Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100267**

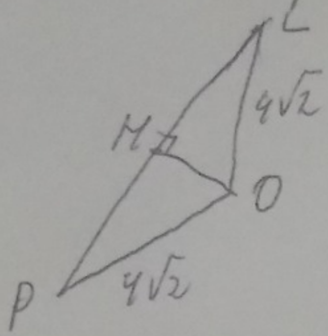
ID профиля: **187524**

Вариант 23

~~Чистовик~~ Черновик

C3 продолжение.

Обозначим точки P и L



$PL = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2\sqrt{2}^2 - \sqrt{2}^2} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{6} = 2\sqrt{2}(2+\sqrt{3})$

(по т. Пифагора)

по т. $\triangle POL$: $PL^2 = OL^2 + OP^2 - 2\, OP \cdot OL \cos\angle POL$

$32 + 24 + 16\sqrt{12} = 32 + 32 - 64\cos\angle POL$

$\frac{32\sqrt{3} - 8}{64} = -\cos\angle POL$

$S_{\triangle} OPL = OM \cdot \frac{1}{2} PL =$

$= \sqrt{32 - 32}$

$\cos\angle POL = \frac{1 - 4\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\angle POL = \arccos\left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow$ площадь сектора $POL = \arccos\left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

21100267 (U187524 M1300249)

Чистовик

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 8\\ a^2+b^2\leq \min(-4a+4b;8)\ (1)\end{cases}$$

1. (1): $a^2+b^2\leq \min(-4a+4b;8)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\leq -4a+4b\\ -4a+4b\leq 8\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\leq 8\\ -4a+4b\geq 8\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a+2)^2+(b-2)^2\leq 8\\ b\leq a+2\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\leq 8\\ b\geq a+2\end{cases}\end{array}\right.$$

– ~~окружности~~ круги, с радиусом $2\sqrt{2}$

$O(0;0)$; $O_1(-2;2)$

ограничены прямой $b=a+2$

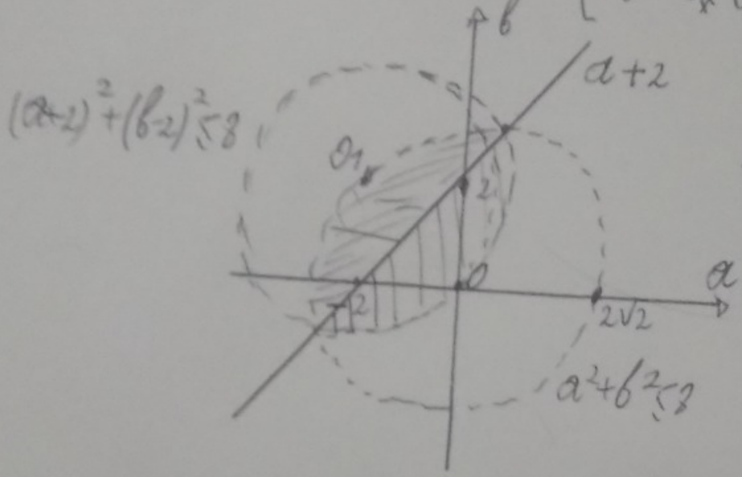


график 1

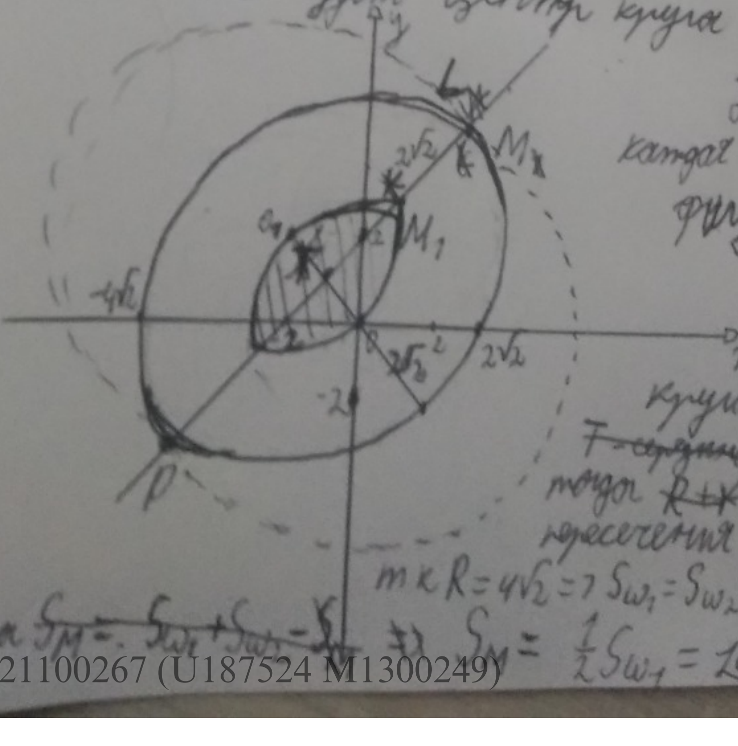
$\omega_1'(O; r=2\sqrt{2})$

$\omega_2'(O_1; r=2\sqrt{2})$

2. $(x-a)^2+(y-b)^2\leq 8$ – ~~кр~~ множество кругов с центром в т. $(a;b)$ и радиусом $2\sqrt{2}$

Пусть закрашенная часть – фигура M_1

то есть мы можем выбрать любую точку в закрашенной области на графике 1 и это будет центр круга $(x-a)^2+(y-b)^2\leq 8$



Нужно найти площадь фигуры M, каждая точка которой удалена на $2\sqrt{2}$ от фигуры M_1.

Фигуру M можно построить также, как фигуру M_1 – ~~ор~~ ограничить 2 круга с равными радиусами $\omega_1(O;R)$, $\omega_2(O_1;R)$

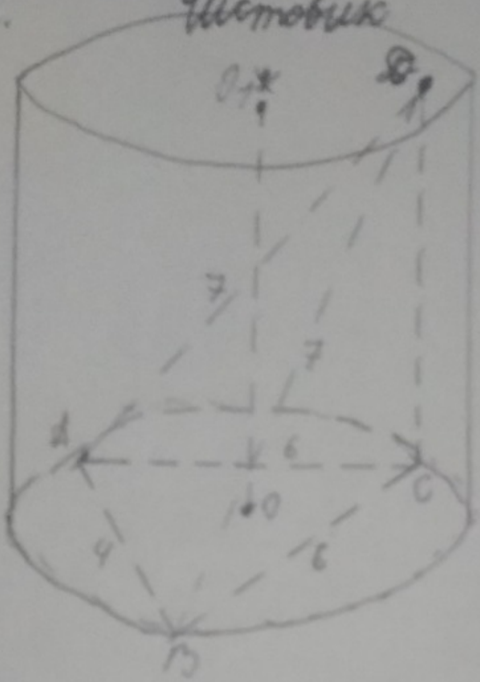
~~T – середина тогда~~ ~~$R = X\ XL$~~

тогда ~~$R+X$~~ $R = O_1O + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ (расстояние от O_1 до наибольшего пересечения прямой $y=-x$ с фигурой M)

т.к. $R=4\sqrt{2} \Rightarrow S_{\omega_1}=S_{\omega_2}=\pi R^2=\pi\cdot 32$

~~тогда $S_M = S_{\omega_1}+S_{\omega_2}-S$~~ $\Rightarrow S_M = \frac{1}{2}S_{\omega_1} = 16\pi$ Ответ: $S_M=16\pi$

№2. Чистовик



Дано: тетраэдр $ABCD$ вписан в цилиндр с осью OO_1, $CD \parallel OO_1$

Найти: CD - ?

Решение:

R цилиндра $=$: $R = OC$, т.к. $ABCD$ вписан.

$$S_{ABC} = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 4}{4 \cdot \sqrt{36-4} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{36}{4\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{9}{2\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

21100267 (U187524 M1300249)

№1. Чистовик

$a_1, a_2, a_3\dots$ – возрастающая арифм. прогрессия

$S = a_1+a_2+\dots+a_6 = \frac{(a_1+a_6)6}{2} = (a_1+a_6)\cdot 3$

Пусть b – разность $\Rightarrow S=(a_1+a_1+5b)\cdot 3 = 6a_1+15b$

$\begin{cases} a_{10}a_{16} > S+39 \\ a_{11}a_{15} < S+55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+9b)(a_1+15b) > S+39 \\ (a_1+10b)(a_1+14b) < S+55 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+24a_1b+144b^2-9b^2 > S+39 \\ a_1^2+24a_1b+144b^2-4b^2 < S+55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+12b)^2 > 6a_1+15b+9b^2+39 \\ (a_1+12b)^2 < 6a_1+15b+4b^2+55 \end{cases}$

$\Rightarrow 6a_1+15b+9b^2+39 < 6a_1+15b+4b^2+55$

$5b^2 < 16$

$b^2 < 3{,}2 \Rightarrow 0 < b < \sqrt{3{,}2}$, т.к прогрессия возрастает

т.к все члены прогрессии целые $\Rightarrow b \in \mathbb{Z} \Rightarrow b=1$. (т.к $2 > \sqrt{3{,}2}$, а $1 < \sqrt{3{,}2}$)

$\Rightarrow \begin{cases} (a_1+9)(a_1+15) > 6a_1+54 \\ (a_1+10)(a_1+14) < 6a_1+70 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+24a_1+135-6a_1-54 > 0 \\ a_1^2+24a_1+140-6a_1-70 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+18a_1+81 > 0 \\ a_1^2+18a_1+70 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1+9)^2 > 0 \\ (a_1+9)^2 < 11 \end{cases} \Rightarrow (a_1+9) \in \{1;2;3\}$, т.к $a_1 \in \mathbb{Z}$

$a_1 \in \{-8;-7;-6\}$

Ответ: $a_1 \in \{-8;-7;-6\}$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100267**

ID профиля: **187524**

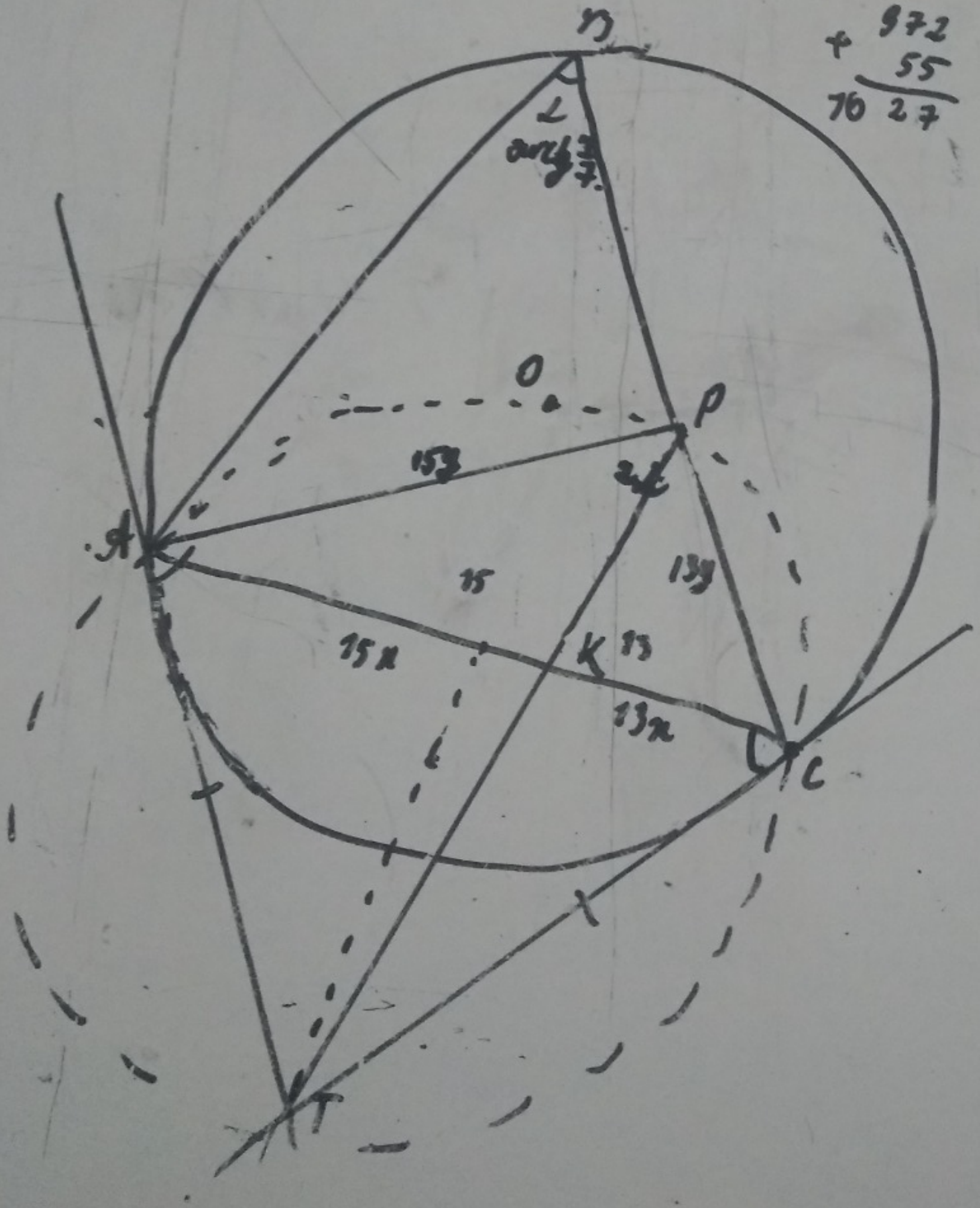
Вариант 23

Черновик

$(30-2)^2 = 900-120+4 = 784$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ +\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 972 \\ +\ 55 \\ \hline 1027 \end{array}$$



$S_{APK} = 15$

$S_{CPK} = 13$

S_{ABC} - ?

$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$

$$\begin{array}{r} 1027 \\ +\ 827 \\ \hline 7027 \\ +\ 2054 \\ 8216 \\ \hline 84317 \end{array}$$

21100267 (U187524 M1300250)

~~Чистовик~~ Черновик

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$ $\quad\sqrt{x+34}=a$ $\quad\Rightarrow\quad \log_a c^2$

$\log_{(x+4)^2}(x+34)$ $\quad x+4=b$ $\quad \log_{b^2} a^2$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$ $\quad \sqrt{2x+23}=c$ $\quad \log_c(-b)$

~~$\log_a c^2 = \log_{b^2} a^2$~~

~~$2\log_a c - \frac{1}{\log_a b} = 0$~~

1) $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34)$

$2\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) - \frac{1}{2}\log_{(x+4)}(x+34) = 0$

$2\log_{(x+34)}(2x+23) - \frac{1}{2\log_{(x+34)}(x+4)} = 0$

$4\log_{(x+34)}(2x+23)\log_{(x+34)}(x+4) = 1,\ x \neq -3$

Чистовик

№4 (продолжение)

~~От~~: $3\cdot15^2(3\cdot18^2+3\cdot18+1)+3\cdot15(3\cdot18^2+3\cdot18+1)+3\cdot18^2+3\cdot18+1=$

$=(3\cdot225+45+1)(972+54+1)=(775+45+1)(972+54+1)=$

$=\underline{827\cdot1027}=\underline{843167}$

Ответ: 843167 трёх чисел.

Стр 4

Чистовик

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=2\cdot 11 \\ НОК(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$$ => каждое число содержит в себе хотя бы 1 множитель 2 и 1 множитель 11, из других множителей числа состоять не могут

значит $2^{16}\cdot 11^{19} \vdots a$ $\quad a=2^{a_1}11^{b_1}$

$2^{16}\cdot 11^{19} \vdots b$ $\quad b=2^{a_2}11^{b_2}$ $\quad ; a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; b_3 \in N$

$2^{16}\cdot 11^{19} \vdots c$ $\quad c=2^{a_3}11^{b_3}$ $\quad 1\le a_1 a_2 a_3 \le 16$

$1\le b_1, b_2, b_3 \le 19$

т.к. $НОК = 2^{16}\cdot 11^{19}$, то хотя-бы одно число из $a_1; a_2; a_3$ равно 16 и хотя бы одно число из $b_1; b_2; b_3$ равно 19

~~1) $a_1=16$; $b_1=19$ => способов выбрать: $a_2: 15$, $a_3: 15$, $b_2: 18$, $b_3: 18$ Итого: $15^2\cdot 18^2$~~

~~2) $a_2=16$; $b_1=19$ => аналогично $15^2\cdot 18^2$ способов~~

~~3) $a_3=16$ $b_1=19$: $15^2\cdot 18^2$~~

~~4) $a_1=16=a_2$; $b_1=19$: $15\cdot 18^2$~~

~~5) $a_1=16=a_3$, $b_1=19$: $15\cdot 18^2$~~

~~6) $a_1=a_2=a_3=16$; $b_1=19$: 18^2~~

~~7) $b_2=19$: a_1~~

Способов выбрать 1, 2 или 3 числа из a_1, a_2, a_3, которые равны 16: C_3^1 C_3^2 C_3^3 соответственно

~~Для каждого из этих способов существует $C_3^1+C_3^2+C_3^3$ способов выбрать~~

① Если 1) 1 число из $a_1, a_2, a_3 = 16$ то способов выбрать оставшиеся 2: 15^2

2) 2 числа => способов выбрать последнее: 15

3) 3 числа => единственный способ.

② Для каждого из 1) 2) 3) рассмотрим сколько есть вариантов для выбора b_1, b_2, b_3:

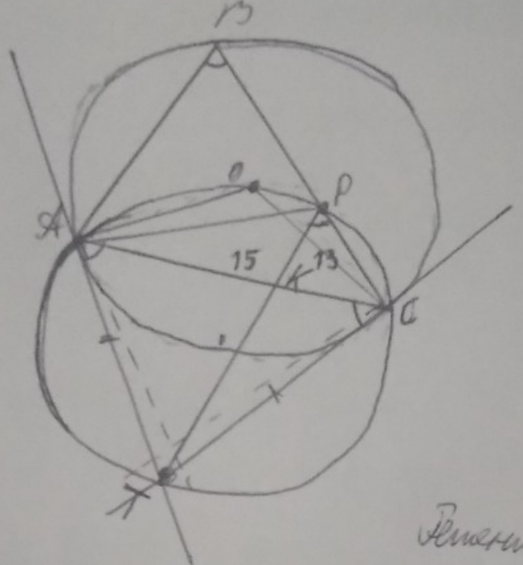
1) 1 число из $b_1, b_2, b_3 = 19$ => способов выбрать оставшиеся 2: 18^2

2) 2 числа => способов 18

3) 3 числа => 1. Итого: $3\cdot 18^2+3\cdot 18+1$

Из ① и ②: всего способов выбрать $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ продолжение => стр 3

№6 Чистовик.



Дано: $\triangle ABC$ – остроуг. вписан в $\omega(O; R=OB)$
ω_1 проходит через $A; O; C$
$\omega_1 \cap BC = P$
AT и CT – касательные к ω
$PT \cap AC = K$
$S_{APK} = 15$; $S_{PKC} = 13$
Найти а) S_{ABC}
б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{4}{7}$; AC – ?

Решение.

1. Пусть $\angle TAC = \angle TCA = \alpha$ ($\triangle ATC$ равнобедренный)
тогда $\angle ABC = \alpha$ (по т. о угле между хордой и касательной)
$\angle AOC$ – центральный $\Rightarrow \angle AOC = 2\alpha = \angle APC$ (опираются на одну дугу $\smile AC$ в ω_1)
$\angle APC = \angle APT + \angle TPC = 2\alpha$
$\angle TAC = \angle TCA = \alpha$ – опираются на равные дуги.
тогда (·)T лежит на ω_1, т.к иначе ~~$\angle TAC$~~ (отмечен пунктирной линией) $\angle APC$ будет $\neq 2\alpha$, ведь $\angle TAC$ и $\angle TCA$ продолжат опираться на равные дуги, а $\angle P$ будет опираться на дугу, которая больше суммы этих 2 дуг.
значит (·)$T \in \omega_1 \Rightarrow \angle APT = \alpha$; $\angle TPC = \alpha$
$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle PKC$ по 2 углам
$KC = 13x$, $AK = 15x \Rightarrow AC = 28x$
$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \left(\frac{28}{13}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{28\cdot 28\cdot 13}{13\cdot 13} = \frac{784}{13}$$

Ответ: а) $S_{ABC} = \frac{784}{13}$

б) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{7} \Rightarrow \sin = \frac{4}{\sqrt{65}}$
$$\frac{AC}{\sin ABC} = 2R$$

№5 Чистовик

Пусть $\sqrt{x+34}=a$ тогда 3 числа $\log_a c^2$; $\log_{b^2} a^2$; $\log_c b$

$-x-4=b$

$\sqrt{2x+23}=c$

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq -4 \\ x > -11,5 \\ x \neq -5 \\ x \neq -11 \end{cases}$

$2\log_a c \cdot \log_b a = \frac{2\log_a c}{\log_a b} = 2\log_b c$

$2\log_a c \cdot \log_c b = \frac{2(\log_c a^{-1})}{(\log_c b)} = 2\log_a b$

$\log_b a \cdot \log_c b = \log_c a$

Пусть $2\log_a c = y$, $\log_b a = z$; $\log_c b = t$

$\Rightarrow \begin{cases} yz = \frac{2}{t} \\ yt = \frac{2}{z} \\ zt = \frac{2}{y} \end{cases}$

1) $y=z$; $t=y+1$

$\Rightarrow y^2 = \frac{2}{y+1} \Rightarrow \frac{y^3+y^2-2}{y+1}=0$

$\frac{(y-1)(y^2+2y+2)}{y+1}=0$

$\Rightarrow y=1; z=1; t=2$

$t=2 \Rightarrow \log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=2 \Rightarrow$ ~~$y=1$: $\log_{\sqrt{x+32}}(2x+23)=1$~~

~~$\Rightarrow 2x+23=\sqrt{x+32}$~~

~~$4x^2+92x+529=x+32$~~

~~$4x^2+91x+497=0$~~

~~$D=8281-7952=1129$~~

~~$x=\frac{-91\pm\sqrt{1129}}{16}$~~

$-x-4=2x+23$

$3x=-27$

$x=-9$ - подх. по ОДЗ

2) $y=t$; $z=y+1$

$y^2=\frac{2}{y+1}$

$y(y+1)=\frac{2}{y}$

$\frac{y^3+y^2-2}{y}=0$

Аналогично п. 1: $x=-9$

3) $z=t$, $y=z+1$

$z^2=\frac{2}{z+1}$

$z=1 \Rightarrow \log_{(x+4)^2}(x+34)=1$

$(x+4)^2=x+34$

$x^2+8x+16=x+34$

$x^2+7x-18=0$

$(x+9)(x-2)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-9 \\ x=2 \text{ - не подх. по ОДЗ.} \end{array}\right.$

$\Rightarrow x=-9$ +

Ответ: $x=-9$

Стр 1.