Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100439**

ID профиля: **273002**

Вариант 23

Чистовик.

№1.

$a_n = a_1 + b(n-1)$

По условию $a_{10} a_{16} > S + 39$

$a_{11} a_{15} < S + 55.$

Сумма первых n членов выражается по формуле $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.
Тогда сумма первых 6 членов равна $S = \frac{a_1 + a_1 + 5b}{2} \cdot 6 = 3(2a_1 + 5b)$
Перепишем неравенства в следующем виде:

$(a_1 + 9b)(a_1 + 15b) > 3(2a_1 + 5b) + 39$

$(a_1 + 10b)(a_1 + 14b) < 3(2a_1 + 5b) + 55$

1) $a_1^2 + 24a_1b + 135b^2 > 6a_1 + 15b + 39$
2) $a_1^2 + 24a_1b + 140b^2 < 6a_1 + 15b + 55$ $\Rightarrow -5b^2 > -16$

$5b^2 < 16$

$|b| < 2$

По условию прогрессия возрастающая $\Rightarrow b \neq 0;\ b \neq -1.$

Значит $b = 1.$

Подставляем:

2) $a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 15 + 55 = 6a_1 + 70.$

$a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0$

Это парабола ветвями вверх: $+ \; (-) \; + \; \to a_1$

Найдём её корни:

$a_1^2 + 18a_1 + 70 = 0$

$a_1 = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 280}}{2} = -9 \pm \frac{\sqrt{44}}{2}$

$36 < 44 < 49$

$6 < \sqrt{44} < 7.$

$3 < \frac{\sqrt{44}}{2} < 3,5 \Rightarrow -6 < -9 + \frac{\sqrt{44}}{2} < -5,5$

Чистовик.

$$-3 > -\frac{\sqrt{44}}{2} > -3,5.$$

$$-12 > -9 - \frac{\sqrt{44}}{2} > -12,5.$$

$$-12,5 < -9 - \frac{\sqrt{44}}{2} < -12$$

Итого

Прогрессия состоит из целых чисел $\Rightarrow$ a_1 — целое. Значит a_1 может принимать все целые значения от -12 до -6 включительно

~~Ответ: $a_1 \in \{-12; -11; -10; -9; -8; -7; -6\}$.~~

Первое неравенство:

$$a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 15 + 39$$

$$a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0.$$

$$(a_1 + 9)^2 > 0$$

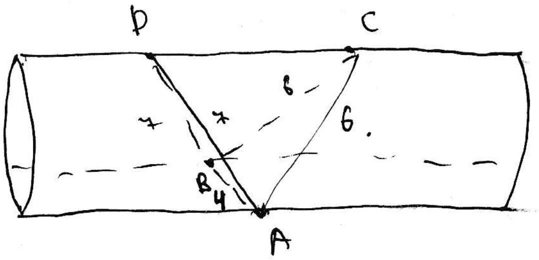
$$a_1 \neq -9$$

Значит 9 исключаем.

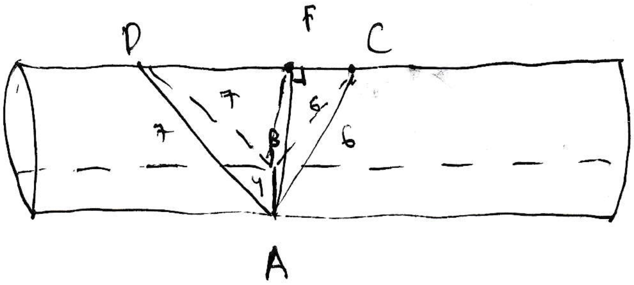
Ответ: $a_1 \in \{-12; -11; -10; -8; -7; -6\}$.

Чистовик.

№2

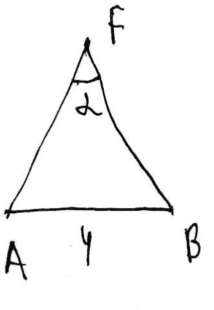


По условию точки D и C равноудалены от A и B. ~~[illegible]~~ Множество равноудалённых от A и B точек $\Rightarrow$ плоскость, проходящая через середину AB и перпенд. ей. Значит эта плоскость содержит DC. ~~[illegible]~~ По условию ~~[illegible]~~ $DC \parallel$ оси цилиндра. Тогда $DC \perp AB \Rightarrow AB \perp$ оси цилиндра. С учётом этого перерисуем рисунок:

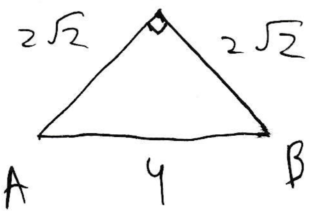


(Δ ABF равнобед., так как все точки прямой DC равноуд. от A и B)

Плоскость $FBA \perp$ оси цилиндра. $FA = FB = 6\cos\alpha \Rightarrow FA$ может принимать значения от нуля до 6. Окружность цилиндра — это окружность, описанная около ABF!



Тогда $4 = 2R\sin\alpha \Rightarrow R = \frac{2}{\sin\alpha}$. Тогда наименьший радиус достигается при $\sin\alpha = 1$ ($\alpha = \frac{\pi}{2}$). $R_{min} = 2$; $FA = 2\sqrt{2} < 6$ — подходит



$DC \perp (AFB) \Rightarrow \Delta AFC$ — прямоуг.

Из Th Пифагора для ΔFCA следует, что

$$FC = \sqrt{6^2 - 8} = \sqrt{36-8} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$$

3

Аналогично $FD = \sqrt{7^2 - 8} = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$. Чистовик.

~~Откуда~~ Причём ~~...~~ C и D могут быть как с одной стороны от F, так и с разных. Тогда DC может быть равно $\sqrt{41} - 2\sqrt{7}$ и $\sqrt{41} + 2\sqrt{7}$.

Ответ: $\sqrt{41} - 2\sqrt{7}$; $\sqrt{41} + 2\sqrt{7}$.

Чистовик.

№ 3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8.\\ a^2+b^2 \le \min(4(b-a), 8).\end{cases}$$

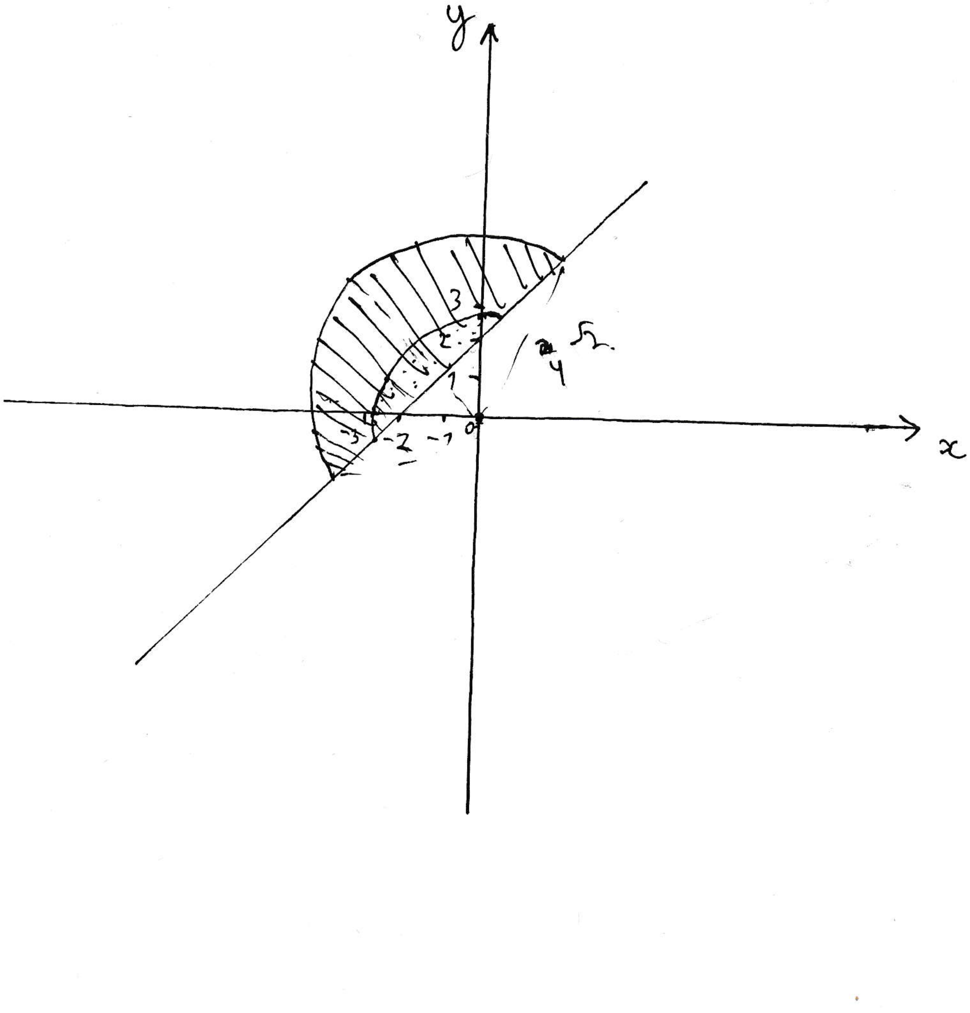
~~Рассмотрим~~ $(x-a)^2+(y-b)^2=8$ - это уравнение окружности с центром в точке $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Неравенству удовлетворяют все точки внутри и на границе (условие нестрогое) окружности.

$a^2+b^2 \le \min(4(b-a), 8) = 4\min(b-a; 2)$

при ~~b~~ $b-a \geq 2$ $(b \geq a+2)$.

$a^2+b^2 \le 8.$

a^2+b^2 - это расстояние от начала координат до точки с координатами $(0;0)$ ~~это~~ в квадрате, оно должно быть $\le 2\sqrt{2}$.



Тогда итоговая область будет представлять ~~...~~ собой часть окружности радиуса ~~...~~ $2\sqrt{2}\cdot 2 = 4\sqrt{2}$, ~~...~~ с центром в начале координат.

При $b - a < 2$:

$$\min(b-a;2) = 4(b-a).$$

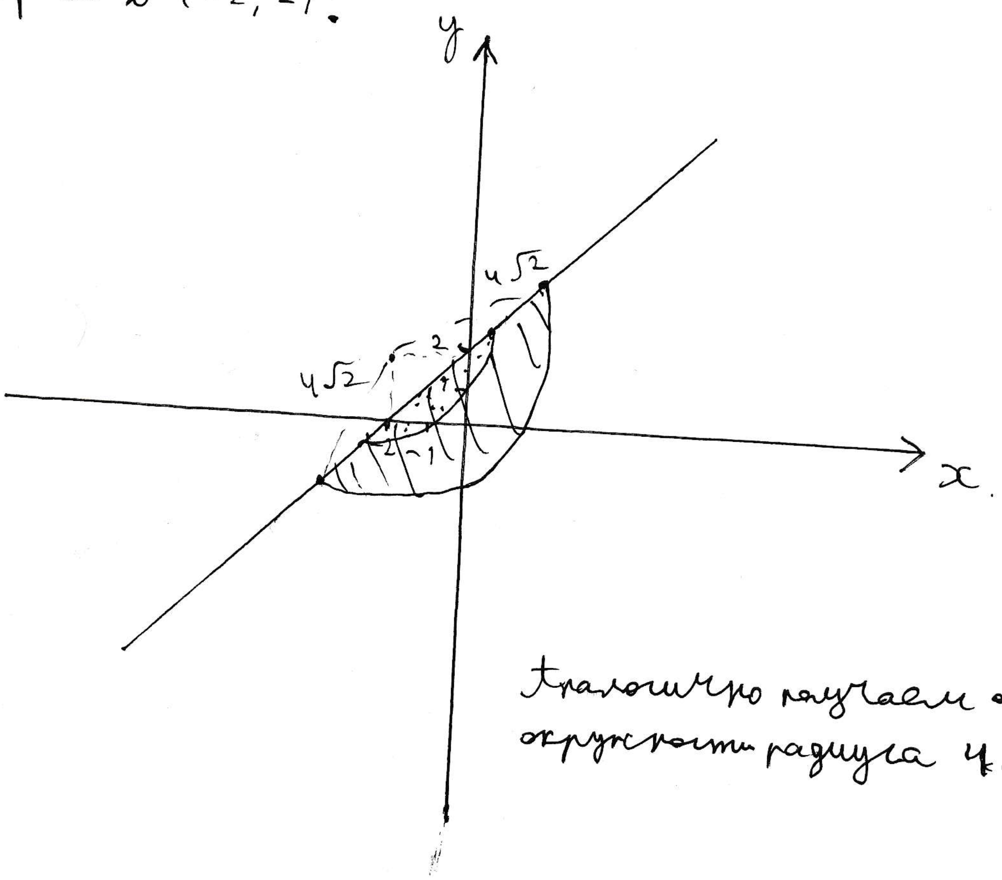
$$a^2+b^2 \le 4b-4a$$

$$a^2+4a+b^2-4b \le 0.$$

$$a^2+4a+4+b^2-4b+4 \le 8.$$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8 = (2\sqrt{2})^2$ – тоже окружность. ~~...~~

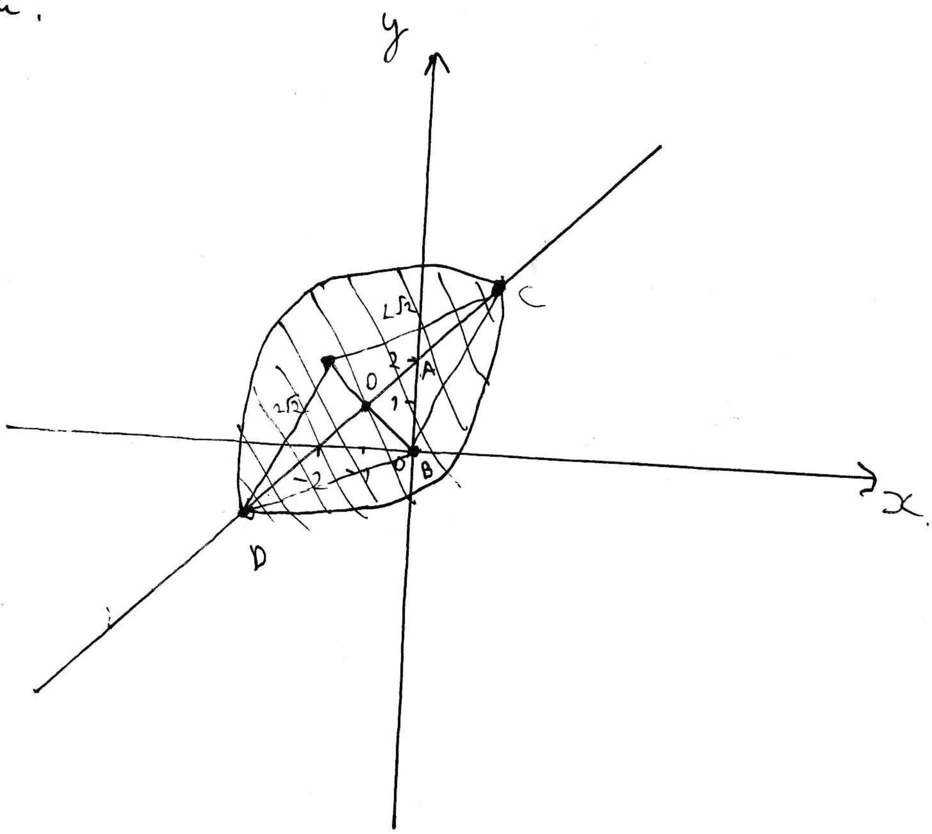
С центром в $(-2;2)$:



Аналогично получаем ~~...~~ часть окружности радиуса $4\sqrt{2}$.

~~Черн~~ Чистовик.

Итого имеем:



$OA = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = OB$

$OC = 4\sqrt{2} \Rightarrow \cos\angle CBO = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$.

$\angle CBD = 2\arccos\frac{1}{4}$.

Тогда площадь одного такого ~~сектора~~ куска равна $\pi\cdot(4\sqrt{2})^2\cdot\frac{\cancel{2}\arccos\frac{1}{4}}{\cancel{2}\pi} =$ (DBC от окружности)

$= 32\arccos\frac{1}{4}$.

$\cancel{BD}$ $OC = \sqrt{32-2} = \sqrt{30}$.

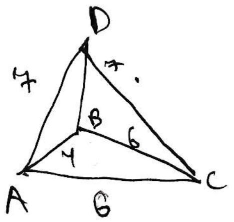
$S_{DCB} = \frac{\sqrt{2}\cdot\cancel{\ }\cdot 2\sqrt{30}}{2} = \sqrt{60}$.

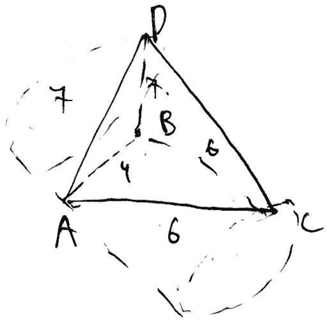
Тогда площадь сектора окр. DC равна $32\arccos\frac{1}{4} - \sqrt{60}$.

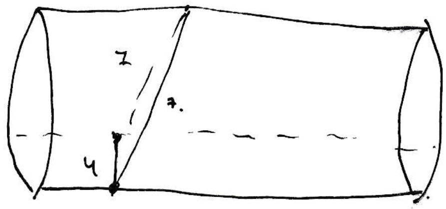
А двух таких секторов — $64\arccos\frac{1}{4} - 2\sqrt{60} = 64\arccos\frac{1}{4} - 4\sqrt{15}$.

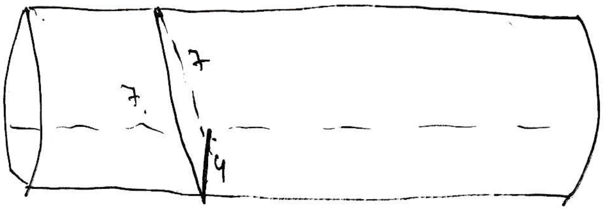
Ответ: $64\arccos\frac{1}{4} - 4\sqrt{15}$.

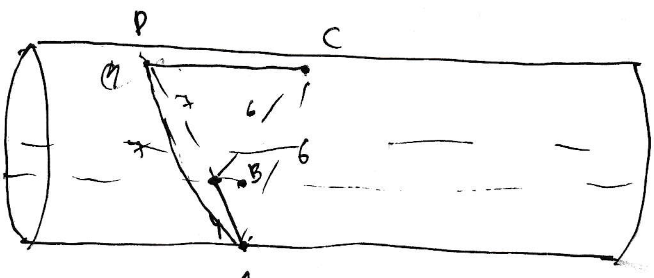
Черновик.



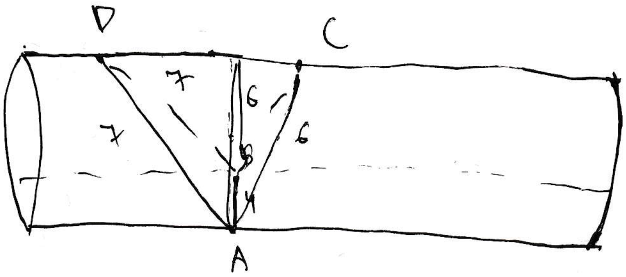




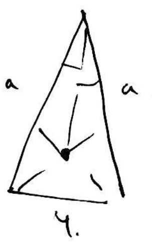




плоскость равноуд. точек от A и B.
содержит DC, DC || оси => AB ⊥ оси



$4 = 2R\sin 2\alpha = 4R\sin\alpha$



$R = \frac{4}{2\sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$.

$\sqrt{a^2-4}$ $\quad \alpha = 90°$.

$S = \frac{4\sqrt{a^2-4}}{2} = 2\sqrt{a^2-4}$

$R = \frac{abc}{4S} =$

Черновик.

$a_n = a_1 + b(n-1)$

$a_{10} a_{16} > S + 39$

$(a_{10} + b)(a_{16} - b) < S + 55.$

$2^4 \cdot 5^1 =$

$S = \frac{a_1 + a_1 + 5b}{2} \cdot 6 = (2a_1 + 5b) \cdot 3 = 3(2a_1 + 5b).$

$(a_1 + 9b)(a_1 + 15b) > 3(2a_1 + 5b) + 39$

$(a_1 + 10b)(a_1 + 14b) < 3(2a_1 + 5b) + 55.$

$a_1^2 + 24a_1 b + 135b^2 > 6a_1 + 15b + 39$

$a_1^2 + 24a_1 b + 140b^2 < 6a_1 + 15b + 55.$

$18 \cdot 18$: 144, 18, 324

$-5b^2 > -16.$

$5b^2 < 16$

$b = 1$

$\cancel{a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 15 + 39}$

$a_1^2 + 18a_1 +$

$a_1^2 + 18a_1 + 135 > 0.$

$18^2 - 2$

$a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 15 + 55 = 6a_1 + 70.$

$a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0.$

$a_1 = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 280}}{2} = \frac{-18 \pm \sqrt{44}}{2} = -9 \pm \frac{\sqrt{44}}{2}.$

$6 < \sqrt{44} < 7.$

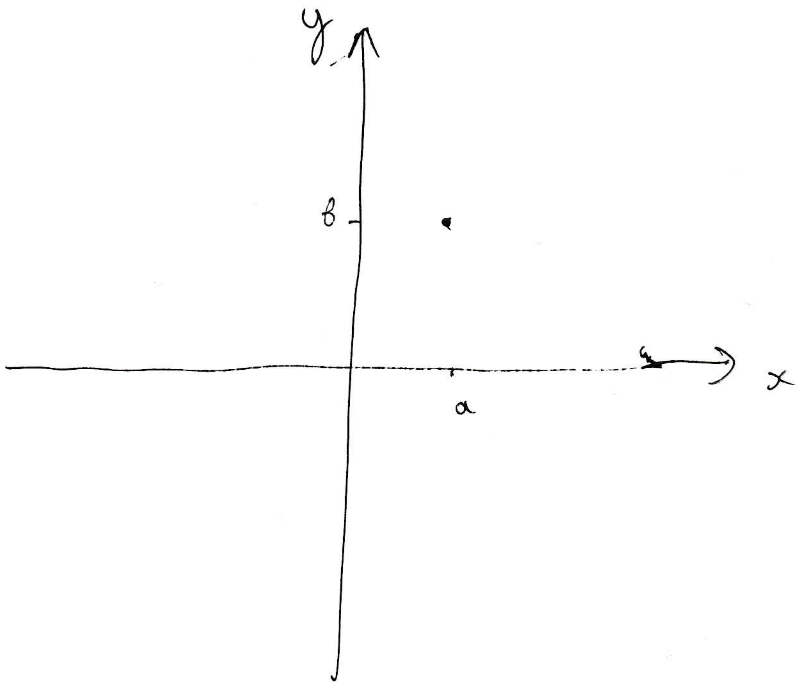
$3 < \frac{\sqrt{44}}{2} < 3{,}5$ $\qquad -3 > -\frac{\sqrt{44}}{2} > -3{,}5.$

$-6 < -9 + \frac{\sqrt{44}}{2} < -5{,}5.$ $\qquad -3{,}5 < -\frac{\sqrt{44}}{2} < -3.$ $\qquad -12; -11; -10; -9; -8; -7; -6;$

$-12{,}5 < -9 - \frac{\sqrt{44}}{2} < -12.$

$-6 \quad -5{,}5 \quad -12$ $\qquad -12{,}5 \quad -12 \quad -6 \quad -5{,}5.$

Черновик



ПОКАЗАТЬ ЛИСТЫ!!
(НАПОМИНАНИЕ СЕБЕ)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100439**

ID профиля: **273002**

Вариант 23

Чистовик

№ 4.

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 22 = 2\cdot 11 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$

НОК этих чисел содержит только степени 2 и 11 $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ среди делителей всех трёх чисел есть только 2 и 11.

При этом каждое число содержит $2\cdot 11$ в делителях.

~~[illegible]~~ Как минимум одно из чисел имеет двойку в первой степени (делится на 2, но не делится на 4). В противном случае НОД бы содержал бо́льшую степень двойки. Аналогично с 11.

Также одно из чисел должно содержать 2^{16}, иначе ~~[illegible]~~ степень двойки в НОК была бы меньше. Аналогично должно быть число с 11^{19}

~~[illegible]~~ Тогда имеем следующие обязательные члены:

$$2 \quad 2^{16}$$

$$11 \quad 11^{19}$$

Которые надо как-то сгруппировать. Но нужна ещё одна степень 2 и степень 11. Эта степень двойки может быть равна от 1 до 16 включительно. А степень 11 — от 1 до 19 включительно. Тогда имеем:

$$2 \quad 2^{16} \quad 2^{n} \quad 1 \leq n \leq 16, \; n - \mathbb{Z}$$

$$11 \quad 11^{19} \quad 11^{m} \quad 1 \leq m \leq 19; \; m - \mathbb{Z}.$$

1) При $\begin{cases} 2 \leq n \leq 15 \\ 2 \leq m \leq 18 \end{cases}$ имеем 3 различных члена в обоих числах.

Всего пар n и m $14\cdot 17$.

Для каждой пары n и m имеем $3! = 6$ вариантов распределения (перестановки)

Тогда в этом случае имеем $14\cdot 17\cdot 6$ троек.

Чистовик

2) В случае, если $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l} n=1 \\ n=16 \end{array}\right. \\ 2 \le m \le 18.\end{array}\right.$ имеем две одинаковые степени двойки и одну, отличную от них. Всего к этой отличной степени можно подобрать 3 различных m.

И остальные две степени одинаковые ⇒ как между ними распределятся две оставшиеся степени неважно. Тогда имеем ещё $17 \cdot 2 \cdot 3$ вариантов

При $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=19 \end{array}\right. \\ 2 \le n \le 15\end{array}\right.$ аналогично получаем ещё $3 \cdot 14 \cdot 2$ вариантов.

3) При $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l} n=1 \\ n=16 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=19 \end{array}\right.\end{array}\right.$ имеем 4 различные пары n и m.

~~Для каждой пары к одиночной степени можно подобрать два различных значения степени другого множителя. Поэтому каждая пара добавляет только 2 варианта, и всего $4 \cdot 2 = 8$ новых троек.~~

~~Итого получаем $14 \cdot 17 \cdot 6 + 17 \cdot 2 + 14 \cdot 2 + 8 = 14 \cdot 17 \cdot 6 + 31 \cdot 2 + 8 =$~~
~~$= 84 \cdot 17 + 62 + 8 = 84 \cdot 17 + 70 = 1428 + 70 = 1498$ троек.~~

~~Ответ: 1498.~~

Ранее я считал, что порядок не имеет значения, но поступил комментарий, что имеет. В случаях 1 и 2 нельзя получить два одинаковых числа, потому что степени как минимум одного из делителей (2 или 17) различны. Поэтому в этих пунктах для каждой тройки имеем $3! = 6$ вариантов её перестановок.

В случае 3 имеем следующий набор для каждой пары,

$n_1 \quad n_1 \quad n_2$

$m_1 \quad m_1 \quad m_2$.

Если к n_2 поставить m_2, то получим 2 одинаковых числа: $n_1 m_1$ и $n_1 m_1$.

(2)

Чистовик

В таком случае получаем перестановки с повторениями: $\frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$.

Если же к n_2 взять m_1, то будет 3 различных числа и $3! = 6$ перестановок. То есть для каждой пары n и m имеем $6+3=9$ различных троек. Пар всего 4, поэтому добавляем $4\cdot 9 = 36$ троек.

Итого в случаях 1 и 2 получаем $6(14\cdot 17\cdot 6 + 3\cdot 14\cdot 2 + 3\cdot 17\cdot 2) + 36 =$

$= 6(14\cdot 17\cdot 6 + 6\cdot 31) + 36 = 36(14\cdot 17 + 31) + 36 = 36(14\cdot 17 + 32) =$

$= 36(238+32) = 36\cdot 270 = 9720$.

Ответ: 9720.

Чистовик.

N5.

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$

$\log_{(x+4)^2}(x+34)$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$\sqrt{x+34}=a$

$-x-4=b$

$\sqrt{2x+23}=c$.

тогда $\log_a c^2 = 2\log_a c$.

$\log_{b^2} a^2 = \log_b a$.

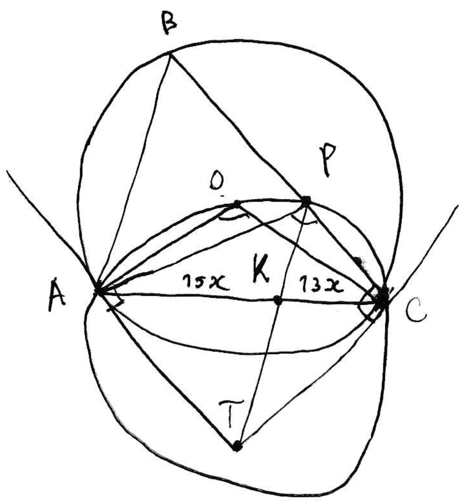
$\log_c b$

$\log_b a = \log_c b$

$\log_b a \log_a c = 1$.

Чистовик.

№6.



Так как $\triangle APK$ и $\triangle CPK$ имеют общую высоту, $\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{15}{13}$

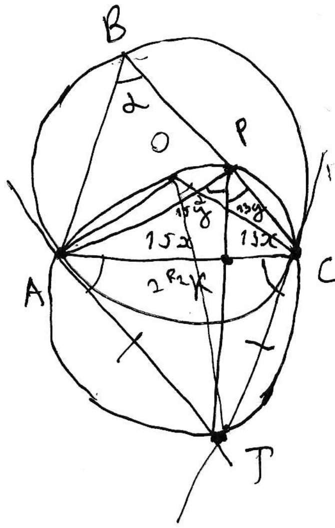
$\angle AOC = \angle APC$

опираются на одну дугу.

$\angle OAT = 90°$

$\angle OCT = 90°$ $\Rightarrow$ $\angle OAT + \angle OCT = 180° \Rightarrow$

около $AOCT$ можно описать окружность, причём единственную $\Rightarrow$ это окружность, описанная около $AOC \Rightarrow$ T лежит на этой окружности!



По теореме о хордах $AK \cdot KC = PK \cdot KT$

$195x^2 = AK \cdot KC$

По теореме о касательных $AT = CT$.

Тогда $\triangle ACT$ - равноб.,

$\angle CAT = \angle ACT$; $\angle TPC = \angle TAC$

(опир. на одну дугу).

$\angle APT = \angle TPC$

(аналогично) $\Rightarrow$

Тогда по св-ву биссектрисы PT - бисс. угла APC,

$\frac{AP}{PC} = \frac{15x}{13x} = \frac{15}{13}$.

$\angle AOC = \angle APC = 2\alpha$

~~$AC = 2R_1 \sin \angle AOC = 2R_2 \sin \alpha$.~~

По теореме об угле между хордой и касательной

$\angle ABC = \angle CAT = \alpha$.

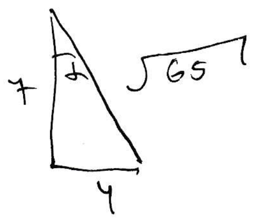
Чистовик

$\angle ABP = \angle KPC = \alpha \Rightarrow AB \parallel PK \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC \Rightarrow$

$k = \frac{15+13}{13} = \frac{28}{13}.$

$\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = k^2 \Rightarrow S_{ABC} = k^2 \cdot S_{KPC} = \left(\frac{28}{13}\right)^2 \cdot 13 = \frac{28^2}{13} = \frac{784}{13}.$

$\angle ABC = \alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{7}.$



$\Rightarrow \cancel{\sin\alpha}\ \cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{65}}.$

$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}.$

$\triangle APC: AC = 2R_1 \sin\alpha$

$\triangle ACT: AC = 2R_2 \sin 2\alpha$

$R_1 \sin\alpha = R_2 \sin 2\alpha = 2R_2 \sin\alpha \cos\alpha.$

$R_1 = 2R_2 \cos\alpha = R_2 \frac{14}{\sqrt{65}}.$

~~$\triangle ACT$:~~

Ответ: $S = \frac{28^2}{13} = \frac{784}{13}.$

Черновик.

НОД (a, b, c) = 22 = $2 \cdot 11$.

НОК (a; b; c) = $2^{16} \cdot 11^{19}$.

~~$2 \cdot 11$ $2 \cdot 11$ $2 \cdot 11$~~

2 $\quad 2^{16}$

11 $\quad 11^{19}$.

$$\begin{array}{r} \times\ 14 \\ 6 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 84 \\ 17 \\ \hline +\ 588 \\ 84\ \ \\ \hline 1428 \end{array}$$

Черновик.

$2 \quad 2 \quad 2^{16}$

$11 \quad 11^{19} \quad 11^{10}$

$2 \quad 2 \quad 2^{16}$

$11 \quad 11 \quad 11^{19}$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$

$\log_{(x+4)^2}(x+34)$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$x \quad 2$

$$\begin{array}{r} {}^{2} \\ \times\ 14 \\ 17 \\ \hline +\ 98 \\ 14 \\ \hline 238 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {}^{4} \\ \times\ 36 \\ 27 \\ \hline +\ 252 \\ 72 \\ \hline 972 \end{array}$$

Черновик.

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$

$\log_{(x+4)^2}(x+34)$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$.

$\sqrt{x+34}=a$

$-x-4=b$

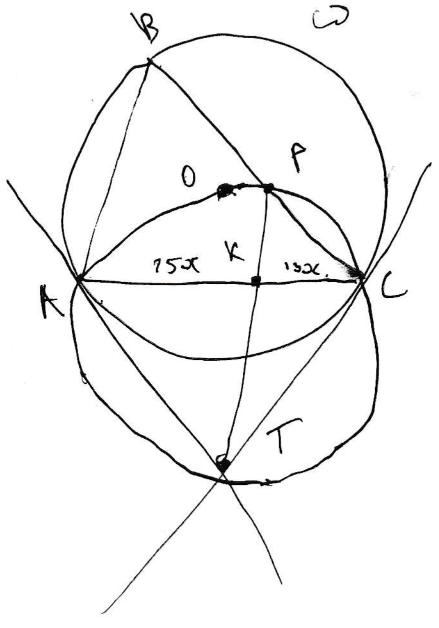
$\sqrt{2x+23}=c$.

$\log_a c^2 = 2\log_a c = 2\log_a c$

$\log_{b^2} a^2 = \log_b a = \log_b a$

$\log_c (mb) = \log_c (mb) = \log_c b$.

$49+16=65$



6

$\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 28 \\ \hline 224 \\ +\ 56\ \\ \hline 784 \end{array}$