Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100368**

ID профиля: **855057**

Вариант 23

Чистовик

№1

Пусть r-разность прогрессии. Заметим, что a_1 и r - целые числа, ведь все члены прогрессии целые. По условию $S = a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r + \ldots + a_1 + 5r = 6a_1 + 15r$. Также из условия

$a_{10}a_{16} = (a_1+9r)(a_1+15r) = a_1^2 + 24a_1r + 135r^2 > 6a_1 + 15r + 39$. и

$a_{11}a_{15} = (a_1+10r)(a_1+14r) = a_1^2 + 24a_1r + 140r^2 < 6a_1 + 15r + 55$.

Домножим первое нер-во на -1 и сложим. Получим $5r^2 < 16$. Тогда $r < \frac{4}{\sqrt{5}} \leq 2$. Но по условию $r > 0$, поэтому $r = 1$.

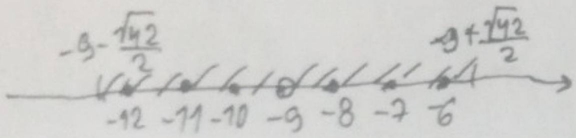
Теперь подставим $r = 1$ в исх. нер-ва:

1) $a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 54$; $a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0$; $(a_1+9) > 0$; $a_1 \neq -9$.

2) $a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 70$; $a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0$; $D = 18^2 - 280 = 42$;

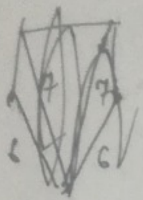
x(корень) = $\frac{-18 \pm \sqrt{42}}{2} = -9 \pm \frac{\sqrt{42}}{2}$. $\frac{\sqrt{42}}{2} > 3$, т.к. $\sqrt{42} > 6$, но < 4, т.к. $\sqrt{42} < 8$.

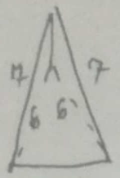
Значит $a_1 \in \left(-9 - \frac{\sqrt{42}}{2}; -9 + \frac{\sqrt{42}}{2}\right)$.



Ответ: -12; -11; -10; -8; -7; -6.

Черновик

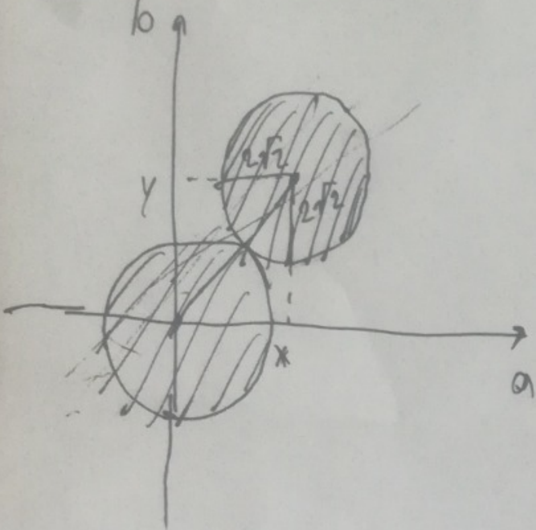




$4b-4a < 8$

$b-a<2$

$b<a+2$



$(r_1+r_2)^2 \geq x^2+y^2$

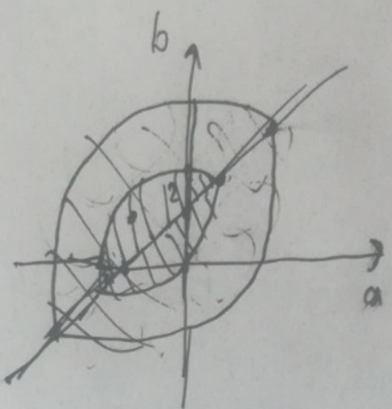
$r_1=2\sqrt{2}$

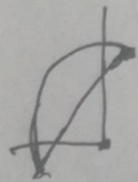
r_2

$a^2+b^2 \leq 4b-4a$

$(a^2+4a+4)+(b^2-4b+4) \leq 8$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \leq 8$





$b=a+2$

$(a+2)^2+a^2 = 8$

$2a^2+4+4a = 8$

$2a^2+4a=4$

$a^2+2a=2$

$a(a+2)=2$

$\left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-2 \end{array}\right.$

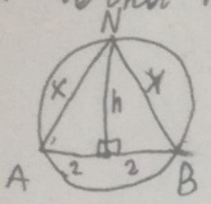
21100368 (U855057 M1298015)

Чистовик

№2

(такая п-ть существует, она $\parallel$ основаниям цилиндра)

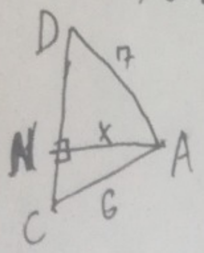
Проведём через AB п-ть, перпендикулярно CD. Пусть N-точка пересечения этой п-ти и CD. Тогда высота $\triangle ANB$,



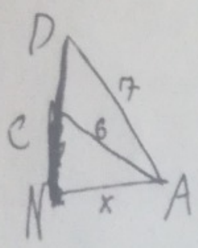
являющегося равнобедренным, т.к. его стороны AN и NB - высоты равных $\triangle ACD$ и BCD, равна $\sqrt{x^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{x^2-4}$, где $x=AN=NB$. Тогда $S_{ANB}=\sqrt{x^2-4}\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=2\sqrt{x^2-4}$. С другой стороны,

$S_{ANB}=\frac{abc}{4R^*}$ (a,b,c-стороны) $=\frac{4x^2}{4R}=\frac{x^2}{R}$. Тогда $R=\frac{x^2}{2\sqrt{x^2-4}}=\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}=t+\frac{1}{t}$,

где $t=\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$. По нер-ву о средних $t+\frac{1}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2$, причём равенство достигается при $t=\frac{1}{t}=1$. ~~[illegible]~~ t, если что, ≥ 0, т.к. равно корню, деленному на 2. В ~~[illegible]~~ таком случае, ~~[illegible]~~ $\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}=1$; $x^2-4=4$; $x^2=8$; $x=2\sqrt{2}$, ведь x тоже ≥ 0, т.к. это длина отрезка.



Значит, $AN=2\sqrt{2}$, раз R минимально. Тогда $NC=\sqrt{6^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{36-8}=\sqrt{28}$, а $DN=\sqrt{7^2-x^2}=\sqrt{49-8}=\sqrt{41}$. Выходит, $CD=\sqrt{28}+\sqrt{41}$, либо $CD=\sqrt{41}-\sqrt{28}$, если $\triangle ACD$ имеет тупой угол C.



Ответ: $\sqrt{28}+\sqrt{41}$; $\sqrt{41}-\sqrt{28}$

* важное замечание: R (радиус опис. окр. $\triangle ABN$) и есть радиус цилиндра, т.к. п-ть $ABN \parallel$ основаниям цилиндра.

Черновик

$S = a_1 \cdot 6 + r + 2r + 3r + 4r + 5r = 6a_1 + 15r$

$a_1; r$

$(a_1+9r)(a_1+15r) > 6a_1+15r+39$

$a_{10} a_{16} > S+39$

$a_1^2 + 9a_1 r + 15a_1 r + 135r^2 > 6a_1 + 15r + 39$

$\underbrace{9a_1 r + 15a_1 r}_{24a_1 r}$

$a_{11} a_{15} < S+55$

$(a_1+10r)(a_1+14r) = a_1^2 + 10a_1 r + 14a_1 r + 140r^2 < 6a_1 + 15r + 55$

$\underbrace{10a_1 r + 14a_1 r}_{24a_1 r}$

$5r^2 < 16$

$r^2 < \frac{16}{5}$

$r < \frac{4}{\sqrt{5}} < 2$

$r = 1$

$4 > \frac{\sqrt{42}}{2}$

$a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 54$

$a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0$

$(a_1+9)^2 > 0$

$a_1 \neq -9$

$a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 70$

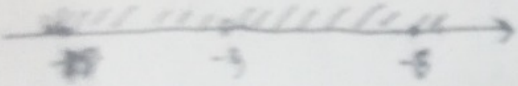
$a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0$

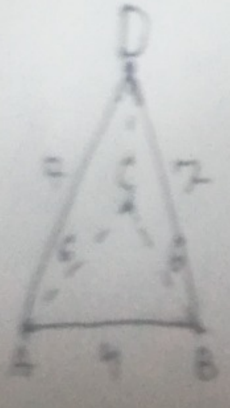
$D = 18^2 - 280 = 324 - 280 = 42$

$x = \frac{-18 \pm \sqrt{42}}{2} = -9 \pm \frac{\sqrt{42}}{2}$

-12 -9 -6

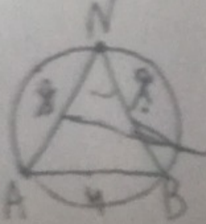
Ответ: -12; -11; -10; -8; -7; -6





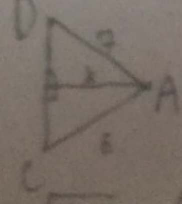
перпBCD

и на гранях ACD и BCD



$S = \frac{abc}{4R} = \frac{4x^2}{4R} = \frac{x^2}{R}$; $S = 4 \cdot \sqrt{x^2-4} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{x^2-4}$

$2\sqrt{x^2-4} = \frac{x^2}{R}$ $R = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-4}}$



$h = \sqrt{x^2-2^2} = \sqrt{x^2-4}$

21100368 (U855057 M1298015)

Черновик

$R = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2} + \frac{4}{2\sqrt{x^2-4}}$; $t = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$ $R = t + \frac{1}{t}$

$(2\sqrt{x^2-4}) \cdot \frac{\sqrt{x^2-4}}{2} = x^2-4$

$\frac{t+\frac{1}{t}}{2} \geq \sqrt{1}$

$t + \frac{1}{t} \geq 2$

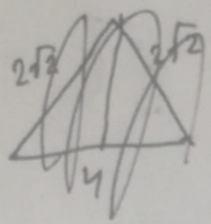
равно, если $t = \frac{1}{t}$, т.е. $t=1$ ($t>0$)

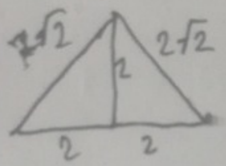
$\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} = 1$; $\sqrt{x^2-4} = 2$

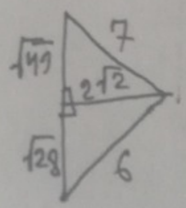
$x^2-4=4$

$x^2=8$

$x=2\sqrt{2}$ ($x>0$)







$6^2-8=36-8=28$

$7^2-8=49-8=41$

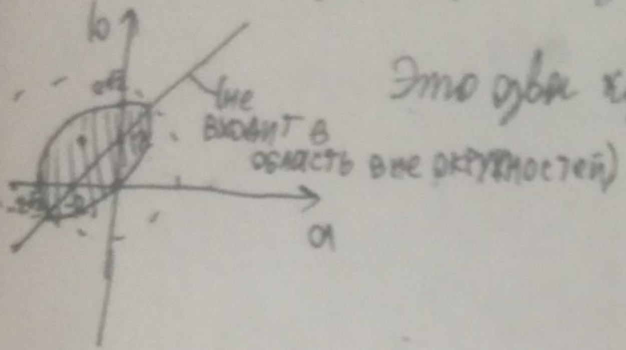
Ответ: $\sqrt{28}$, $\sqrt{41}$

Чистовик

№3

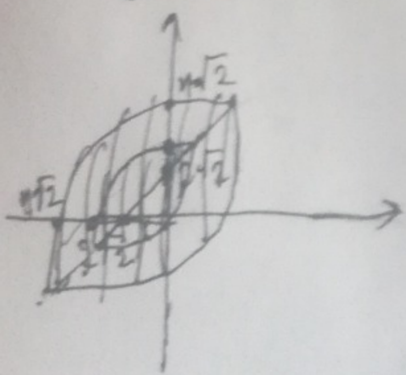
Заметим, что $4b-4a<8$, когда $b<a+2$, а $a^2-b^2\le 4b-4a$ значит, что $(a+2)^2+(b-2)^2\le 8$.

Тогда второе нер-во задает область:



Это два куска окружностей, разрезанных $b=a+2$ с радиусами $2\sqrt{2}$ и с центрами в $(0;0)$ и $(-2;2)$.

Теперь рассмотрим первое нер-во. Пускай x и y - параметры. ~~Он~~ Тогда оно задает окр. с центром в $(x;y)$ и радиусом $2\sqrt{2}$. Нужно, чтобы эта окружность пересекалась с нашей областью. Иначе говоря, $(x;y)$ удалено от области не далее $2\sqrt{2}$. Значит, область центров такова:



Эта область - просто исходная, растянутая во все стороны в 2 раза. Осталось только найти её площадь...

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

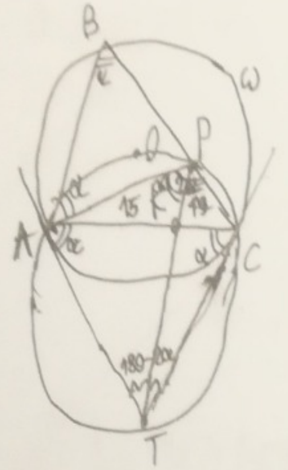
Шифр: **21100368**

ID профиля: **855057**

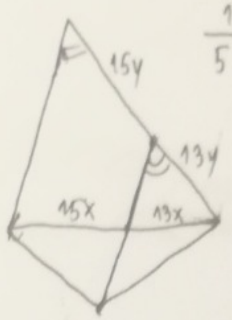
Вариант 23

Черновик

Найти $\frac{BC}{PC}$



$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$



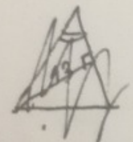
$$\begin{array}{r} 169 \\ +225 \\ 198 \\ \hline 592 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 394 \\ -198 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ +225 \\ \hline 394 \end{array}$$

$AC^2 = PC^2 + AP^2 + 2PC \cdot AP \cdot \cos 2\alpha =$
$= \frac{169}{3} + \frac{225}{3} + 2\frac{15 \cdot 13}{3} \cdot \frac{33}{651} = \frac{1}{3} \cdot \Big(169 + 225 + \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 33}_{198}\Big) = \frac{592}{3}$ $\quad AC = \sqrt{\frac{592}{3}}$

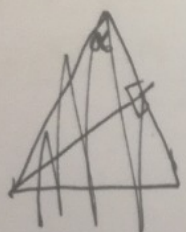
$\frac{BC}{PC} = \frac{H}{h} = \frac{28y}{13y} = \frac{28}{13} \Rightarrow S_{ABC} = S_{APC} \cdot \frac{28}{13} = 28 \cdot \frac{28}{13} =$
$= \frac{28^2}{13}$

$\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1;\ \frac{56^2}{65^2} + \cos^2 2\alpha = 1$



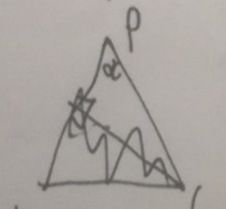
$tg\,\alpha = \frac{4}{7} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad \sin\alpha = \frac{4}{7}\cos\alpha$

$\cos^2\alpha + \left(\frac{4}{7}\cos\alpha\right)^2 = \cos^2\alpha \cdot \left(1 + \frac{16}{49}\right) = 1;\ \cos^2\alpha = \frac{1}{\frac{65}{49}} = \frac{49}{65}$



$S = 13$

$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{65}};\ \sin\alpha = \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{\sqrt{65}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$



$S_{KPC} = 13 = PK \cdot PC \cdot \sin\alpha \cdot \frac{1}{2} = PK \cdot PC \cdot \frac{2}{\sqrt{65}}$ $\qquad \frac{PA}{PC} = \frac{15}{13}$

$S_{KPA} = 15 = PK \cdot PA \cdot \sin\alpha \cdot \frac{1}{2} = PK \cdot PA \cdot \frac{2}{\sqrt{65}}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{65}} \cdot \frac{7}{\sqrt{65}} = \frac{2 \cdot 28}{65} = \frac{56}{65};\ S_{APC} = PA \cdot PC \cdot \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{2} = 28$

$PC \cdot \frac{15}{13} PC \cdot \frac{56}{65} = 56;\ PC^2 = 65 \cdot \frac{13}{15} = \frac{13^2}{3};\ PC = \frac{13}{\sqrt{3}};\ PA = \frac{15}{\sqrt{3}}$ $\qquad \cos^2 2\alpha = \frac{1089}{65^2}$

$\cos 2\alpha = \frac{33}{65}$

$$\begin{array}{r} 65 \\ \times 65 \\ \hline 325 \\ 390 \\ \hline 4225 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 56 \\ \times 56 \\ \hline 336 \\ 280 \\ \hline 3136 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4225 \\ -3136 \\ \hline 1089 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 33 \\ \times 33 \\ \hline 99 \\ 99 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Чистовик

Теперь обратимся к S_{APC}. $28 = PC\cdot\frac{15}{13}PC\cdot\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{2}$; $\frac{15}{13}\cdot PC^2\cdot\frac{56}{65}=56$;

$PC^2=\frac{13\cdot 65}{15}=\frac{13^2}{3}$; $PC=\frac{13}{\sqrt{3}}$; $PA=\frac{15}{\sqrt{3}}$. Ну и теорема косинусов для

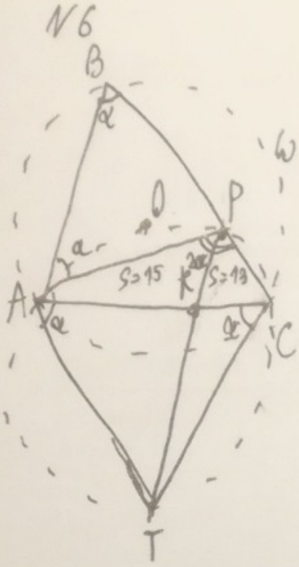
$\triangle APC$: $AC^2=PC^2+AP^2-2AP\cdot PC\cdot\cos 2\alpha=\frac{13^2}{3}+\frac{15^2}{3}-2\cdot\frac{13\cdot 15}{3}\cdot\frac{33}{65}=\frac{169}{3}+\frac{225}{3}-$

$-\frac{2\cdot\cancel{13}\cdot\cancel{15}^{\,3}\cdot 33}{3\cdot\cancel{65}}=\frac{1}{3}\cdot(169+225-198)=\frac{1}{3}\cdot 196=\frac{196}{3}\Rightarrow AC=\frac{14}{\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{14}{\sqrt{3}}$.

Чистовик

N6



а) Заметим, что $\angle APC = \angle AOC$, т.к. A, O, P, C на одной окр. и ΔABC остроугольный, т.е. O внутри него. Пусть $\angle ABC = \alpha$. Тогда $\angle APC = 2\alpha$. Т.к. TC и AT касаются ω, $\angle ACT = \angle CAT = \alpha$, значит $\angle ATC = 180 - 2\alpha$ по сумме углов ΔATC. Но тогда A, P, C, T лежат на одной окружности, т.к. T и P в разных полуплоскостях от AC. Тогда $\angle TPC = \angle TAC = \alpha$, т.к. A и C в разных полуплоскостях от TP. Тогда $AB \parallel PT$. Также $\angle APT = \angle ACT = \alpha$, значит и $\angle BAP = \alpha$ из-за параллельности. Заметим, что у ΔAKP и ΔKPC общая высота. Тогда $AK/KC = S_{AKP}/S_{KPC} = 15/13$. По теореме Фалеса $BP/PC = \frac{15}{13}$. Тогда $BC/PC = \frac{28}{13}$. Пусть h - высота из P на AC, а H - из B на AC. У ΔABC и ΔAPC общее основание, а у ΔAPC $S = 28$. Тогда $S_{ABC} = 28 \cdot \frac{28}{13} = \frac{28^2}{13}$

Ответ: $\frac{28^2}{13}$

б) $tg\,\alpha = \frac{4}{7} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{4}{7}\cdot\cos\alpha$, причем $\sin\alpha$ и $\cos\alpha > 0$, т.к. α - арктангенс угла с тангенсом >0. По осн. тригоном. т-ву $\cos^2\alpha + \left(\frac{4}{7}\cos\alpha\right)^2 = \cos^2\alpha\left(1 + \frac{16}{49}\right) = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{49}{65} \Rightarrow \cos\alpha = 7/\sqrt{65} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}$. Из формулы $S_{KPC} = KP \cdot PC \cdot \sin\alpha \cdot \frac{1}{2}$ и $S_{APK} = AP \cdot KP \cdot \sin\alpha \cdot \frac{1}{2}$ можно понять, что $\frac{AP}{PC} = \frac{15}{13}$. Теперь, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{65}} \cdot \frac{7}{\sqrt{65}} = \frac{56}{65}$. По осн. тригоном тож-ву $\frac{56^2}{65^2} + \cos^2 2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 2\alpha = \frac{4225 - 3136}{4225} = \frac{1089}{65^2} \Rightarrow \cos 2\alpha = \pm\frac{33}{65}$, но $tg\,\alpha < 1 \Rightarrow \alpha < 45° \Rightarrow 2\alpha < 90° \Rightarrow \cos 2\alpha > 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{33}{65}$.

Чистовик

№4

Заметим, что a, b и c кратны только 2 и 11 (из простых чисел) т.к. их НОК кратен только 2 и 11. Пусть $a=2^{a_1}\cdot 11^{a_2}$; $b=2^{b_1}\cdot 11^{b_2}$; $c=2^{c_1}\cdot 11^{c_2}$. Тогда $\min(a_1;b_1;c_1)=1$, а $\max(a_1;b_1;c_1)=16$, т.к. в НОДе и НОКе двойка стоит в 1 и 16 степенях соотв. Также $\min(a_2;b_2;c_2)=1$, $\max(a_2;b_2;c_2)=19$. Рассмотрим набор $\{a_1;b_1;c_1\}$ в неупорядоченном виде.

Этот набор состоит из 1, 16 и n, где $n\in[1;16]$. Рассмотрим 3 случая:

I $n=1$:

Таких наборов 3: (1;1;16), (1;16;1), (16;1;1).

II $n=16$:

Таких наборов также 3.

III $n\in[2;15]$:

Таких наборов 14 в неупорядоч. виде, а в упорядоч. – $3!\cdot 14=$ $=6\cdot 14=84$.

Всего 90 наборов. Аналогично поступаем для $(a_2;b_2;c_2)$:

$\{1;19;m\}$; $m\in[1;19]$

I $m=1$:

3 набора.

II $m=19$:

3 набора.

Черновик

~~$a = 22 \cdot a_1$~~

~~$b = b_1 \cdot 22$~~

~~$c = c_1 \cdot 22$~~

~~a, b и c : только 2 и 11 (из простых чисел)~~

~~Пусть $a_1 = 2^{k_a} \cdot 11^{q_a}$~~

~~$b_1 = 2^{k_b} \cdot 11^{q_b}$~~

~~$c_1 = 2^{k_c} \cdot 11^{q_c}$~~

~~$2^{15} \cdot 11^{18}$~~

~~$max(k) = 15$; $max(q) = 18$~~

~~$k_a = 15$; $k_b = 15$; k_c~~

~~I макс 1.~~ ~~II макс. 2~~ ~~III макс. 3~~

~~15; $0-14$; $0-14$~~ ~~$15; 15; 0-14$~~ ~~1~~

~~$15^2 \cdot 3$~~ ~~$15 \cdot 3$~~

~~$225 \cdot 3 = 675$~~

~~$675 + 45 + 1 = 721$~~

$a = 2^{a_1} \cdot 11^{a_2}$

$b = 2^{b_1} \cdot 11^{b_2}$

$c = 2^{c_1} \cdot 11^{c_2}$

$min(a_1; b_1; c_1) = 1$

$max(a_1; b_1; c_1) = 16$

I $1; 16; n$ $n \in [2; 15]$ II $1; 1; 16$ III $1; 16; 16$

$1; n; 16$ $14 \cdot 6 = 84$ 3 3

$16; 1; n$

$16; n; 1$

$n; 1; 16$

$n; 16; 1$

сумма $= 90$

$$\begin{array}{r} 108 \\ \times\ 90 \\ \hline 972\ \\ \hline 9720 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 6 \\ \hline 102 \end{array}$$

I $1; 19; m$ II III

$m \in [2; 18]$ 3 3

$17 \cdot 6 = 102$

сумма $= 108$ Ответ: 9720

Чистовик

III $m \in [2;18]$:

$17 \cdot 3! = 17 \cdot 6 = 102$ набора.

Всего 108 наборов.

Т.к. наборы $(a_1;b_1;c_1)$ и $(a_2;b_2;c_2)$ независимы друг от друга и однозначно определяют числа a, b, c, причем эти (все сразу) числа для разных пар наборов не будут совпадать, из соображений основной теоремы арифметики, ответ равен $108 \cdot 90 =$
$= 9720$.

Ответ: 9720