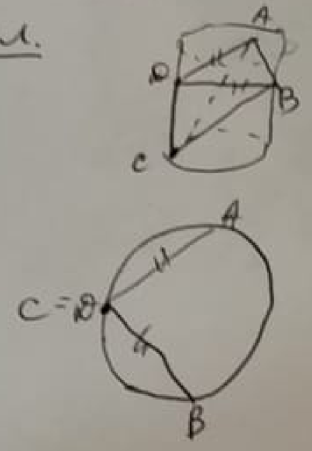
Листовик
лист 6

Возможны 2 случая впис-го тетраэдра при условии, что все ~~из~~ вершины с бок. пов-ти и $CD \parallel OO_1$:

1сл.



2сл.



$(a(2-\sqrt{3}) - \sqrt{32-a^2})da =$

$\sqrt{\frac{8}{2-\sqrt{3}}}$

$(32-a^2)^{\frac{3}{2}}$

$\frac{3}{2}(-2a)$

0

$=$

$\sqrt{32-a^2}\,da$

$-\sqrt{\frac{8}{2+\sqrt{3}}}$

$\sqrt{3})\,a\,da -$

$\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{26(2-\sqrt{3})}}{2(2-\sqrt{3})}$

$+\int (2+\sqrt{32-(a+2)^2})\,da$

$\sqrt{30(2+\sqrt{3})}$

$(2+\sqrt{3})$

$\sqrt{\frac{8}{2-\sqrt{3}}}$

$\int \sqrt{32-a^2}\,d$

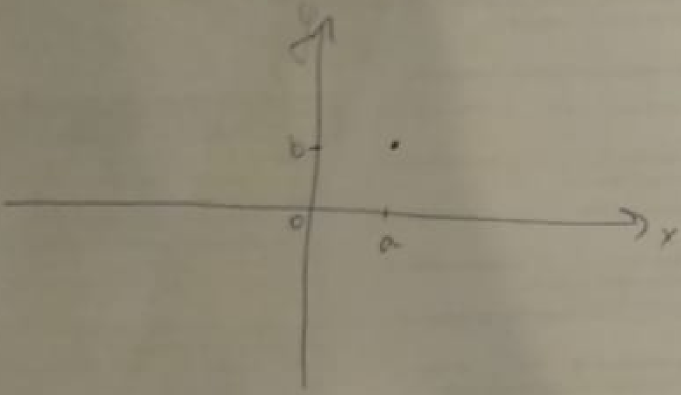
ЧЕРНОВИК

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le\min(-4a+4b, 8)\end{cases}$$

$-4a+4b<8$

$-a+b<2$

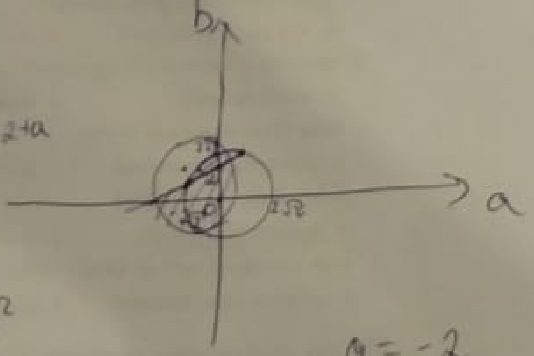
$b-a<2$



$\boxed{1сл}$ $\begin{cases}a^2+b^2\le-4a+4b\\ b-a<2\end{cases}$ $\begin{cases}a^2+4a+4+b^2-4b+4\le 8\\ b-a<2\end{cases}$

$\begin{cases}(a+2)^2+(b-2)^2\le 8\\ b-a<2\end{cases}$ $b<2+a$

$\boxed{2сл}$ $\begin{cases}a^2+b^2\le 8\\ b-a>2\end{cases}$ $b>2+a$



$b>2+a$

$b^2>4+4a+a^2$

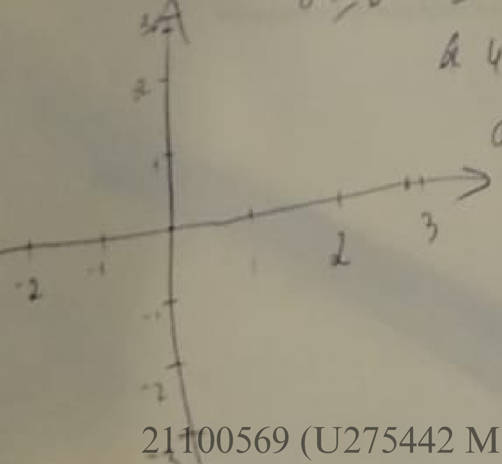
$8\ge b^2+a^2\ge 4+4a+2a^2$

$4\ge 2+2a+a^2$

$a^2+2a-2\le 0$

$a=-2$

$(b-2)^2\le 8$



$=60+30\sqrt{3}$

$\frac{1+\sqrt{3}\pm\sqrt{30(2+\sqrt{3}}}{2}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100569**

ID профиля: **275442**

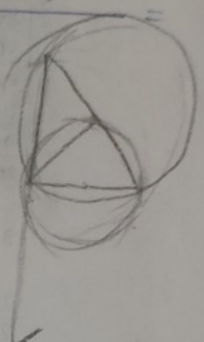
Вариант 23

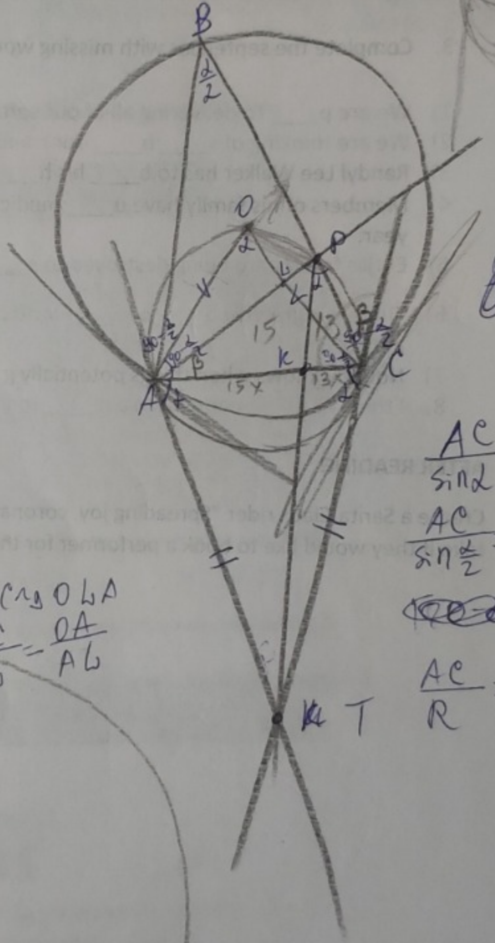
$$\frac{PC \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{(x+PC)\cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\beta \cdot \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\beta \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}$$

ЧЕРНОВИК

$$\frac{x+PC}{PC} = \frac{2\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\beta\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\beta\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\beta\cdot\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}.$$





$$\frac{x\cdot \cancel{PK}\cdot\sin 1}{\cancel{2}} \Big/ \frac{PC\cdot\cancel{PK}\cdot\sin(\alpha-1)}{\cancel{2}} = \frac{15}{13}$$

$$\frac{x\cdot\sin\alpha}{PC\cdot\sin(\alpha-1)} = \frac{15}{13}$$

$$\frac{x}{PC} = \frac{15}{13}\cdot\frac{\sin(\alpha-1)}{\sin\alpha}$$

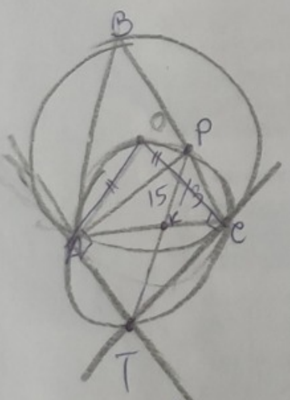
Δ PLC ∼ Δ OLA

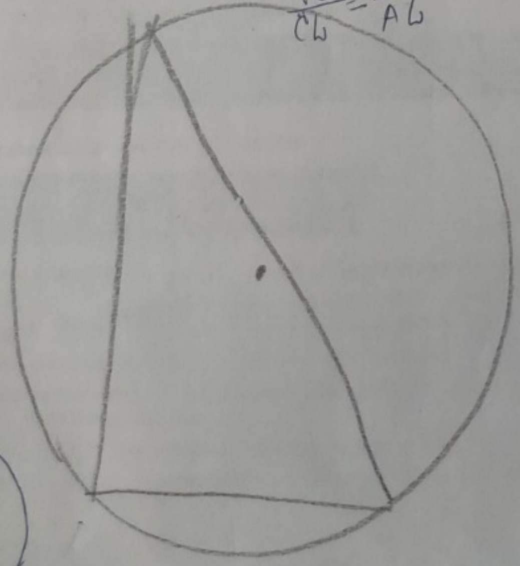
$$\frac{PC}{CL} = \frac{OA}{AL}$$

$$\frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{R}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{AC}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2R$$

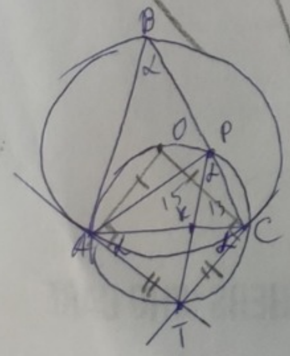
$$\frac{AC}{R} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cancel{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\cancel{\cos\frac{\alpha}{2}}}$$





$$\frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{PC}{\sin\beta}$$

$$\frac{AC}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{BC}{\sin\left(180-\frac{\alpha}{2}-180+\alpha+\beta\right)}$$



$$\frac{AC}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{PC\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{BC}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}$$

НОД (a; b; c) = 22

НОК (a; b; c) = $2^{16} \cdot 11^{19}$

$\sqrt{34-11,5} = \sqrt{22,5}$

A = $\log_{5} 5 = 1$

B = $\log_{25} 25 = 1$

C = $\log_{\sqrt{5}} 5 = 2$

ЧЕРНОВИК

C = 1.

$-b = a$

$2x + 2^3 = x^2 + 4x + 16$

$x^2 + 2x - 7 = 0$

$\frac{8}{4} = 1 + 7 = 8$

$x_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{2}$

только $-1 + 2\sqrt{2}$

9 8

⊖ ⊕ $-2\sqrt{2}$

8

$\boxed{реш}$

1 сл. $a = b = c \Rightarrow$ НОК = НОД

2 сл. $a = b \neq c$ НОД (a; c) = 22

НОК (a; c) = $2^{16} \cdot 11^{19}$

$\left[\begin{cases} a = 22 \\ c = 2^{16} \cdot 11^{19} \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2^{16} \cdot 11^{19} \\ c = 22 \end{cases}\right.$

22 A A

A 22 A

A A 22

3 сл. $a \neq b \neq c$

$12 = 2^2 \cdot 3$

1 2 3 4 6 12

$(2+1)(1+1) = 3 \cdot 2 = 6$

22 22

2·22 t 22

4·22 k 22

НОК (a; b; c) = 22 · НОК (t; k), $t, k \neq 1$

НОК (t; k) = $2^{15} \cdot 11^{18}$

1 сл) $\left[\begin{array}{l} t = 2^{15} \cdot 11^{18} \\ k = 2^{15} \cdot 11^{18} \end{array}\right. \Rightarrow$

15·18 − 1

Кол-во делителей −2

16·19

55

36

$\frac{23}{\overset{23}{\cancel{69}}}$ $\frac{\times 16}{\frac{69}{\overset{}{\cancel{32}}}}$

$\frac{495}{45} / 99$

$-\frac{55}{4} = -1$

12

4

48

AB = 2 · x · cos $\frac{\alpha}{2}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}AB}{x}$

2 сл. $\frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{PC}{\sin\beta}$

$\frac{AC}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{x + PC}{\sin(\beta + \frac{\alpha}{2})}$

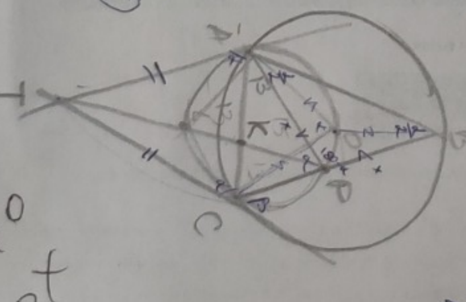
$\frac{PC}{\sin\beta} = \frac{x}{\sin(180 - \alpha - \beta)}$

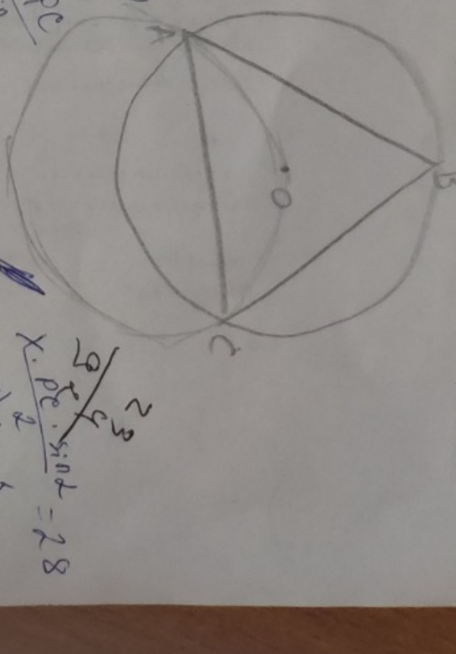
$\frac{x + PC}{\sin(\beta + \frac{\alpha}{2})} = \frac{2x\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin(180 - \alpha - \beta)}$

$\frac{PC}{\sin}$

$\frac{5}{\overset{}{144}}$

$\frac{16}{304}$





$-4 > 0$

$x > 7$

$\frac{28}{\frac{28}{224}}$ 16

$\frac{56}{784}$

$190 - \frac{\alpha}{2} - (180 - \alpha) =$

T C

$S_{\triangle APC}$

$\frac{AC}{\sin}$

$\frac{CK}{KA} = \frac{13}{15}$

$= \frac{(x+PC) \cdot x \cdot \sin\alpha}{2}$

$= \frac{(x+PC) \cdot 28}{PC} =$

$= 28 + \frac{x \cdot 28}{PC}$

$\frac{x \cdot PC \cdot \sin\alpha}{2} = 28$

$\frac{(x+PC) \cdot 2x\cos\frac{\alpha}{2}}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} =$

Вариант. 23.

чистовик
лист 7

№ 4

$НОД(a; b; c) = 22$
$НОК(a; b; c) = 2^{16} \cdot 11^{19}$ $\Rightarrow$ $\boxed{0 \text{ реш}}$

1сл. $a = b = c \Rightarrow НОД(a; b; c) = НОК(a; b; c)$

2сл. $\left[\begin{array}{l} a = b \neq c \\ a = c \neq b \\ b = c \neq a \end{array}\right. \Rightarrow$ ~~НОД(A; B)~~ $НОД(A; B) = 22$, где A, B – два различных числа из (a; b; c)
$НОК(A; B) = 2^{16} \cdot 11^{19}$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} A = 22 \\ B = 2^{16} \cdot 11^{19} \end{cases} \\ \begin{cases} A = 2^{16} \cdot 11^{19} \\ B = 22 \end{cases} \end{array}\right.$ в силу взаимозаменяемость A, B

Получаем всего $\boxed{3 \text{ реш}}$:
$(a; b; c) = (22; 2^{16} \cdot 11^{19}; 2^{16} \cdot 11^{19})$
$(a; b; c) = (2^{16} \cdot 11^{19}; 22; 2^{16} \cdot 11^{19})$
$(a; b; c) = (2^{16} \cdot 11^{13}; 2^{16} \cdot 11^{19}; 22)$

3сл. $a \neq b \neq c$
т.к. $НОК(a; b; c) = 22 \cdot 2^{15} \cdot 11^{18} = 2^{15} \cdot 11^{18} \cdot НОД(a; b; c)$,

то $\left[\begin{array}{l} a = 22 \\ b = t \cdot 22 \\ c = k \cdot 22 \end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l} a = t \cdot 22 \\ b = 22 \\ c = k \cdot 22 \end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l} a = t \cdot 22 \\ b = k \cdot 22 \\ c = 22 \end{array}\right.$

$\begin{cases} t \neq 1 \\ k \neq 1 \\ t \neq k \end{cases}$

(т.к. t и k взаимозам-мы, то всего 6 случаев)

Рассм. ① сл, остальные аналогичны.

$НОК(22; t \cdot 22; k \cdot 22) = 22 \cdot 2^{15} \cdot 11^{18}$

а $\overset{\shortparallel}{НОК}(a; b; c) = НОК(t; k) \cdot 22$

$\overset{\shortparallel}{НОК}(t; k) = 2^{15} \cdot 11^{18}$

1сл) $\left[\begin{array}{l} t = 2^{15} \cdot 11^{18} \Rightarrow \text{всего } 16 \cdot 19 - 2 \text{ пар } (t; k) \\ k = 2^{15} \cdot 11^{18} \Rightarrow \text{всего } 16 \cdot 19 - 2 \text{ пар } (t; k) \end{array}\right.$

2сл) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t = 2^{15} \\ k = 11^{18} \end{cases} \\ \begin{cases} t = 11^{18} \\ k = 2^{15} \end{cases} \end{array}\right.$ 2 пары $(t; k)$

3сл) если $t = 2^{n} \cdot 11^{m}$, $k = 2^{15-n} \cdot 11^{18-m}$, то если $n \neq 0$; $m \neq 0$; $n \neq 15$; $m \neq 18$,

то $НОК(t; k) =$ ~~2~~ $2^{\max(n; 15-n)} \cdot 11^{\max(m; 18-m)}$ т.е. $НОК(t; k) \neq 2^{15} \cdot 11^{18}$ $\Rightarrow$
$n \neq 0$; $m = 0$; $n = 15$; $m = 18$
$\Rightarrow$ такого быть не может, а рассмотрены ранее

Значит, для ①сл. подходит $2+2\cdot(16\cdot 19-2)=$
$=2\cdot(16\cdot 19-1)=2\cdot 303=606$ пар $(t;k)$

Значит, для <u>3сл.</u> подходит $606\cdot 6=3636$ пар $(a;b;c)$

Значит, всего $3+3636=3639$ $(a;b;c)$.

Ответ: 3639

№5

$A=\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$
$B=\log_{(x+4)^2}(x+34)$
$C=\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

условия:

$$\begin{cases} x\neq -33 \\ x>-34 \\ x>-\frac{23}{2} \\ x\neq -3 \\ x\neq -4 \\ x>-34 \\ x\neq -11 \\ x>-\frac{23}{2} \\ x<-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\in(-11{,}5;-4) \\ x\neq -3 \\ x\neq -11 \end{cases}$$

$$\boxed{x\in(-11{,}5;-11)\cup(-11;-3)\cup(-3;-4)}$$

~~1сл. $A=B$, $C=A+1$~~
~~$\begin{cases}\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=\log_{(x+4)^2}(x+34) \\ \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)+1\end{cases}$~~

Сделаем замену: $\sqrt{2x+23}=a$; $x+4=b$; $\sqrt{x+34}=c$

$A=\log_c a^2$ $\qquad A=2\log_c a$
$B=\log_{b^2}\cdot c^2$ $\qquad B=1\log_b c$
$C=\log_a\cdot(-b)$ $\qquad C=\log_a(-b)$

Заметим, что $A\cdot B=2\log_c a\cdot\log_{-b}c=$
$=2\frac{\log_c a}{\log_c(-b)}=2\cdot\log_{-b}a=\frac{2}{C}\Rightarrow ABC=2$

Тогда: <u>1сл.</u> $A=B$, $C=A+1.\Rightarrow A^2\cdot(A+1)=2$
$A^3+A-2=0$

Схема Горнера:

	1	0	1	-2
1	1	1	2	0

$(A-1)(A^2+A+2)=0$

$\left[\begin{array}{l} A=1 \\ A^2+A+2=0 \end{array}\right.\Rightarrow A=1$
$D=1-4\cdot 2<0$ (он)

Обратная замена: $2\log_c a=1\Rightarrow a^2=c$

Обратная замена: чистовик лист 9.

$2x+23=\cancel{x}\sqrt{x+34}$

$4x^2+92x+23^2=x+34$

$4x^2+91x+529-34=0$

$4x^2+\underbrace{91}_{-91}x+\underbrace{495}_{\substack{9\cdot 11\cdot 5\cdot 4 \\ -55\quad -36}}=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-\frac{55}{4} \\ x=-9 \end{array}\right.$ с учетом условий: $\boxed{x=-9}$

2сл. $A=C$; $B=A+1 \Rightarrow A^2(A+1)=2$

Аналогично случаю 1сл.: $A=1. \Rightarrow x=-9$

3сл. $B=C$; $A=B+1 \Rightarrow B^2\cdot(B+1)=2$

Аналогично случаю 1сл.: $B=1$

Обратная замена: $\log_{-b} c=1$ $\quad c=-b$

Обратная замена: $\sqrt{x+34}=-x-4$

$x^2+8x+16=x+34$

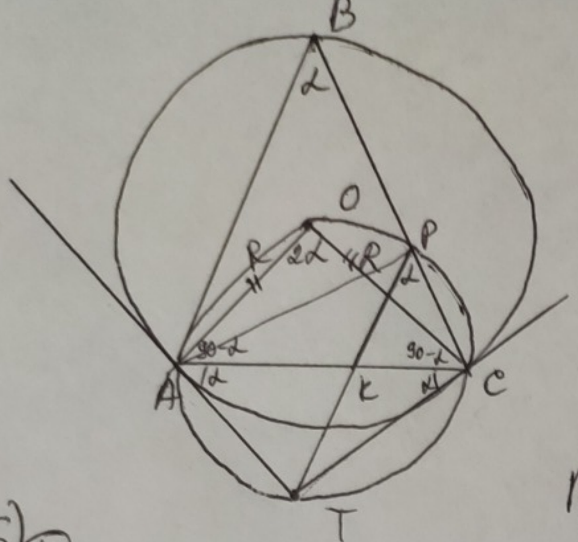
$x^2+\underbrace{7}_{-7}x-\underbrace{18}_{-9\quad 2}=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-9 \\ x=2 \end{array}\right.$ с учетом условий: $\boxed{x=-9}$

Ответ: $\{-9\}$.

№ 6

Чистовик
лист 10



А)

① т.к. $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$ (т.к. R⊥кас)

⇓

AOCT – впис-й 4-х-уг-к (по Ⓣ о Ⓗ и Ⓓ опис-й окр-ти)

⇓

(·)T ∈ окр., опис-й около △AOC.

Пусть $\angle TAC = \alpha \Rightarrow \angle TPC = \alpha$ (как впис, опир. на одну дугу)

② ⇒: $\angle CAT = \angle ABC = \alpha$

(т.к. ∠ между кас. и хордой равен $\frac{1}{2}$ ◡, заключ. между ними, а впис. ◡ тоже равен $\frac{1}{2}$ дуги)

⇓

AB∥PK (~~как~~ по 2-м соответ-м углам)

⇓

△CKP∼△CBA (по 2-м ∠)

⇓

$\frac{S_{\triangle CBA}}{S_{\triangle CKP}} = \left(\frac{AC}{CK}\right)^2$ т.к. S∼△ относ-я как квадрат. коэф. подобия

③ △APK и △PKC имеют общ. высоту

⇓

$\frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle PKC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{15}{13}$ т.к. S△ с общ. выс. относ. как их основания

⇓

$\frac{AC}{CK} =$ [illegible] $\frac{28}{13}$

⇓

$S_{\triangle CBA} =$ [illegible] $\frac{28^2}{13^2} \cdot 13 = \frac{784}{13}$

Ответ: $\frac{784}{13}$.

Б) ④ △AOC: AO=OC=R по опред. R

⇓

$\angle OAC = \angle OCA = 90^\circ - \alpha$ (т.к. р/б △ т.к. ∠OAT=90°)

⇓

$\angle AOC = 2\alpha$

⇓

$AC^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos 2\alpha$ (по Ⓣ cos)

$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R$ (по Ⓣ sin)

⇓

$R^2 = \frac{AC^2}{4\sin^2\alpha}$; $2R^2 = \frac{AC^2}{2\sin^2\alpha}$

$AC^2 = \frac{AC^2}{2\sin^2\alpha}(1 - \cos 2\alpha)$

[illegible]

$\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{4}{7}$

⇓

$\operatorname{tg}\angle ABC = \frac{4}{7}$

~~[illegible]~~ $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\frac{16+49}{49} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{49}{65}} = \frac{7\sqrt{65}}{65}$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{65-49}{65}} = \frac{4\sqrt{65}}{65}$