Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100399**

ID профиля: **295953**

Вариант 23

№1

Пусть разность арифметической прогресии будет d.

Значит $a_k = a_1 + (k-1)d$.

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_6 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + 5d) = 6a_1 + 15d$$

$$a_{10} a_{16} = (a_1 + 9d)(a_1 + 15d) > 6a_1 + 15d + 39 \Rightarrow a_1^2 + 24a_1 d + 135d^2 > 6a_1 + 15d + 39$$

$$a_{11} \cdot a_{15} = (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 6a_1 + 15d + 55 \Rightarrow a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2 < 6a_1 + 15d + 55$$

т.к. арифметическая прогресия возрастающая тогда $d > 0$. $(a_1^2 + 24a_1 d + 135d^2) + 5d^2 > 6a_1 + 15d + 39 + 5d^2$ но

$a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2 < 6a_1 + 15d + 55 \Rightarrow 6a_1 + 15d + 39 + 5d^2 < 6a_1 + 15d + 55$

$\Rightarrow 5d^2 < 16 \Rightarrow d^2 < \frac{16}{5} < 4 \Rightarrow (d-2)(d+2) < 0 \Rightarrow$ $d + 2 > 0 \Rightarrow d < 2$

$\Rightarrow$ т.к. все числа арифметической прогресии челые тогда d - тоже челое $\Rightarrow d < 2 \Rightarrow$ но $d > 0 \Rightarrow d \geq 1 \Rightarrow d = 1$.

$a_1^2 + 24a_1 d + 135d^2 > 6a_1 + 15d + 39$ эквиваленто

$a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 54 \Rightarrow a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_1 + 9)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -9$

$a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2 < 6a_1 + 15d + 55 \Rightarrow a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 70$

$\Rightarrow a_1^2 + 18a_1 + 80 < 0 \Rightarrow (a_1 + 9)^2 - 1 < 0 \Rightarrow (a_1 + 9)^2 < 1$

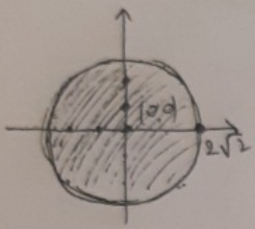
$1 > (a_1 + 9)^2 > 0 \Rightarrow (a_1 + 9)^2 > 0 \Rightarrow (a_1 + 9)^2 \geq 1$ т.к. a_1 челое число $\Rightarrow$ противорече такой арифметической прогресии не может быть.

Ответ: не существует таких a_1.

№3 стр 1

Сначала решим ре $a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8)$

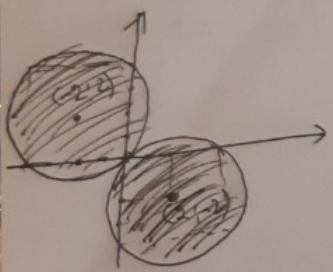
$\Rightarrow$ 1) $a^2+b^2 \le 8$ это все точки внутри окружности с центром в $(0;0)$ и радиусом $2\sqrt{2}$ (включая саму окружность)



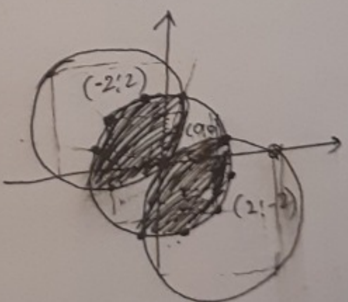
2) $a^2+b^2 \le -4a+4b \Rightarrow (a^2+4a+4)+(b^2-4b+4) \le 8$

$\Rightarrow (a+2)^2+(b-2)^2 \le (2\sqrt{2})^2$

~~это~~ решением будет две окружности радиусов $2\sqrt{2}$ и центрами в $(2;-2)$ и $(-2;2)$

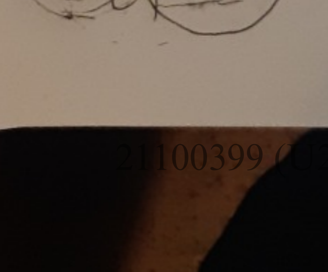


3) Наконец $a^2+b^2 \le \min(-4a+4b+8)$ это пересечение 1) и 2)



4) $(x-a)^2+(y-b)^2 \le (2\sqrt{2})^2$

значит площадь M равно объединению всех окружностей радиуса $2\sqrt{2}$ с центром в точке любой точке закрашеной области в пункте 3). Обозначим окужности через (1), (2) и (3) как на рисунке



Пусть (1) и (3) пересекаются в точках A и B

(2) и (3) в точках C, D. O – центр координат

O_1 и O_2 центр (1) и (2) – соответсвенно

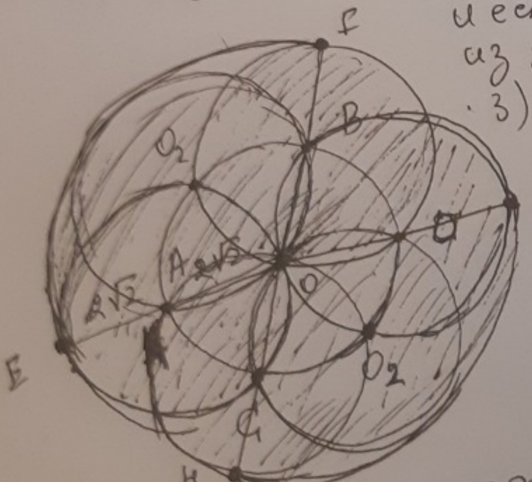
Все окружности ~~проходящие через~~ с центрами в дуге ~~AOB~~ AO_1B делают площадь

№51 стр 2

4) Все окружности с центрами в дуге AB накрывают площадь

т.е. окружность с центром O и радиусом $4\sqrt{2}$ ограниченой ~~A и B~~ точками A и B и окружности в точках центрами в точках A и B и радиусом $2\sqrt{2}$.

аналогично для C и D и получим:



и если взять любую точку из закрашенной области в пункте 3) то окружность с центром в этой точке будет ограничена данной закрашеной областью.

Нужно найти эту площадь. $\angle AOB = 120$

$\angle COD = 120$. Найдем площадь сектора EOF.

$\Rightarrow EO = 4\sqrt{2} \to$ радиус $\Rightarrow$ т.к. $\angle EOF = 120$ значит.

площадь EOF будет $\frac{\pi R^2 \cdot 120}{360} = \frac{\pi R^2}{3} = \frac{\pi \cdot (4\sqrt{2})^2}{3} = \frac{32\pi}{3}$

найдем сектор EAO в окружности с центром A и радиусом $2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \frac{(2\sqrt{2})^2 \pi}{2} = 4\pi$ и сектор OBF тоже 4π.

окружность с центром B и радиусом $2\sqrt{2}$ пересекается с окружностью с центром A и радиусом $2\sqrt{2}$ некой площадью

это площадь равна $\frac{(2\sqrt{2})^2\pi}{3} - 4\sqrt{3} + \frac{(2\sqrt{2})^2\pi}{3} = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$

Аи 4

№3 стр 3

Аналогично и окружности с центрами A и C и радиусами $2\sqrt{2}$ пересекаются в площадью $\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ Всего будет $\left(\frac{52\pi}{3} + 8\pi + 4\pi\right) \cdot 2 - \left(\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}\right) \cdot 2$

$= 2\left(\frac{52\pi}{3} - \frac{16\pi}{3} + 8\pi + 4\sqrt{3}\right) = 2\left(\frac{16\pi}{3} + 8\pi + 4\sqrt{3}\right)$

$= \frac{80\pi}{3} + 8\sqrt{3}$.

Ответ: площадь $M = \frac{80\pi}{3} + 8\sqrt{3}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100399**

ID профиля: **295953**

Вариант 23

№4

НОД$(a,b,c) = (a,b,c) = 22$

НОК$(a,b,c) = [a,b,c] = 2^{16} \cdot 11^{19}$

$[a,b,c] = 2^{16} \cdot 11^{19} \Rightarrow 2^{16} \cdot 11^{19} \vdots a, b, c \Rightarrow$

значит все простые числа a, b и c имею простые делители только 2 и 11

тогда:

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 11^{\beta_1}$, $b = 2^{\alpha_2} \cdot 11^{\beta_2}$, $c = 2^{\alpha_3} \cdot 11^{\beta_3}$

$(2^{\alpha_1} \cdot 11^{\beta_1}, 2^{\alpha_2} \cdot 11^{\beta_2}, 2^{\alpha_3} \cdot 11^{\beta_3}) = 2^{\min(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} \cdot 11^{\min(\beta_1,\beta_2,\beta_3)} = 2^1 \cdot 11^1$

$\min(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3) = 1$, $\min(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 1$

$[2^{\alpha_1} \cdot 11^{\beta_1}, 2^{\alpha_2} \cdot 11^{\beta_2}, 2^{\alpha_3} \cdot 11^{\beta_3}] = 2^{\max(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} \cdot 11^{\max(\beta_1,\beta_2,\beta_3)} = 2^{16} \cdot 11^{19}$

$\max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 16$, $\max(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 19$

$\min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$ а $\max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 16$

кол-во способов выбрать min и max среди $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ровняется $2 \cdot C_3^2 = 6$ т.к. выберем 2 из них а потом сделаем одном min а другого max. Кол-во способов выбрать третий из них ровно 16 т.к. он может принимать все значение от 1 до 16. Кол-во способов выбрать такую тройку чисел ровно $C_3^2 \cdot 2 \cdot 16 = 96$

Аналогично с $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. кол-во способов выбрать такую тройку что $\min = 1$ а $\max = 19$ ровно $2 \cdot C_3^2 \cdot 19 = 114$

~~для~~ Для каждой тройки $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — существует ровно 114 троек $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Кол-во способов выбрать 2 такие тройки $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ровно $114 \cdot 96 = 10944$

Ответ: 10944

N5 стр 1

1) $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34) = a$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = a+1$

$-x-4>0 \Rightarrow x<-4 \quad x+34>0$ и $2x+23>0 \Rightarrow$

$(-11{,}5<x<-4)$.

(1) $\left(\sqrt{x+34}\right)^a = (2x+23)$; (2) $(x+4)^{2a} = (x+34)$

(3) $\left(\sqrt{2x+23}\right)^{a+1} = -(x+4)$

$\Rightarrow (x+34)^a = (2x+23)^2, \quad (x+4)^{2a} = (x+34) = (2x+23)^{\frac{2}{a}}$

из (3) получим что $(2x+23)^{a+1} = (x+4)^2 \Rightarrow |x+4| = (2x+23)^{\frac{a+1}{2}}$

$|x+4| = (2x+23)^{\frac{a+1}{2}}$. $(x+4)^{2a} = (2x+23)^{\frac{2}{a}} \Rightarrow |x+4| = (2x+23)^{\frac{1}{a^2}}$

$\Rightarrow \frac{2}{a^2} = \frac{a+1}{2} \Rightarrow 2 = a^2+a^3 \Rightarrow (a-1)(a^2+a+1)+(a-1)(a+1) =$

$= (a-1)(a^2+2a+2) = 0 \Rightarrow a=1 \quad a^2+2a+2 = (a+1)^2+1>0$

единственное решение $a=1$.

(2) $(x+4)^{2a} = (x+34) \Rightarrow x^2+8x+16 = x+34 \Rightarrow x^2+7x-18=0$

$D=121 \Rightarrow x_1 = \frac{-7+11}{2} = 2 > -4 \varnothing$ (посторонний корень).

$x_2 = \frac{-7-11}{2} = -9$. $-11{,}5<-9<-4$ ок.

проверка $\sqrt{x+34} = 5, \quad 2x+23 = 5 \quad -(x+4) = 5$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_5 5 = 1, \quad \log_{(x+4)^2} x+34 = \log_{5^2} 5^2 = 1$.

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = \log_{\sqrt{5}} 5 = 2$.

21100399 (U295953 M1301689)

2) $\overset{\text{стр 2}}{\log}_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = a$

$\log_{(x+4)^2}(x+34) = a+1.$

(1) $(\sqrt{x+34})^a = 2x+23 \Rightarrow$ (2) $(\sqrt{2x+23})^a = -(x+4)$

(3) $(x+4)^{2a+2} = (x+34)$

(1) $(x+34)^a = (2x+23)^2$. (2) $(x+34)^a = (x+4)^{2a(a+1)}$

$\Rightarrow (x+4)^{2a(a+1)} = (2x+23)^2.$ (3) $(2x+23) = (x+4)^{2/a} \Rightarrow (2x+23)^2 = (x+4)^{\frac{4}{a}}$

$\Rightarrow \cancel{\frac{2}{a} = 2a(a+1) \Rightarrow a^3+a^2=1}$

$\Rightarrow (2x+23)^2 = (x+4)^{2a(a+1)} = (x+4)^{\frac{4}{a}} \Rightarrow \frac{4}{a} = 2a(a+1)$

$\Rightarrow a^2+a^3 = 2 \Rightarrow (a-1)(a^2+2a+2) = 0 \Rightarrow a = 1$ $(a+1)^2+1>0.$

$\cancel{\sqrt{x+34} = 2x+23}$

(3) $(\sqrt{2x+23})^a = -(x+4) \Rightarrow 2x+23 = x^2+8x+16 \Rightarrow$

$x^2+6x-7=0 \Rightarrow (x-1)(x+7)=0 \Rightarrow x = \cancel{1} > -4$ (посторонний корень)

$x+7=0 \Rightarrow$ или $x=-7$ $\cancel{<-4}$

$x=-7$ проверка: $\cancel{\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=}$

$\sqrt{x+34} = 2x+23 \Rightarrow \sqrt{27} = -14+23 = 9$ $\varnothing$. $x=-7$ (не решение

3) $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = a+1$, $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = \log_{(x+4)^2}(x+34) = a$

(1) $(\sqrt{x+34})^{a+1} = 2x+23$, (2) $(\sqrt{2x+23})^a = (-x-4)$, (3) $((x+4)^2)^a = (x+34)$

$(x+4)^2 = (2x+23)^a \Rightarrow \cancel{(2x+23)}$ (3) $((x+4)^2)^a = (x+34) = (2x+23)^{a^2}$

(1) $(x+34)^{\frac{a+1}{2}} = 2x+23 \Rightarrow (x+34)^{\frac{a^2(a+1)}{2}} = (2x+23)^{a^2} = (x+34)$

$\Rightarrow a^3+a^2 = 2 \Rightarrow a=1$ ед. реш.

21100399 (U295953 M1301689)

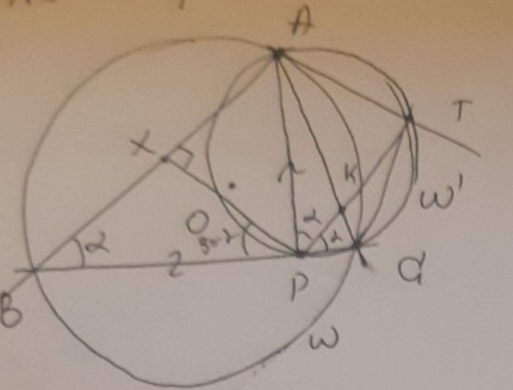
№5 стр3

3) $\left(\sqrt{x+34}\right)^{a+1} = 2x+23 \overset{a=1}{\Rightarrow} |x+34| = 2x+23 \Rightarrow$

$x+34>0 \Rightarrow x=11 > -4$ (не решение)

$\Rightarrow$ Ответ: $x=-9$

№6 стр 1



а) $OA \perp AT$, $OC \perp CT \Rightarrow T \in$ окружности проходящей через A, O, C. Пусть $\angle ABC = \alpha \Rightarrow CAT = \angle ACT = \alpha$

A, P, C, T — лежат на одной окружности $\Rightarrow \angle APT = \angle CPT = \alpha$

$\Rightarrow \angle APK = \alpha = \angle CPK \Rightarrow \angle APC = 2\alpha \Rightarrow \angle BAP = \alpha \Rightarrow BP = AP$

$\angle KPC = 2\alpha \Rightarrow PK \parallel AB$. $\cancel{PK}$ $\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{CK} = \frac{15}{13}$

$\frac{PK}{AB} = \frac{CK}{AC}$ (по свойству параллельности). $\frac{AK}{CK} + 1 = \frac{AC}{CK} = \frac{28}{13}$

$\Rightarrow \frac{PK}{AB} = \frac{13}{28} \Rightarrow \cancel{PK = AB}$ $AB = \frac{28}{13} PK$.

$S_{APK} = \frac{AP \cdot PK \sin\alpha}{2} = 15$. $S_{ABP} = \frac{AB \cdot AP \sin\alpha}{2} =$

$= \frac{PK \cdot AP \sin\alpha}{2} \cdot \frac{28}{13} = \frac{28 \cdot 15}{13}$. $S_{ABC} = S_{ABP} + S_{APK} + S_{CPK} =$

$= \frac{28 \cdot 15}{13} + 28 = \frac{28^2}{13} = \frac{784}{13} = 60\frac{4}{13}$. Ответ: $60\frac{4}{13}$.

б) $tg\alpha = \frac{4}{7}$. проведём высоту из P на AB. в точке X.

$\frac{PX}{BX} = \frac{4}{7} \Rightarrow PX = \frac{4}{7} BX = \cancel{\frac{4}{7} BX}\ \frac{2AB}{7} \Rightarrow PX = \frac{2AB}{7} \Rightarrow$

$\frac{\frac{2AB}{7} \cdot AB}{2} = S_{ABP} = \frac{AB^2}{7} = \frac{28 \cdot 15}{13} \Rightarrow AB^2 = \frac{7 \cdot 28 \cdot 15}{13}$

$BX^2 = \frac{AB^2}{4} = \frac{7^2 \cdot 15}{13}$. $PX^2 = \frac{4AB^2}{49} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 28 \cdot 15}{49 \cdot 13} = \frac{16 \cdot 15}{13}$

стр2

$BP^2 = \left(\sqrt{Px^2+Bx^2}\right)^2 = Px^2+Bx^2 = \frac{16\cdot15}{13} + \frac{7^2\cdot15}{13} = \frac{65\cdot15}{13} = 75$

$BP = 5\sqrt3$. $\frac{PC}{AP} = \frac{13}{15}$ (по свойству биссектрисы).

$\frac{PC}{5\sqrt3} = \frac{13}{15} \Rightarrow PC = \frac{13\sqrt3}{3} = \frac{13}{\sqrt3}$ $AP = 5\sqrt3$

$tg\alpha = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{4^2}{7^2} \Rightarrow \sin^2\alpha\cdot49 = 16 - 16\sin^2\alpha$

$\Rightarrow 16 = 65\sin^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{16}{65}$ $\cos^2\alpha = \frac{49}{65}$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos2\alpha = \frac{33}{65}$

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP\cdot PC\cos2\alpha = (5\sqrt3)^2 + \left(\frac{13}{\sqrt3}\right)^2 - 2\cdot\frac{13}{\sqrt3}\cdot5\sqrt3\cdot\frac{33}{65}$

$= 75 + \frac{169}{3} - 66 = 9 + \frac{169}{3} = 9 + 56\frac{1}{3} = 65\frac{1}{3}$.

$AC^2 = \frac{196}{3} \Rightarrow AC = \frac{14}{\sqrt3}$.

Ответ: $AC = \frac{14}{\sqrt3}$

21100399 (U295953 M1301689)