Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100549**

ID профиля: **321537**

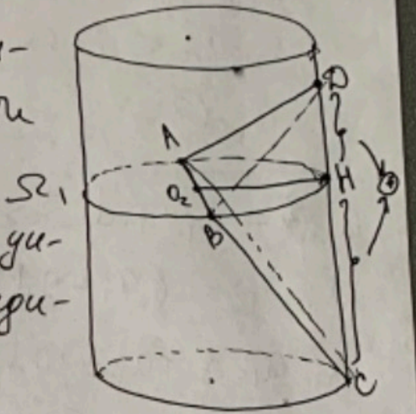
Вариант 23

Чистовик | Вариант 23

№2

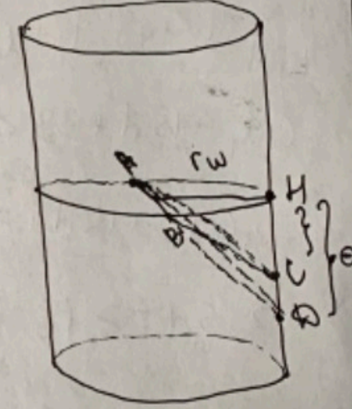
$AB = 4$
$AC = BC = 6$
$AD = BD = 7$
CD – ?

Докажем, что $AB \perp CD$ (ΔABD и ΔABC – р/б), то C и D равно удалены от A и B $\Rightarrow$ $[CD]$ лежит на (в) серединном перпендикуляре плоскости Ω_1 и AB $\Rightarrow$ $CD \perp AB$



Следовательно, т.к. по условию $CD \parallel$ оси цилиндра, то AB лежит в сечении, перпендикулярном оси $\Rightarrow$ в окружности ω.

Значит, AB – хорда окружности W $\Rightarrow$
$\Rightarrow r_W$ (радиус окружности) $= \frac{AB}{2} = 2$



2) Рассмотрим r_W минимальное, равное 2
Справа на картинках изображены 2 возможных варианта расположения точек C и D $\Rightarrow$ 2 варианта ответа:
- $CH + HD$
- $HD - CH$

Тогда получаем: в ΔHBD
$HB = 2\sqrt{2}$
$BD = 7$
$HD = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$

в ΔHBC:
$HB = 2\sqrt{2}$
$BC = 6$
$HC = \sqrt{36-8} = \sqrt{28}$

Тогда:
$$CD: \left[\begin{array}{l} \sqrt{41} - \sqrt{28} \\ \sqrt{41} + \sqrt{28} \end{array}\right.$$ – Ответ

Чистовик | Вариант 23

№1

S - сумма первых 6 членов возрастающей арифм. прогрессии

$a_{10} a_{16} > S+39$

$a_{11} a_{15} < S+55$

a_1 - ?

$a_{n+1} = a_1 + nd \Rightarrow S = a_1 + (a_1+d) + \dots + (a_1+5d) = 6a_1 + 15d$

$a_{10} a_{16} = (a_1+9d)(a_1+15d) > S+39 = 6a_1+15d+39$

$a_{11} a_{15} = (a_1+10d)(a_1+14d) < S+55 = 6a_1+15d+55.$

Раскроем скобки

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1d + 9a_1d + 15\cdot 9d^2 > 6a_1+15d+39 \\ a_1^2 + 14a_1d + 10a_1d + 14\cdot 10d^2 < 6a_1+15d+55. \end{cases} \rightsquigarrow \text{Оценим}$$

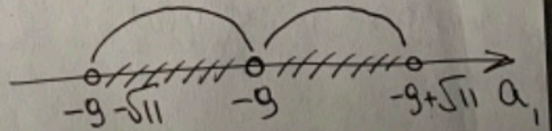
$6a_1+15d+39 < a_1^2 + 24a_1d + 135d^2 < 6a_1+15d+55-5d^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{6a_1} + \underline{15d} + 39 < \underline{6a_1} + \underline{15d} + 55 - 5d^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5d^2 < 16 \Rightarrow d^2 < \frac{16}{5} = 3,2 \Rightarrow d \left[\begin{array}{l} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right.$ - целое число

$\Rightarrow d = 1$ (последовательность возрастающая)

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 15 + 39 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 15 + 55 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \\ a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+9)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -9 \\ a_1 \in \left(\frac{-18-\sqrt{18^2-280}}{2}; \frac{-18+\sqrt{18^2-280}}{2} \right) = (-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11}) \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} a_1 \neq -9 \\ a \in (-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11}) \end{cases}$

| Страница 2

Чистовик

Вариант 23

Ответ к номеру 1:

$$a_1 \in \left(-9-\sqrt{11}; -9\right) \cup \left(-9; -9+\sqrt{11}\right)$$

№3.

S_M - ?

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b; 8) \end{cases}$$

числа a и b - вещественные

① $b-a<2$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2\sqrt{2} \\ a^2+b^2 \le -4a+4b \end{cases}$$

② $b-a>2$

$-4a+4b$ VS 8

$4(b-a)$ VS 8

$b-a$ VS 2

Черновик

(к целых чисел. арифм. прогр. [illegible] $(a_1+10d)(a_1+14d)$ S-[illegible] (целые числа) [illegible]

S – сумма первых 6 членов

$S =$

$a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4 \; a_5 \; a_6 \ldots\ldots$

a_1 – ?

$a_{10} a_{16} > S+39$

$a_{11} a_{15} < S+55.$

$$S = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d + a_1 + 5d = 6a_1 + 15d.$$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$a_{16} = a_1 + 15d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{15} = a_{1} + 14d$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\, 9 \\ \hline 135 \end{array}$$

$6a_1 + 15d + 39$

$a_1^2 + 24a_1 d + 135d^2$

$6a_1 + 15d + 55 - S$

$16 < 5d^2$

$d^2 -$

$\frac{16}{5}$

⊙ $a_{10} a_{16} > S+39$

$(a_1+9d)(a_1+15d) > 6a_1 + 15d + 39$

$a_1^2 + 15a_1 d + 9a_1 d + 135d^2 > 6a_1 + 15d + 39$

$a_1^2 + 24a_1 d + 135d^2 > 6a_1 + 15d + 39$

⊙ $a_{11} a_{15} < S+55$

$(a_1+10d)(a_1+14d) < S+55.$

$a_1^2 + 14a_1 d + 10a_1 d + 140d^2 < 6a_1 + 15d + 55.$

$a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2 < 6a_1 + 15d + 55.$

$a_1^2 + a_1(24d-6) + 135d^2 - 15d - 39 > 0$

$a_1^2 + a_1(24d-6) + 140d^2 - 15d - 55 < 0$

$$\frac{6-24d \pm \sqrt{(24d-6)^2 - 4(135d^2 - 15d - 39)}}{2}$$

$$\frac{6-24d \pm \sqrt{(24d-6)^2 - 4(140d^2 - 15d - 55)}}{2}$$

3) $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8$

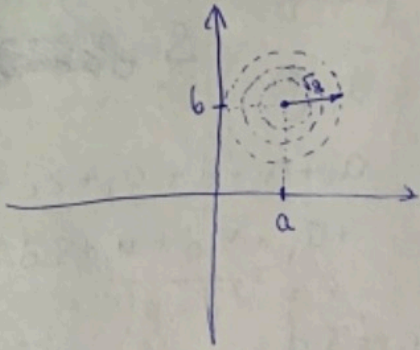
$a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8)$

S_H - ?

Черновик.

23

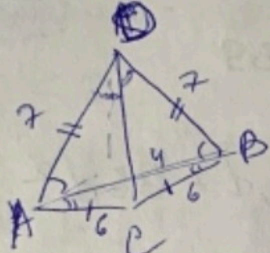
$-4(a-b)$ или 8.



$18 \times 18 = 144$

$144 + 180 = 324$

$324 - 280 = 144$



AB = 4

AC = CB = 6

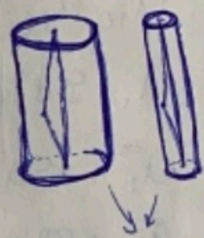
AD = DB = 7

CD ∩ сеч   CD - ?

ΔADB - р/б

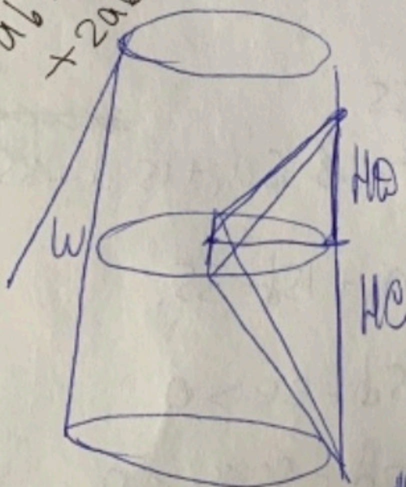
ΔABC - р/б

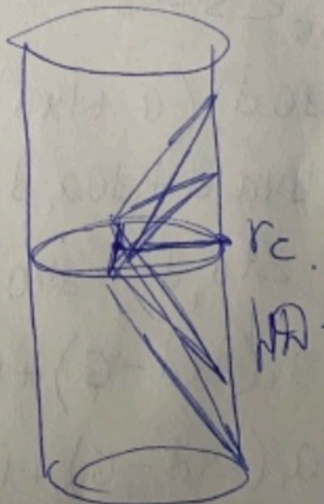
ΔADC = ΔBDC.

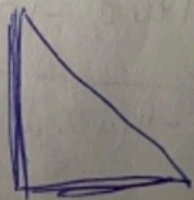


$(a-b)(a^2-2ab-b^2)$

$a^2-2ab-ab-ab+2ab+b^2$







$2\sqrt{2} \Rightarrow 4\cdot 2 = 8$.

$6 \Rightarrow 36$ 41

$7 \Rightarrow 49$,   28.

M - фигура

S_M - ?

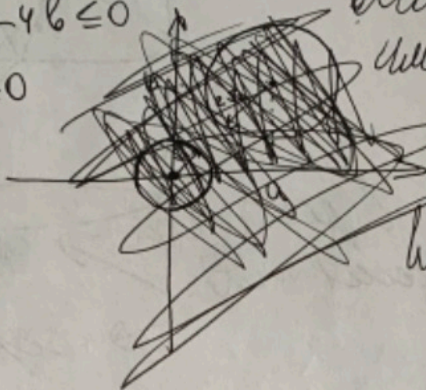
Черновик.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b;\ 8) \end{cases}$$

→ уравнение окружности с центром в a, b. и радиусом меньшим, чем $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\boxed{R \le 2\sqrt{2}}$

$$\begin{cases} a^2+b^2+4a-4b \le 0 \\ a^2+b^2-8 \le 0 \end{cases}$$



внутри или на краю ... внутри.

$-4a+4b$ VS 8

$-4(a-b)$ VS 8

$-(a-b)$ VS 2.

$b-a$ VS 2.

$2<b-a$ | $b-a<2$

$a^2+b^2 \le 8$ окружность с центром 0;0 в координатах a, b. и радиусом $\le \sqrt{2}$.

~~$a^2+b^2 \le b-a$~~

$(a^2+b^2)=(b-a)$

$a^2+x^2-2ax+y^2-2by+b^2 \le 8$

$a^2+b^2 \le 8-x^2-y^2+2(ax+by)$

$a^2+b^2 \le 8$ сильнее не обязательно.

~~[illegible]~~

$a^2+b^2 \le -4a+4b.$

$\le 8-x^2-y^2+2(ax+by)$

$-4a+4b$ VS $8-x^2-y^2+2(ax+by)$

$(a-b)(a-b$

так далее $\boxed{17}$ стр.

Черновик

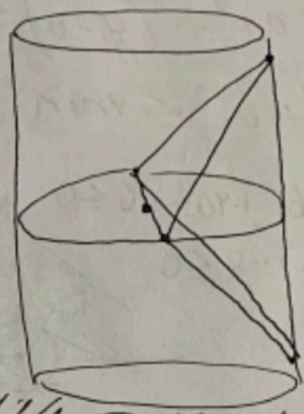
Докажем, что $CD \perp AB$.

из р/б.

и плоскость Ω,

окружность ω

α



два возможных варианта вычисления CD.

→ через сумму

→ через разность.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100549**

ID профиля: **321537**

Вариант 23

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=22 \\ НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2^{a_1}\cdot 11^{a_2} \\ b=2^{b_1}\cdot 11^{b_2} \\ c=2^{c_1}\cdot 11^{c_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min(a_1 b_1 c_1)=1 \wedge \min(a_2 b_2 c_2)=1 \\ \max(a_1 b_1 c_1)=16 \wedge \max(a_2 b_2 c_2)=19 \end{cases}$$

Докажем сопутствующую лемму:

Формулировка: Количество троек чисел, у которых min=1 max=N равно $\underbrace{2\cdot 3(N-2)}+\underbrace{3}+\underbrace{3} = 6N-12+6=6N-6=6(N-1)$

количество троек, где все числа различны (выбрать какое число = 1, какое = N и значение от 2 до (N−1) для остального)

количество троек, где две 1

количество троек, где две N

Получаем: $(6\cdot 16-6)(6\cdot 19-6)=6(15+18)=6\cdot 33=$ *знак плюс*

$=\underline{198}$

Ответ: 198 троек.

Чистовик

Вариант 23

№5

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$

$\log_{(x+4)^2}(x+34)$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$\left\{\begin{array}{l}\text{Два равны} \\ \text{Третье больше на } 1\end{array}\right\}$

Обозначим логарифмы, как $a; b; c$

$a = \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = 2\log_{x+34}(2x+23)$

$b = \log_{(x+4)^2}(x+34) = \frac{1}{2}\log_{x+4}(x+34)$

$c = \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = 2\log_{2x+23}(-x-4)$

$$abc = 2\frac{\ln(2x+23)}{\ln(x+34)} \cdot \frac{1}{2}\frac{\ln(x+34)}{\ln(-x-4)} \cdot 2\frac{\ln(-x-4)}{\ln(2x+23)} = 2$$

Обозначим те два логарифма, что равны за $y \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Третий логарифм: $y+1$

$$y^2(y+1) = 2 \Rightarrow y^3 + y^2 - 2 = 0 \Rightarrow (y-1)\underbrace{(y^2+2y+2)}_{>0} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 1$

Если $a = 1$: $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = 1 \Rightarrow x+34 = (2x+23)^2$

$x+34 = 4x^2 + 92x + 23^2 \Rightarrow 4x^2 + 91x + 529 - 34 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 + 91x + 495 = 0 \Rightarrow x = \frac{-91 \pm \sqrt{91^2 - 4\cdot 4\cdot 495}}{8} =$

$= \frac{-91 \pm \sqrt{361}}{8} = \frac{-91 \pm 19}{8} \Rightarrow x_1 = -9;\ x_2 = -13\frac{3}{4}$

Если $b = 1$: $\log_{(x+4)^2}(x+34) = 1 \Rightarrow (x+4)^2 = x+34 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 16 + 8x - x - 34 = 0 \Rightarrow x^2 + 7x - 18 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+9)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -9 \\ x_2 = 2 \end{array}$

Если $c = 1$: $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = 1$

страница 2

21100549 (U321537 M1303543)

$2x+23=(x+4)^2 \Rightarrow$ Чистовик; Вариант 23

$x^2+8x+16=2x+23 \Rightarrow x^2+6x-7=0$

$(x+7)(x-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-7 \\ x_2=1 \end{array}\right.$

Получаем, что при $x=-9$: $a=b=1$

$c=y+1=2$: $c=2\log_{2x+23}(-x-4)=$

$=2\log_2 5=2 \Rightarrow$

Ответ: -9

Страница 3

Чистовик

Вариант 23

№6

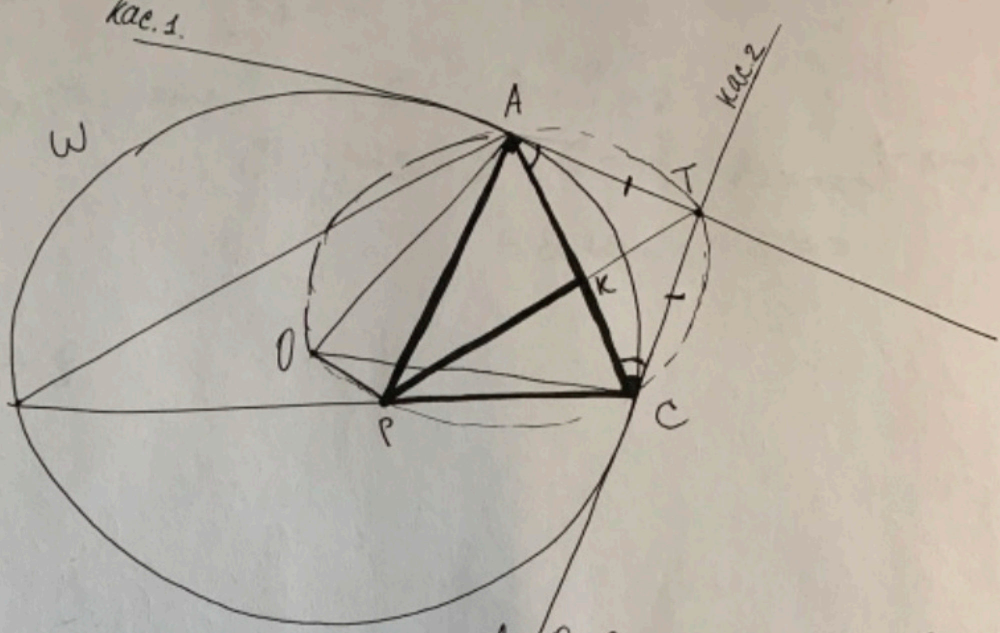
а) $S_{APK} = 15$

$S_{CPK} = 13$

S_{ABC} - ?

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} 4/7$

AC - ?



Окружность, проходящая через точки A, O, C – описанная окружность $\triangle AOC$; по условию точка P также лежит на этой окружности.

Значит, □AOPC – вписанный

□AOCT: $\left.\begin{array}{l}\angle OAT = 90^\circ \\ \angle OCT = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle AOC + \angle ATC = 180^\circ \Rightarrow$ □AOCT – вписанный

Однако раз AOC уже составляют окружность => по свойству это одна и та же окружность. => □AOPCT – вписанный

$\left.\begin{array}{l}AT=TC \text{ – отрезки касательных} \\ OA=OC \text{ – радиусы } \omega\end{array}\right\} \Rightarrow$ □OATC – дельтоид => $AC \perp OT$ & AC и OT – бисс. углов.

$\angle AOC = 2\angle ABC$ – т.к. $\angle AOC$ – центральный $\Rightarrow \angle ATC = 180^\circ - 2 * \angle ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle TAC = \angle TCA = 90^\circ - \angle ABC$

При этом $\angle AOC = \angle APC$

Страница 4

Черновик

количество троек.

все делятся на 22.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=22 \\ НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

$2\cdot 11\cdot 2\cdot 11\cdot 2\cdot 11$
$\cdot 2\cdot 11\cdot 2\cdot 11$

a	b	c	22
2	2	2	
11	11	11.	

$$\left.\begin{matrix} \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) \\ \log_{(x+4)^2}(x+34) \\ \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) \end{matrix}\right\}$$

два равны, а третье больше их на 1.

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34) \\ \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)+1 \end{cases}$$

$$\frac{\log_2(2x+23)}{\log_2(\sqrt{x+34})} = \frac{\log_2(x+34)}{\log_2(x+4)^2}$$

-91
$+19$
81
72
8

$\log_2\sqrt{x+34}$

ОДЗ:

$x+34>0 \Rightarrow x>-34$

$2x+23>0 \Rightarrow x>-\frac{23}{2}$

$-x-4>0 \Rightarrow x<-4$

$-34 \quad -\frac{23}{2} \quad -4 \quad x$

$x\in\left(-\frac{23}{2};-4\right)$ по ОДЗ.

$1=\log_{\sqrt{x+}}$

Одно число 22 => второе $\frac{\text{или } 2\cdot 11^{19}}{\text{или } 2\cdot 11\cdot(2\cdot 11}$

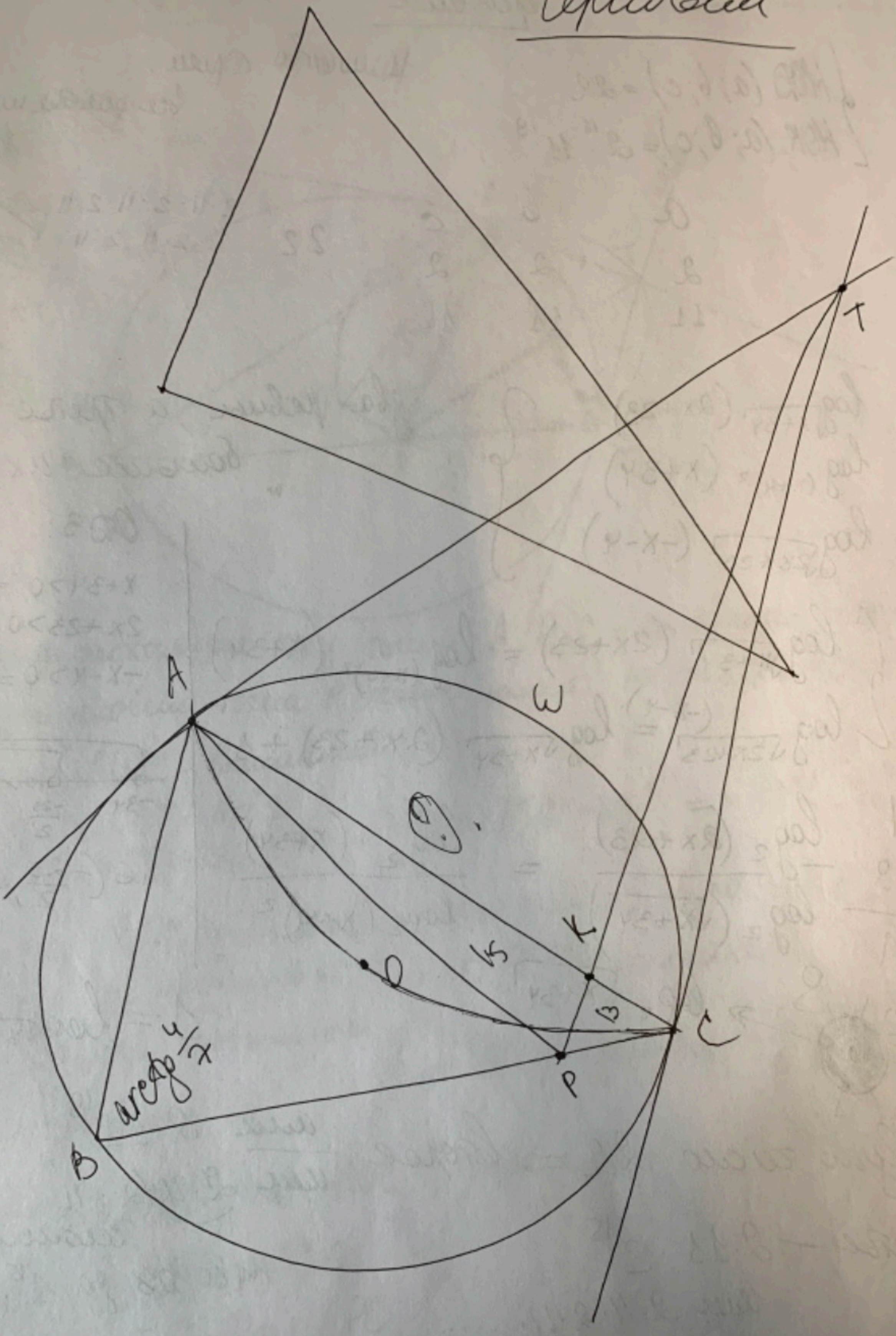
сколько угодно наборов до 2^{15} и 11^{18}.

третье — $2\cdot 11\cdot 2^{15}$

или $2\cdot 11\cdot 2\cdot 11\cdot \ldots$

наборов до $2^{15}\cdot 11^{18}$.

Чертежи



Черновик

Пусть окружность ~~вокруг~~ через точки $A; O; C$ — описанная окружность $\square AOPC$

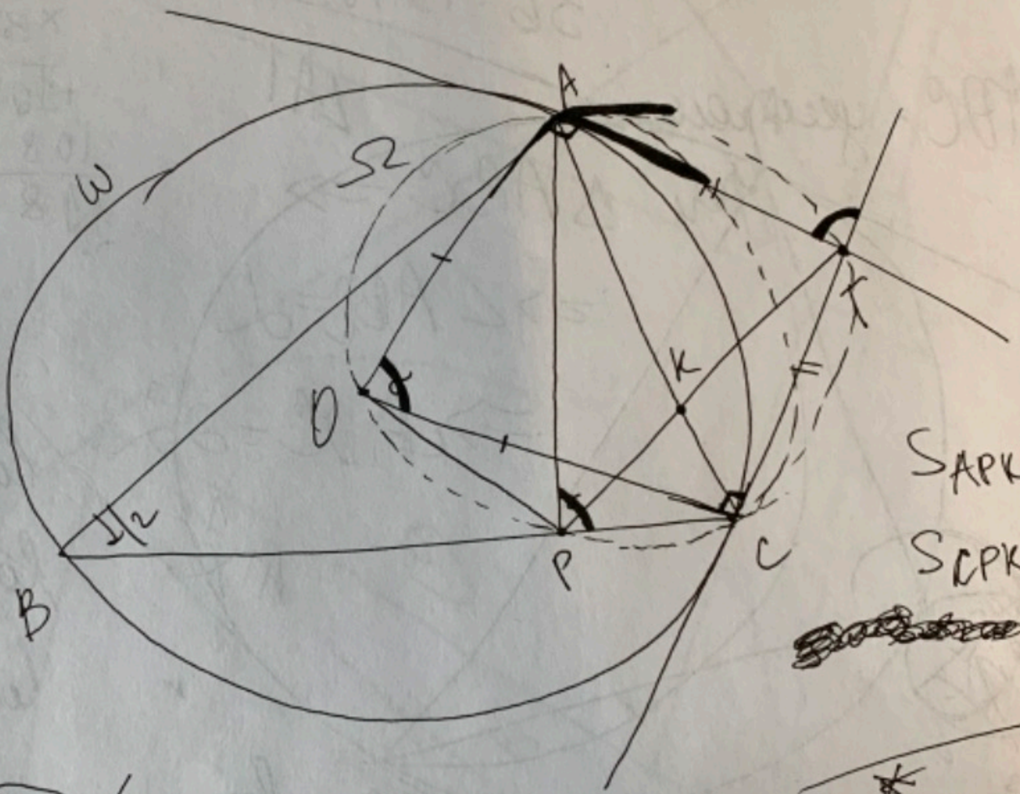
$\alpha \to 2\beta$

$\square OATC$ — вписанный

[illegible].

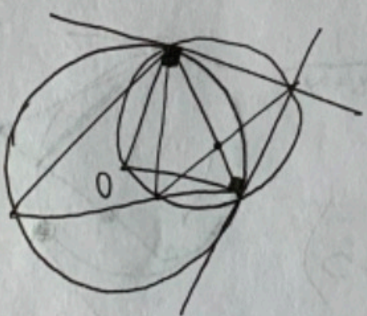
$\Downarrow$

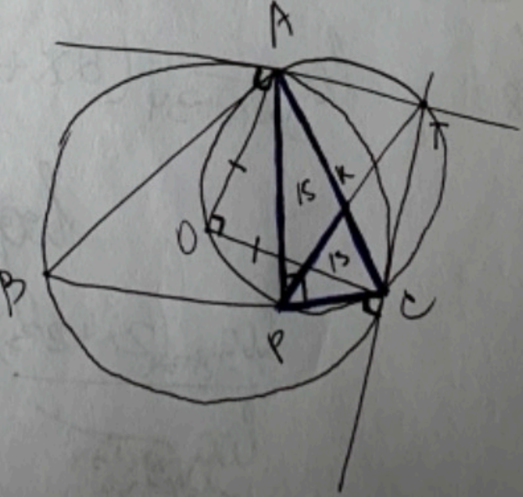
$\square OPCT$ — вписанный



$S_{APK} = 15$

$S_{CPK} = 13$





$15 + 13 = 28$

$\frac{AP \cdot PC}{2} = 28$

$AP \cdot PC = 56$

Черновик

$2\cdot(N-2)\cdot 3+3+3=(2N-4)3+6=$

$=6N-12+6=6N-6=6(N-1)$

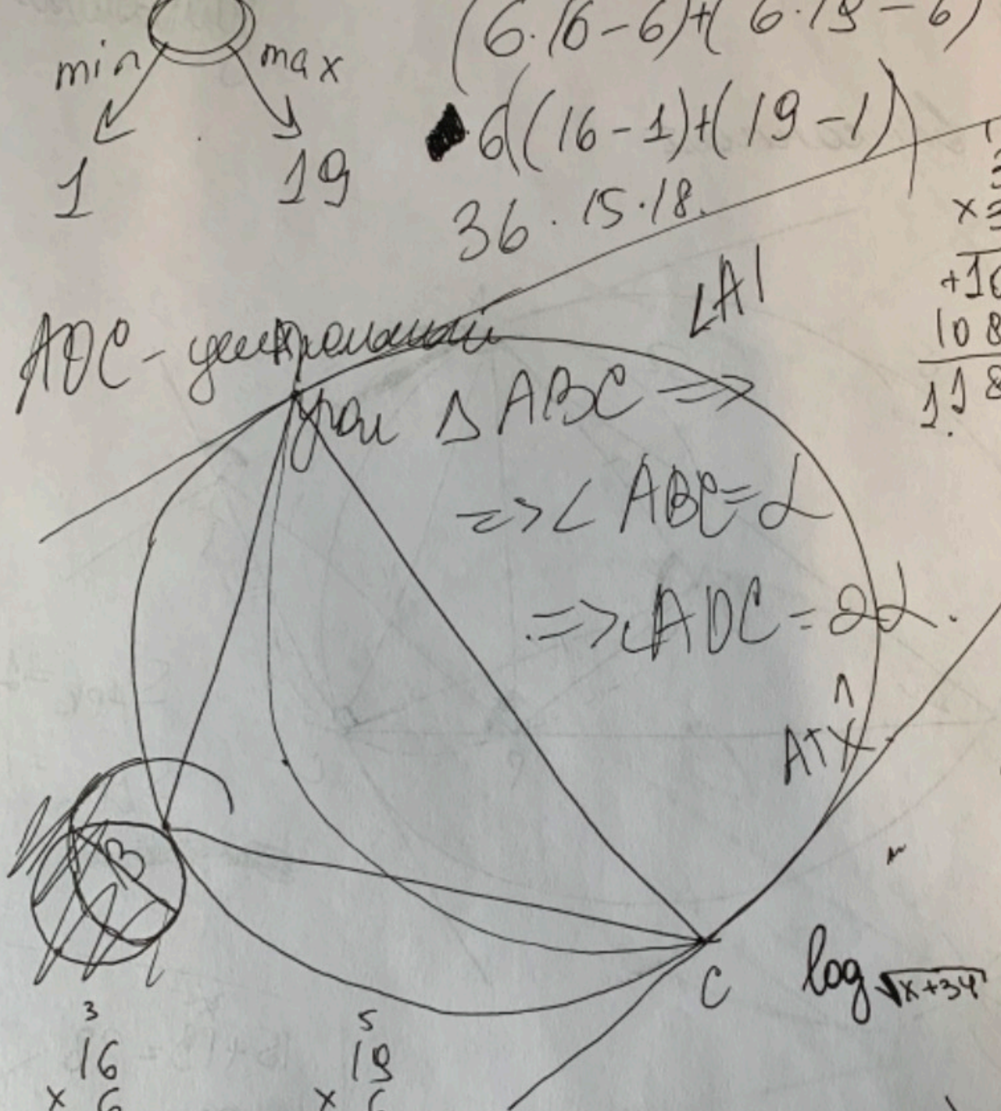
min → 1, max → 19

$(6\cdot 16-6)+(6\cdot 19-6)$

$6((16-1)+(19-1))$

$36\cdot 15\cdot 18$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 33 \\ \hline 108 \\ 108 \\ \hline 1188 \end{array}$$



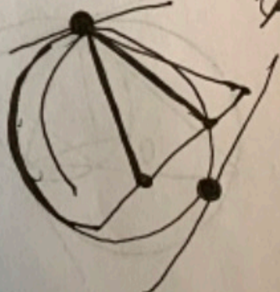
Два ровны
Третий на 1
больше

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$

$\log_{(x+4)^2}(x+34)$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$\log_{\sqrt{x+34}}$



$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 6 \\ \hline 96 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 19 \\ \times\ 6 \\ \hline 114 \end{array}$$

90. 108

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=\log_{(x+4)^2}(x+34)$ 1.

$$\frac{\log_{x+34}(2x+23)}{\log_{x+34}\sqrt{x+34}}=\frac{\cancel{\log_{x+34}(x+34)}}{\log_{x+34}(x+4)^2}$$

1/2