Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100177**

ID профиля: **854252**

Вариант 23

$\boxed{\text{Чистовик}}$

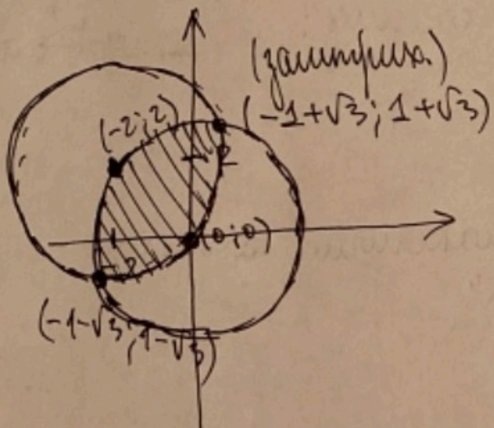
3.

M-фигура на плоскости, состоящая из точек $(x;y)$ таких, что $\exists\, a, b$:

$$(1)\ \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b,\ 8) \end{cases}\ (2)$$

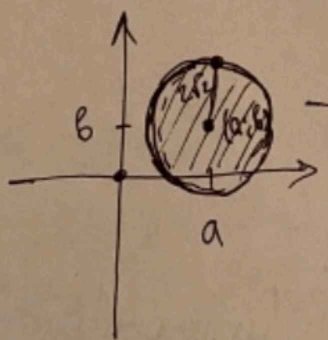
1). $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le -4a+4b \\ a^2+b^2 \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+2)^2+(b-2)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le 8 \end{cases} \Rightarrow$ решением (2)

является множество точек на плоскости (a, b):



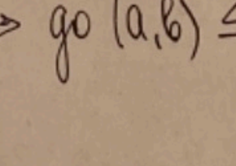
$$\begin{cases} a^2+b^2=-4a+4b \\ a^2+b^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\sqrt{3}-1 \\ b=1+\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1-\sqrt{3} \\ b=1-\sqrt{3}. \end{cases} \end{array} \right.$$

2). (1) - множество следующих точек на плоскости $(x;y)$:

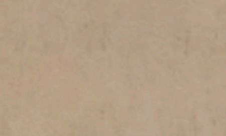


- мн-во точек (x,y), для которых расстояние до $(a,b) \le 2\sqrt{2}$.

3). С учётом (1) и (2) получаем, что искомая фигура M получается из фигуры в пункте 1) путём расширения её на $2\sqrt{2}$ во все стороны:



$\Rightarrow$ ~~M получается~~

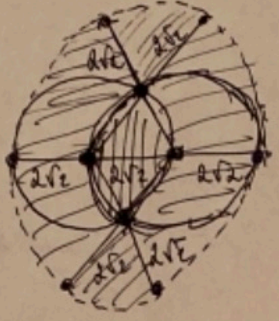


21100177 (U854252 M1303462)

(3) – продолжение

Чистовик

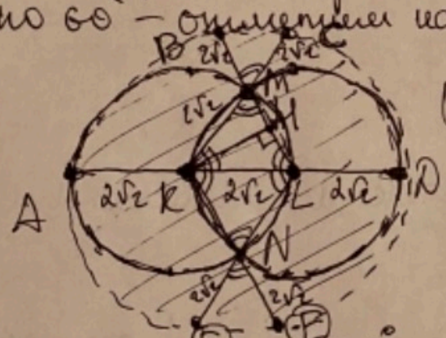
Искомая фигура M:



4). Разобьём площадь фигуры M на сумму: $S = S_{сект. LFAB} + S_{сект. KCDE} - S_{ромба KMLN} + S_{сектора BCM} + S_{сектора NEF}$

5). ΔKML – равносторон. $\Rightarrow \angle KML = 60°$ $\Rightarrow$ Аналогично находятся углы по $60°$ – отмечены на чертеже „))".

(заштрихована)



6). $S_{LFAB} = S_{KCDE} = \pi\cdot(4\sqrt{2})^2\cdot\frac{120°}{360°} = \frac{\pi\cdot 32}{3} = \frac{32\pi}{3}$.

7). $S_{BCM} = S_{NEF} = \pi\cdot(2\sqrt{2})^2\cdot\frac{60°}{360°} = \frac{4\pi}{3}$.

8). $S_{KLMN} = KH\cdot ML$, KH – высота; т.к. KH – высота в равносторон. Δ-ке, то она также медиана. $\Rightarrow HL = \frac{ML}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow KH =$ (т. Пифагора) $= \sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{8-2} = \sqrt{6}$; $S_{KLMN} = \sqrt{6}\cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{3}$

9. $S = 2\cdot\frac{32\pi}{3} + 2\cdot\frac{4\pi}{3} - \overset{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = 2(12\pi) - \overset{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \Rightarrow 24\pi - \overset{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$.

$\boxed{\text{Ответ: } S = 24\pi - \overset{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}}.}$ $S = 24\pi - 4\sqrt{3}$

21100177 (U854252 M1303462)

① . Чистовик

$a_1, a_2, \dots, a_6$ – арифм. прогрессия.

1). Т.к a_i – целые $\Rightarrow d = a_2 - a_1$ – тоже целые. С учётом того, что прогрессия возрастает, $d \in \mathbb{N}$ – натуральное число.

2). $\begin{cases} a_{10} \cdot a_{16} > S+39 \\ a_{11} \cdot a_{15} < S+55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{10}(a_{15}+d) > S+39 \\ (a_{10}+d) \cdot a_{15} < S+55 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} S+39-a_{10}a_{15}-a_{10} \cdot d < 0 \\ a_{10} \cdot a_{15} + a_{15} \cdot d - S - 55 < 0 \end{cases} \Rightarrow d(a_{15}-a_{10}) < 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d(\cancel{a_{10}}+5d-\cancel{a_{10}}) < 16 \Leftrightarrow 5d^2 < 16 \Leftrightarrow d^2 < 3,2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ т.к $d \in \mathbb{N} \Rightarrow \boxed{d=1}$

3). С учётом того, что $\underline{d=1}$, получаем:

$a_i = a_1 + (i-1), \ i = 1, 2, \dots$

$S = a_1 + \dots + a_6 = \frac{a_1+a_6}{2} \cdot 6 = 3(a_1+a_6) = 3(2a_1+5) = 6a_1+15.$

$(a_1+9)(a_1+15) > 6a_1+15+39$

$(a_1+10)(a_1+14) < 6a_1+15+55$

Задача эквивалентна следующему: $\begin{cases} a_1^2+24a_1+135 > 6a_1+54 \\ a_1^2+24a_1+140 < 6a_1+70. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+18a_1+81 > 0. \\ a_1^2+18a_1+70 < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+9)^2 > 0. \\ a_1 \in (-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -9. \\ a_1 \in (-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11}) \\ a_1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$

т.к $\sqrt{11} \in (3,4)$, то $a_1 \in \{-12, -11, -10, -8, -7, -6\}$.

$\boxed{\text{Ответ: } a_1 \in \{-12, -11, -10, -8, -7, -6\}}$

21100177 (U854252 M1303462)

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le \min(-4a+4b,8)\end{cases}.$$

Черновик

S –

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6.$

$a_{10}a_{16} > S+39$

$a_{11}a_{15} < S+55$

Все возможные a_1.

$S = \frac{a_1+a_6}{2}\cdot 6 = 3(a_1+a_6).$

$$\begin{cases}a_{10}a_{16} > 3a_1+3a_6+39\\ a_{11}a_{15} < 3a_1+3a_6+55\end{cases}$$

~~a_{10}, a_{16}~~$, a_{11}, a_{15} \in \mathbb{Z}.$

$3(2a_1+5d) = 6a_1+15d+55$

$a_{11}a_{15} = (a_1+10d)(a_1+14d) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1^2 + \cancel{14da_1}\ 10d\cdot a_1 + 140d^2$

$< 3(a_1+a_6)+55 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1^2+24d\cdot a_1+140d^2-6a_1-15d-55<0$

~~$a_1\in\mathbb{Z}$~~, ~~$d\in\mathbb{Z}$~~

$a_1^2+(24d-6)a_1+140d^2-15d-55<0$

$\boxed{(12d-3)^2-140d^2+15d+55\ge 0}$

$\frac{3a_1+3a_6+39}{a_{16}}.$

$a_{10} = a_1+9d.$

$a_{16} = a_1+15d.$

$a_{11} = a_1+10d.$

$a_{15} = a_1+14d.$

$a_{10}\cdot a_{16} = (a_1+9d)(a_1+15d) = a_1^2+24d\cdot a_1+135d^2$

$a_1^2+24d\cdot a_1+135d^2 > \frac{2a_1+5d}{2}\cdot 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1^2+24d\cdot a_1+135d^2 - 39 > 6a_1+15d \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1^2+(24d-6)a_1+135d^2-15d-39>0.$

$D\ge 0 \Rightarrow D = \boxed{(12d-3)^2-135d^2+15d+39\ge 0}$

50820

е.

, d∈

⇒

⇒

а

21100177 (U854252 M1303462)

$$\begin{cases}(12d-3)^2-140d^2+15d+55<0\\(12d-3)^2-135d^2+15d+39>0\end{cases}$$

Черновик

$$\underbrace{(12d-3)^2-135d^2+15d+39}_{a}-\underbrace{15d^2+16}_{b}<0$$

$a-b<0,\ a>0 \Rightarrow a<b$

$144d^2-72d-135d^2+15d+39>0.$

$9d^2-72d+15d+39>0 \ |:3.$

$3d^2-24d+5d+13>0.$

$400-40+1=361$

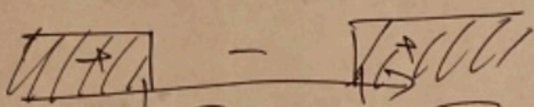
$3d^2-19d+13>0.$

$12\times 13=144+12=156.$

$D=361-156=$

$=205$

$\frac{19\pm\sqrt{205}}{6}$



$\frac{19-\sqrt{205}}{6}$ $\frac{19+\sqrt{205}}{6}.$

$d<\frac{19-\sqrt{205}}{6},\ d>\frac{19+\sqrt{205}}{6}.$

$144d^2-72d-140d^2+15d+55<0.$

$4d^2-57d+55<0$ $(4d-11)(d-5).$ $(4d-5)(d-11)$

$57^2-16\cdot55>0.$ $(2d-11)(2d-5).$ $-44d-5d=-49d.$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100177**

ID профиля: **854252**

Вариант 23

(4)

$$(1)\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=22 \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}(2)$$

$\boxed{\text{Чистовик}}$

Решение: $\underline{1)}$ из (2) следует, что каждое из чисел a, b, c представлено в виде $2^{m}\cdot 11^{n}$, т.к 2 и 11 – взаимно простые числа. $\Rightarrow$ $a=2^{m_a}\cdot 11^{n_a}$, $b=2^{m_b}\cdot 11^{n_b}$, $c=2^{m_c}\cdot 11^{n_c}$, где $m_a, m_b, m_c, n_a, n_b, n_c$ – целые неотрицательные числа ($\in \mathbb{N}\cup\{0\}$)

$\underline{2)}$. ~~Из пункта 1) и определения „НОД", (1)~~ $\cancel{\Leftrightarrow \begin{cases} \min(m_a,m_b,m_c)=1 \\ \min(n_a,n_b,n_c)=1 \\ m_a,m_b,\dots,n_b,n_c\in\mathbb{N}\cup\{0\} \end{cases}}$

Из пункта 1) и определения „НОК", (2) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \max(m_a,m_b,m_c)=16 \\ \max(n_a,n_b,n_c)=19 \\ m_a,m_b,\dots,n_b,n_c\in\mathbb{N}\cup\{0\} \end{cases}$$

$\underline{3)}$. Из пункта 1), $22=2^{1}\cdot 11^{1}$ и определению „НОД" (1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \min(m_a,m_b,m_c)=1 \\ \min(n_a,n_b,n_c)=1 \\ m_a,m_b,\dots,n_b,n_c\in\mathbb{N}\cup\{0\} \end{cases}$$

$\underline{4)}$. Из пунктов 2) и 3), исходная система эквивалентна системе:

$$\begin{cases} \min(m_a,m_b,m_c)=1 \\ \min(n_a,n_b,n_c)=1 \\ \max(m_a,m_b,m_c)=16 \\ \max(n_a,n_b,n_c)=19 \\ m_a,n_a,m_b,n_b,m_c,n_c\in\mathbb{N}\cup\{0\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (*)\begin{cases} \min(m_a,m_b,m_c)=1 \\ \max(m_a,m_b,m_c)=16 \\ m_a,m_b,m_c\in\mathbb{N}\cup\{0\} \end{cases} \\ (**)\begin{cases} \min(n_a,n_b,n_c)=1 \\ \max(n_a,n_b,n_c)=19 \\ n_a,n_b,n_c\in\mathbb{N}\cup\{0\} \end{cases} \end{cases}$$

Т.к системы (*) и (**) независимы, ответ к задаче равен $M\cdot N$, где M – число троек (m_a,m_b,m_c) решений (*), а N – число троек (n_a,n_b,n_c), решений (**).

21100177 (U854252 M1303463)

④ – продолжение

Чистовик

комбинации (1,1,16), (1,16,1), (16,1,1), (1,16,16), (16,1,16), (16,16,1) учтены дважды

5). Найдём M. M – число троек натуральных чисел от 1 до 16, среди которых есть 1 и 16 $\Rightarrow M = 3 \cdot 2 \cdot 16 - 6 =$

$= 96 - 6 = 90$; $\boxed{M = 90}$

3 позиции для „1“

2 позиции для „16“

числа от 1 до 16 на ост. позицию.

6). Аналогично найдём N: $N = 3 \cdot 2 \cdot 19 - 6 =$

$= 6 \cdot 19 - 6 = 6 \cdot 18 = 108$; $\boxed{N = 108}$

7). Ответом к задаче будет $M \cdot N = 90 \cdot 108 = \underline{9720}$.

$\boxed{\text{Ответ: } 9720}$.

⑥. $\boxed{\text{Чистовик}}$

1).

$S_{APK} = 15$

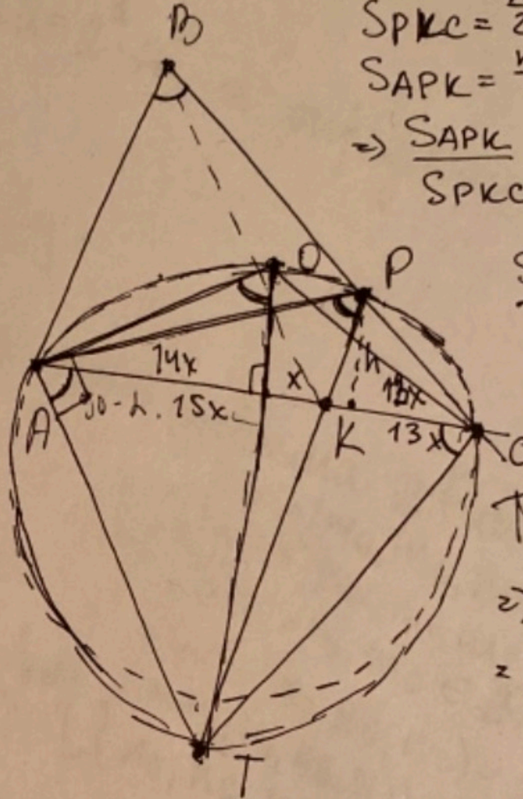
$S_{PKC} = 13$

$S_{PKC} = \frac{h}{2} \cdot KC$

$S_{APK} = \frac{h}{2} \cdot AK \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{15}{13}.$

$S_{APC} = 28$



2).

$$\left.\begin{aligned} S_{ABK} &= H \cdot \frac{AK}{2} \\ S_{BKC} &= H \cdot \frac{KC}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

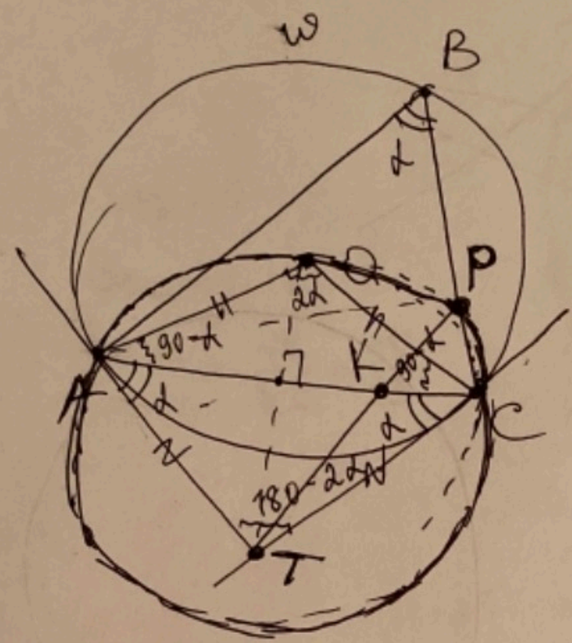
$\Rightarrow \frac{S_{ABK}}{S_{BKC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{15}{13}.$

$T \in \Omega \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APT = \angle TAC =$

$= \angle TCA$

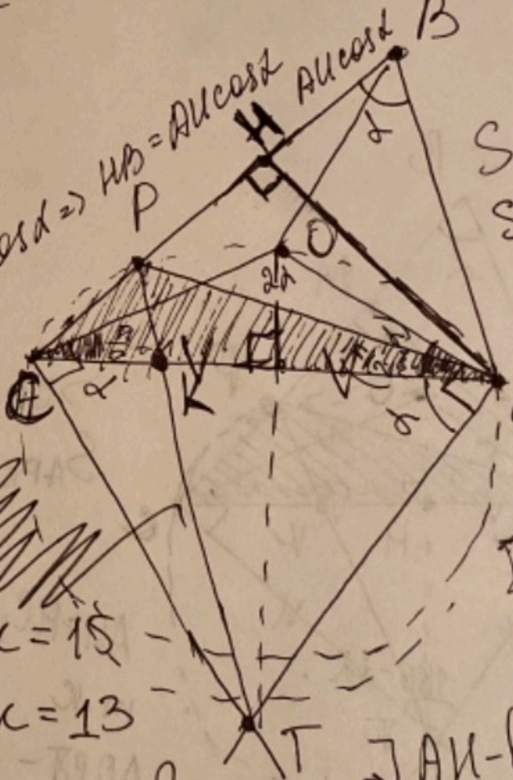
Черновик



~~$S_{\triangle APK}=15$~~

~~$S_{CPK}=13$~~

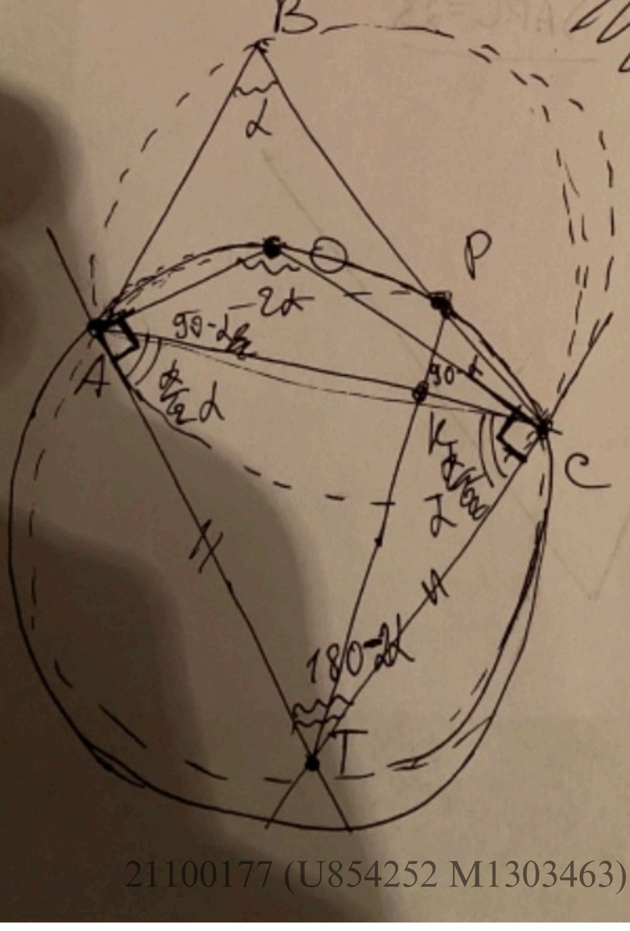
$\frac{HB}{AH}=\cos\alpha \Rightarrow HB=AH\cos\alpha$



$S_{CPK}=13$

$S_{APK}=15 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{APC}=28$



$S_{APK}=15$

$S_{CPK}=13$

(!) : S_{ABC} - ?

AOCT - вписанный

$AT=CT$ (касат.) $\Rightarrow \angle TAC=\angle TCA=\frac{\alpha}{2}$.

∃ AH - высота в $\triangle ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow AH\cdot\frac{1}{2}CP=S_{ACP}\Rightarrow$

$AH\cdot\frac{1}{2}BC=S_{ABC}\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\frac{S_{ABC}}{S_{APC}}=\frac{BC}{CP}}$

21100177 (U854252 M1303463)

№5. $\boxed{\text{Чистовик}}$

Пусть $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = a(x)$, $\log_{(x+4)^2}(x+34) = b(x)$, $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) = c(x)$.

1). Найдём область, где ~~[illegible]~~ опр-ны все функции:

$$\begin{cases} 2x+23>0 \\ 2x+23\neq 1 \\ x+34>0 \\ x+34\neq 1 \\ x\neq -4 \\ -x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-11{,}5 \\ x\neq -11 \\ x>-34 \\ x<-4 \\ x\neq -33 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-11{,}5;-11)\cup(-11;-4)$$

2). Заметим, что при $x=-9$ $a(x)=\log_{\sqrt{25}}5=1$, $b(x)=\log_{25}25=1$, $c(x)=\log_{\sqrt{5}}5=2 \Rightarrow x=-9$ является решением задачи.

3). Докажем, что нет других решений. Рассмотрим интервал $(-11{,}5;-11)$. На нём $(x+4)^2>(x-11+4)^2=49>1 \Rightarrow b(x)>\log_{49}(-11{,}5+34)$ (в логарифм. функция возрастает при основании >1). $\Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{49}(22{,}5)\in(0;1)$. На этом же интервале $\sqrt{x+34}>\sqrt{34-11{,}5}>1$ $\sqrt{2x+23}>\sqrt{2\cdot(-11)+23}=\sqrt{1}=1 \Rightarrow a(x)<\log_{\sqrt{-11{,}5+34}}(2(-11)+23)=\log_{\sqrt{22{,}5}}1=0$ $c(x)<\log_{\sqrt{-11{,}5\cdot 2+23}}(11-4)=\log_0$ – не существует. Таким образом, решений на интервале $(-11{,}5;-11)$ нет. Аналогично док-во для интервала $(-11;-4) \Rightarrow$ $\boxed{\text{Ответ: } x=-9}$

21100177 (U854252 M1303463)