Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100286**

ID профиля: **367829**

Вариант 23

Чистовик

Пусть $a_1 = a$; $a_n = a + (n-1)d$ $\quad a_i \in \mathbb{Z}$

$S = S_6 = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \ldots + a_1 + 5d = 6a_1 + 15d.$

$a_{10} = a + 9d$

$a_{16} = a + 15d$

$a_{11} = a + 10d$

$a_{15} = a + 14d.$

По условию:

(1) $(a+9d)(a+15d) > 6a_1 + 15d + 39.$

(2) $(a+10d)(a+14d) < 6a + 15d + 55.$

Домножим (2) на -1 и сложим с (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + 24da + 135d^2 - a^2 - 24ad - 140d^2 > -16.$

$-5d^2 > -16.$

$d^2 < \frac{16}{5}.$

$-\frac{16}{5} < d < \frac{16}{5}.$

Заметим, что $a_1 \in \mathbb{Z}$ и $a_2 \in \mathbb{Z}$ по условию $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_2 - a_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \in \{\cancel{-3; -2; -1}; 0; 1; 2; 3\}.$

$d \in \{1; 2; 3\}$ т.к. прогресс. возраст.

$d = -3$:

$\begin{cases} (a-27)(a-45) > 6a - 6. \\ \cancel{a^2 - 72a} (a-30)(a-42) < 6a + 10. \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 - 78a + 1221 > 0. \\ a^2 - 78a + 1250 < 0. \end{cases} \Rightarrow \cancel{a^2 - 78a \in (-1221; -1250)}$

$\cancel{39: -39^2 = -1521}$

$\begin{cases} a^2 - 78a > -1221 \\ a^2 - 78a < -1250 \end{cases} \Rightarrow a \in \varnothing$

$d = 3$:

$\begin{cases} (a+27)(a+45) > 6a + 84 \\ (a+30)(a+42) < 6a + 100. \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 + 72a + 1131 > 0. \\ a^2 + 72a + 1160 < 0. \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 + 72a > -1131. \\ a^2 + 72a < -1160. \end{cases} \Rightarrow a \in \varnothing$

1.

Чистовик

$d=-2$:

$$\begin{cases}(a-18)(a-30) > 6a+9 \\ (a-20)(a-28) < 6a+25.\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2-54a+531>0 \\ a^2-54a+535<0\end{cases} \Rightarrow a \in \varnothing$$

$d=2$:

$$\begin{cases}(a+18)(a+30) > 6a+69 \\ (a+20)(a+28) < 6a+85\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+42a+471>0 \\ a^2+42a+475<0\end{cases} \Rightarrow a \in \varnothing$$

$d=-1$:

$$\begin{cases}(a-9)(a-15) > 6a+24 \\ (a-10)(a-14) > 6a+40\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2-30a+111>0 \\ a^2-30a+100<0.\end{cases}$$

$a(a-30) \in (-111;-100)$

min – достиг. в вершине параболы

$a_{min}=15$

$min=-225$

$a=14$: $14\cdot(-16)=-224$

$a=13$:

$-13\cdot17=-221.$

$a=12$: $-12\cdot18=-216.$

При $a\in(5;12)$;… на отрезке $a\in(-\infty;15)$

$f(a)$ убывает

$\Rightarrow f(a) \geq -125$

$a=5$: $-5\cdot25=-125$

$a=4$: $-4\cdot26=-104$ ✓

$a=3$: $-3\cdot27=-81$ ✗

При $a<3$ $f(a) \geq -81. \Rightarrow$ нас не интересует.

Также может подойти

(исходя из симметрии параболы отн. вершины)

$a=26$: $26\cdot(26-30)=-104$ ✓

2

№3. Перепишем систему в виде

$d=1$:

$$\begin{cases}(a+9)(a+15) > 6a+54. \\ (a+10)(a+14) < 6a+70.\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+18a+81>0 \\ a^2+18a+70<0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a+9)^2>0 \\ (a+9)^2<11.\end{cases}$$

$-\sqrt{11} < a+9 < \sqrt{11}$) $a \in \mathbb{Z}$

$-3 \leq a+9 \leq 3$

$-12 \leq a \leq -6$, при этом $a \neq -9$ т.к $(a+9)^2>0$

$d=0$:

$$\cancel{\begin{cases}a^2 > 6a+39 \\ a^2 < 6a+55\end{cases}}$$

Ответ: $a \in \{-12; -11; -10; -8; -7; -6\}$.

Проверим полученные ответы.

$a=-12$;

$$\begin{cases}-3\cdot 3 > -18 \checkmark \\ -2\cdot 2 < -2 \checkmark\end{cases} \checkmark$$

$a=-11$.

$$\begin{cases}-2\cdot 4 > -12 \checkmark \\ -1\cdot 3 < 4 \checkmark\end{cases} \checkmark$$

$a=-10$

$$\begin{cases}-1\cdot 5 > -6 \checkmark \\ 0 < 10 \checkmark.\end{cases} \checkmark$$

$a=-8$.

$$\begin{cases}1\cdot 7 > 6 \checkmark \\ 2\cdot 6 < 22 \checkmark\end{cases} \checkmark$$

$a=-7$

$$\begin{cases}2\cdot 8 > 12 \checkmark \\ 3\cdot 7 < 28 \checkmark\end{cases} \checkmark$$

$a=-6$

$$\begin{cases}3\cdot 9 > 18 \checkmark \\ 4\cdot 8 < 34 \checkmark\end{cases} \checkmark$$

3

№3. Перепишем систему в виде   Чистовик.

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 8 \quad (1)\\ a^2+b^2\le \min(4(b-a);8) \quad (2)\end{cases}$$

И рассмотрим a, b как переменные, а x, y как параметры.

Исследуем (2):

$4(b-a)\le 8$

$b\le a+2$

$\Rightarrow a^2+b^2\le 4b-4a \Rightarrow$ ~~...~~ $(a+2)^2+(b-2)^2\le 8$ круг с центром в $(-2;2)$ и $r=2\sqrt{2}$.

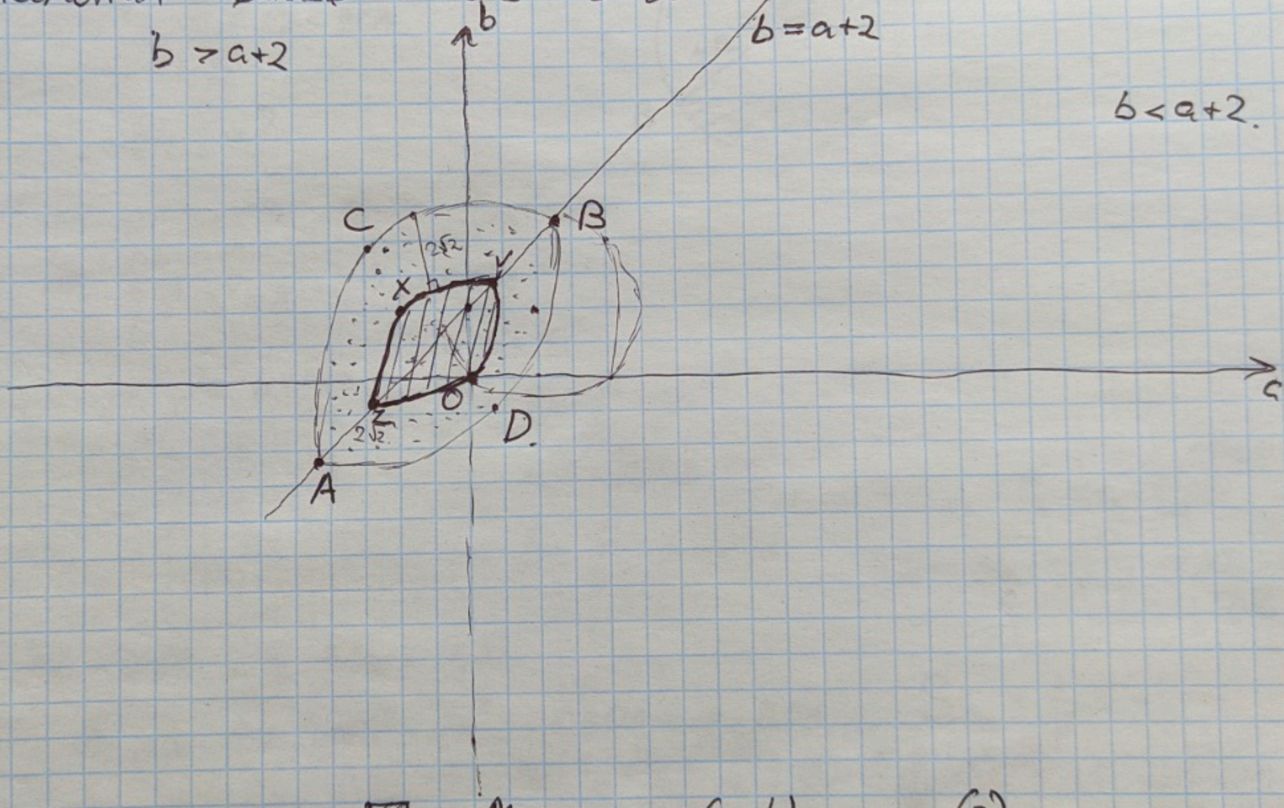
Симм. отн. $b=a+2$, т.к. $r_1=r_2$ и центры симм. отн. $b=a+2$.

$4(b-a)>8$

$b>a+2$

$\Rightarrow a^2+b^2\le 8$. круг ~~окруж~~ с центром в $(0;0)$ и $r=2\sqrt{2}$

Рассмотрим данную систему ~~координат~~ в координатах aOb.



Множество точек ▨ - Множество $(a;b)$ удовл. (2).

Так как ~~в рав~~ (1) задает на пл-ти окр. с центром в $(x;y)$ и $r=2\sqrt{2}$. ~~Реша~~ То, что система имеет решение, графически будет означать пересечение фигуры ▨ и окр-ти (1).

Такое пересечение будет происходить тогда и только тогда, когда расстояние от $(x;y)$ до фигуры будет $\le 2\sqrt{2}$.

Таким образом ⬚ - искомая фигура.

4

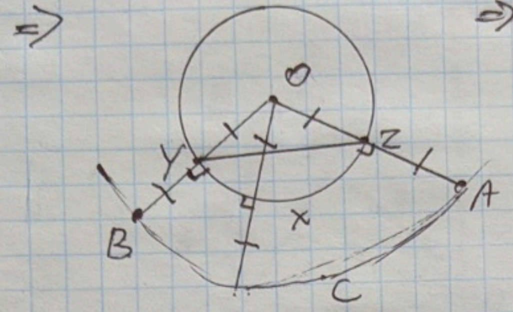
Чистовик

Найдем ее площадь.

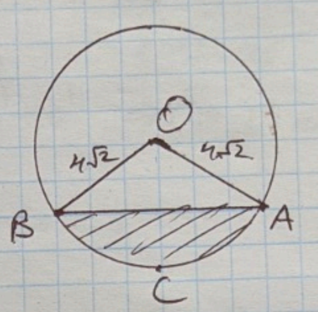
Фигура YXZ – мн-во всех точек, удаленных от $(0;0)$ на $r \le 2\sqrt{2}$ и лежащих выше $b = a+2$.

Фигура ACB – мн-во всех точек, удаленных от YXZ на $r \le 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ ACB – мн-во всех точек, удаленных от. $(0;0)$ на $r \le 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.



Найдем S_{BCA}.



$OB = OA = r = 4\sqrt{2}$

$AB = YZ + 4\sqrt{2} = ?$

Найдем координаты точек Y, Z.

$\Rightarrow \begin{cases} b = a+2 \\ a^2 + b^2 = 8. \end{cases} \rightarrow 2a^2 + 4a + 4 = 8$

$a^2 + 2a = 2$

$(a+1)^2 = 3$

α – угол наклона $b = a+2$

$\Rightarrow \alpha = 45^0$

$a = \pm\sqrt{3} - 1$.

$\pm\sqrt{3} - 1 \Rightarrow YZ = \dfrac{\Delta a}{\cos\alpha}$

$b = 2 + \sqrt{3}$

$YZ = \dfrac{\Delta a}{\cos\alpha} \Rightarrow YZ = 2\sqrt{6}$.

$AB = 2\sqrt{6} + 4\sqrt{2}$.

$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2 OB OA \cos\angle BOA$.

$\cos\angle BOA = \dfrac{32 + 32 - 24 - 32 - 16\sqrt{12}}{2 \cdot 32} = \dots = -\dfrac{2\sqrt{12} - 1}{4}$

$S_{OBA} = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{(\dots)^2 - (\sqrt{6} + 2\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{10} = 3\sqrt{20}$

$3\sqrt{2} \cdot \sqrt{(6\sqrt{2} + \sqrt{6})(\dots + 4\sqrt{2} - \sqrt{6})}$

$S_{ABC} = S_{OABC} - S_{OBA} = 4\sqrt{2} \cdot \arccos(x) - 3\sqrt{20}$.

~~Вся карт.~~ Весь график симм. отн. $b = a+2 \Rightarrow$

~~$\Rightarrow S_{BDA} = S_{BCA} = 4\sqrt{2} \cdot \arccos(x) - 3\sqrt{20}$.~~

~~$S_M = 8\sqrt{2} \cdot \arccos(x) - 6\sqrt{20}$~~

~~Ответ: $8\sqrt{2} \cdot \arccos(x) - 6\sqrt{20}$~~

~~, где $x = -\dfrac{2\sqrt{12} - 1}{4}$~~

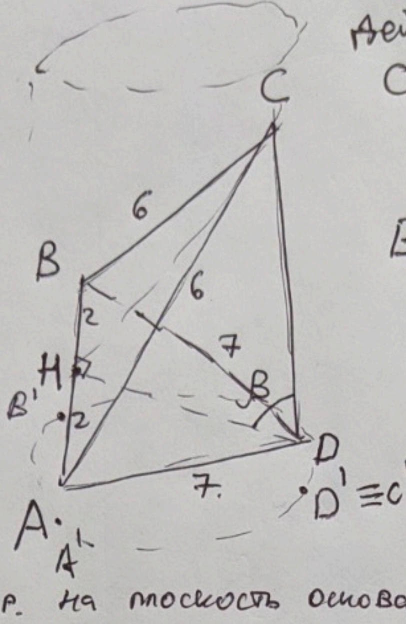
~~Ответ: 8.~~ Ответ:

$S_M = 4\sqrt{2} \cdot \arccos\left(-\dfrac{2\sqrt{12} - 1}{4}\right) - 3\sqrt{2} - \sqrt{(6\sqrt{2} + \sqrt{6})(4\sqrt{2} - \sqrt{6})}$.

5

21100286 (U367829 M1302962)

№2. Чистовик.



Действительно, мы можем варьировать CD, изменяя линейный угол двугранного угла CBAD в пределах $(0;\pi)$

Все вершины на боковой пов-ти $CD \parallel$ оси цилиндра $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Заметим, ~~что проекция~~ описанна

$\Rightarrow CD \perp$ ~~пл-ти~~ основанию цилиндра.

Спроецируем тетраэдр. на плоскость основания.
~~Для удобств~~ ~~AB~~ $A \to A'$
$B \to B'$
$C \to D'$
$D \to D'$

$R_{опис}(A'B'D') = R_{цилиндра}$.

$R_{A'B'D'} = R_{ABD} \cdot \cos\alpha$, где α – линейный угол между ~~С~~ (~~CB~~ABD) и плоск. основания.

Но ~~∠~~ $CD \perp$ плоск. осн. $\Rightarrow \alpha = 90^\circ - \beta$, где $\beta = \angle CDH$.

Также заметим, что $\beta < 90^\circ$, т.к. $CA < CD \Rightarrow CH < HD \Rightarrow$ (по т. Пифагора)
(против больш. ст. лежит больш. угол) $\Rightarrow \angle HCD > \angle CDH$, ~~а в треугольнике не может быть~~, и если $\beta \geq 90^\circ$, то $\angle HCD + \angle CDH > 180^\circ \Rightarrow$ противоречие сумме углов Δ.

$\Rightarrow R_{A'B'D'} = R_{цилиндра} = R_{ABD} \cdot \cos\alpha$. $R_{ABD} = \frac{abc}{4S} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 4}{4 \cdot \frac{1}{2} ah} = \frac{7 \cdot 7}{\frac{1}{2} 4 \cdot \sqrt{45}} =$

$= \frac{49}{2\sqrt{45}}$. $R_{цилиндра} = R_{ABD} \cdot \cos\alpha = R_{ABD} \cdot \sin\beta$. $R_{ABD} = const \Rightarrow$

6

R_{min} достигается при $\sin\beta \to min$. ~~$\beta \neq 0$ т.к.~~

на участке $\beta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ минимум $\sin\beta$ достигается при $\beta = 0$.

В таком случае A, B, C, D лежат в одной плоскости.,

$R_{цилиндра} = \frac{1}{2} AB = 4.$, $CD = CH + HD = \sqrt{7^2 - 2^2} + \sqrt{6^2 - 2^2} = 3\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$.

Ответ: $3\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100286**

ID профиля: **367829**

Вариант 23

№6. Заметим, что точка T

$S = pr$

$S = \frac{1}{2}ah$

не синус X

~~$\frac{AK}{\sin\alpha} = \frac{KC}{\sin\alpha} = 2R$.~~

~~AK=KC~~

~~$\frac{13x}{\sin\alpha} = \frac{13x}{\sin\alpha} =$~~

225 - 169 = 56

~~$\frac{AP}{\sin(180° - 2\alpha\ 90° - \alpha + \gamma)} = PC$~~

ки.

№6. Заметим, что точка T   Чистовик.

III

Чистовик

№4. $\begin{cases} НОД(a;b;c)=22=2\cdot 11 \\ НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$

Пусть. $a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots$ $p_i\in\mathbb{P}$

$b=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots$

$c=p_1^{\gamma_1}\cdot p_2^{\gamma_2}\cdot\ldots$

$НОД(a;b;c)=p_1^{\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot p_2^{\min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}\cdot\ldots$

$НОК(a;b;c)=p_1^{\max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot p_2^{\min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}\cdot\ldots$

Что такое $\max/\min(x;y;z)$? Это такое число m, что

$\begin{cases} x\le m \\ y\le m \\ z\le m \\ \left[\begin{array}{l} x=m \\ y=m \\ z=m \end{array}\right. \end{cases}$ / $\begin{array}{l} x\ge m \\ y\ge m \\ z\ge m \end{array}$

т.к. $НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19}\Rightarrow$

$\Rightarrow a=2^{w_1}\cdot 11^{w_2}$

$b=2^{z_1}\cdot 11^{z_2}$

$c=2^{y_1}\cdot 11^{y_2}$

При этом

$\min(w_1;z_1;y_1)=1.$

$\max(w_1;z_1;y_1)=16.$

$\min(w_2;z_2;y_2)=1.$

$\max(w_2;z_2;y_2)=19.$

Кол-во различных возможных значений a, b, c:

~~Случай I~~ $(3\cdot 2\cdot 16-6)$ – кол-во способов расставить степени двойки.

3 – выбираем, в каком из чисел степень макс.

2 – выбираем, в каком из чисел степень миним.

16 – выбираем степень оставшегося числа от 1 до 16.

6 – варианты 16; 16; 1 / 1; 1; 16, которые мы посчитали дважды. (+ их перестановки)

$(3\cdot 2\cdot 19-6)$

аналогично подсчитываем кол-во способов расставить степени 11.

$N_0=N_2\cdot N_{11}=90\cdot 108=9720.$

так как выбор осуществл. независимо

Ответ: 9720.

1

держит на ...

I

Чистовик.

№5. $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$; $\log_{(x+4)^2}(x+34)$; $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

Во-первых, все три логарифма должны существовать.:

Огран.:

$x+34>0$

$x+34\neq 1.$

$2x+23>0$

$2x+23\neq 1.$

$x+4<0$

$x+4\neq 1.$

Рассмотрим произведение данных логарифмов.

Св-во: $\log_a b\cdot\log_c d=\log_c b\cdot\log_a d$ на ОДЗ.

Док-во: Перейдем к осн. e.

$$\frac{\ln b}{\ln a}\cdot\frac{\ln d}{\ln c}=\frac{\ln b}{\ln c}\cdot\frac{\ln d}{\ln a}$$

$$1=1\ \checkmark$$

Утв. доказано.

Тогда $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)\cdot\log_{(x+4)^2}(x+34)\cdot\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\log_{x+34}(2x+23)\cdot\log_{|x+4|}(x+34)\cdot\log_{2x+23}(-x-4)$$

по ОДЗ $x+4<0$

$$=2\cdot\log_{x+34}(x+34)\cdot\log_{-x-4}(-x-4)\cdot\log_{2x+23}(2x+23)=2.$$

Тогда мы хотим найти такие a, что

$a\cdot a\cdot(a+1)=2.$

$a^3+a^2-2=0.$

$(a-1)(a^2+2a+2)=0.$

$(a-1)(\underbrace{(a+1)^2+1}_{>0})=0$

$\Rightarrow a=1.$

Рассмотрим три случая.

I. $\begin{cases}\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=1\\ \log_{(x+4)^2}(x+34)=1.\end{cases}$

$\begin{cases}2x+23=\sqrt{x+34}.\\ x+34=x^2+8x+16.\end{cases}$

$\begin{cases}2x+23=\sqrt{x+34}\\ \left[\begin{array}{l}x=-9\\ x=2.\end{array}\right.\end{cases}$ $\Rightarrow x=-9.$ удовл. огр.

При этом третий логарифм равен 2 т.к. их произведение 2.

II. $\begin{cases}\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)=1\\ \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=1.\end{cases}$

$\begin{cases}\sqrt{x+34}=2x+23\\ \sqrt{2x+23}=-x-4\end{cases}$ $\Rightarrow x^2+8x+16=x+34.$

$x=-9$ не подходит.

$x=2$ не подходит.

2

Чистовик

III. $\begin{cases} \log_{(x+4)^2}(x+34)=1 \\ \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+8x+16=x+34 \\ 2x+23=x^2+8x+16 \end{cases}$ $\to x=-9$ не подходит; $\to x=2$ не подходит

Чистовик.

Ответ: При $x=-9$.

Проверим, подходит ли $x=-9$.

$\log_{\sqrt{34-9}} 5 = 1$ ✓

$\log_{(-5)^2} 25 = 1$ ✓ ✓

$\log_{\sqrt{5}} 5 = 2$ ✓

③

Чистовик.

$\cancel{R_{опис} = \frac{abc}{4S}}$ $R_{опис} = \frac{abc}{4S}$

$\cancel{R_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot 28.}}$ $R_{ACP} = \frac{195y^2 \cdot 28x}{28.}$

~~AC~~ $\frac{AC}{\cancel{\sin d} \sin 2d} = 2R$

$\sin 2d = 2 \sin d \cos d = \cancel{2 \cdot \frac{28}{\sqrt{65}}} \ 2 \cdot \frac{28}{65} = \frac{56}{65}$

$\frac{\cancel{28x}}{\frac{56}{65}} = \frac{195y^2 \cdot \cancel{28x}}{28}$

$65 = 390y^2$

$y = \frac{1}{\sqrt{6}}.$

$BC = \frac{28}{\sqrt{6}} \Rightarrow AB = \frac{\frac{\cancel{392}^{14}\sqrt{65}}{13}}{\frac{\cancel{28}}{\sqrt{6}.}} = \frac{14\sqrt{390}}{13.}$

$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$

$\cancel{AC^2 = \frac{784}{6} + \frac{588}{13} - 2 \cdot \frac{7}{7\sqrt{65}} \cdot \frac{28}{\sqrt{6}} \cdot \frac{14\sqrt{390}}{13}}$

$\cancel{AC^2 = \frac{784}{6} + \frac{588 - 2 \cdot 7 \cdot 392}{13.}}$

$\cancel{AC^2 = 130\frac{2}{3} + 45\frac{3}{13} - \frac{2 \cdot 7 \cdot 392}{13}}$

$\cancel{AC^2 = 175 + \frac{2}{3} + \frac{3}{13} - \frac{5488}{13}}$

$\cancel{AC^2} = 175 + \frac{2}{3} + \frac{3}{13} - (4$

$$\begin{array}{r} \times\ 392 \\ 14 \\ \hline 392 \\ 1568 \\ \hline 5488 \end{array}$$

$AC^2 = \frac{784}{6} + \frac{192 \cdot 30}{13.} - \frac{5488}{13}$

5

$AC^2 = \frac{784}{6} + \frac{5760 - 5488}{13}$

$AC^2 = \frac{784}{6} + \frac{272}{13} = 130\frac{2}{3} + 20\frac{12}{13.} = 150\frac{52}{39} = 160\frac{4}{3} = \frac{454}{3}$

Ответ: а) $\frac{784}{13}$

б) $\sqrt{\frac{454}{3.}}$

21100286 (U367829 M1302963)

Чистов...

№6. Заметим, что точка T лежит на ω_1 - опис. окр. AOC

Чистовик.

$S_{APK}=15$

$S_{CPK}=13.$

$\Downarrow$

$S_{APC}=28.$

Так как:

$\angle OAT=\angle OCT=90^\circ \Rightarrow \angle AOC+\angle CTA=180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow OATC$ - впис. $\Rightarrow T$ лежит ω_1

$TA=TC$ как отрезки касательных $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CAT$ - р/б $\Rightarrow \angle CAT=\angle ACT \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APT=\angle CPT$

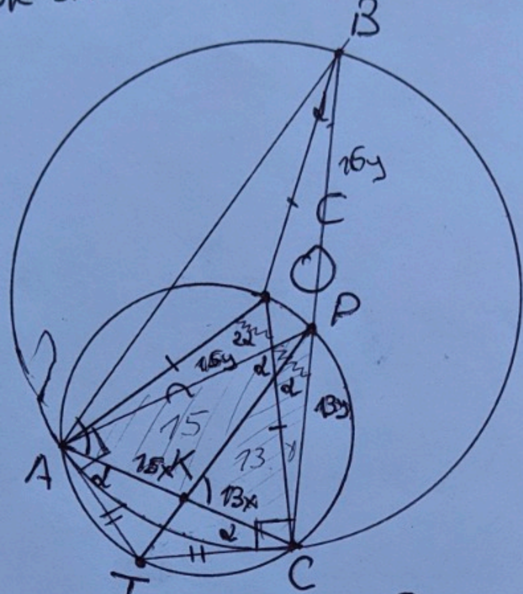
$S_{APK}=\cancel{PA\cdot PK}\ \frac{1}{2}\cdot PA\cdot PK\cdot \sin\alpha$

$S_{CPK}=\frac{1}{2}\cdot PC\cdot PK\cdot \sin\alpha.$

$\Rightarrow \frac{PA}{PC}=\frac{15}{13}\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AK}{KC}=\frac{15}{13}.$

~~AK·KC~~



$S_{APAK}=\frac{225}{2}xy\sin\angle PAT.$

$S_{PCK}=\frac{169}{2}xy\sin(180-(2\alpha+\angle PAT))$

~~AB~~

$PT \parallel AB \Rightarrow \triangle PKC \sim \triangle BAC$ по 2м углам $\Rightarrow \frac{S_{PKC}}{S_{ABC}}=k^2;\ k=\frac{CK}{AC}=\frac{13x}{13x+15x}=$

из р-ва соотв углов

$=\frac{13}{28}$ $\quad S_{ABC}=\frac{S_{PKC}}{k^2}=\frac{13\cdot 28^2}{13^2}=\frac{28^2}{13}=\frac{784}{13}=60\frac{4}{13}.$

а) $\frac{784}{13}=60\frac{4}{13}.$

б) Заметим, что из подобия $\frac{BP}{PC}=\frac{AK}{KC}\Rightarrow BP=15y \Rightarrow BP=AP$

Из т. синусов $\frac{AC}{\sin\alpha}=2R$

острый угол

$\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$ $\qquad \sqrt{16+49}=\sqrt{65}.$ $\qquad$ 4

$\sin\angle ABC=\frac{4}{\sqrt{65}}.$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sin\angle ABC\cdot AB\cdot BC=\frac{784}{13}.$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{65}}\cdot AB\cdot BC=\frac{784}{13}\Rightarrow AB\cdot BC=\frac{392\sqrt{65}}{13}.$