Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100156**

ID профиля: **170137**

Вариант 23

№1.

$S = \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = (2a_1 + 5d) \cdot 3 = 6a_1 + 15d;$

$a_{10} a_{16} > S + 39;$ $a_{11} a_{15} < S + 55;$

$(a_1 + 9d)(a_1 + 15d) > S + 39;$ $(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < S + 55;$

$a_1^2 + 24 a_1 d + 135 d^2 > S + 39;$ $a_1^2 + 24 a_1 d + 140 d^2 < S + 55;$

$+\begin{cases} -(a_1^2 + 24 a_1 d + 135 d^2) < -(S + 39) \\ a_1^2 + 24 a_1 d + 140 d^2 < S + 55 \end{cases}$

$5d^2 < 16$

$d^2 < \frac{16}{5} = 3,2;$

По условие задачи сказано что каждый член арифметической прогрессии целые числа, $\Rightarrow$ $d = 1;$

$S = 6a_1 + 15;$

$a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 15 + 39;$

$a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0$

$(a_1 + 9)^2 > 0;$

$a_1 \neq -9;$

$a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 15 + 55$

$a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0$

$(a_1 + 9)^2 - 11 < 0;$

$(a_1 + 9)^2 < 11;$

$(a_1 + 9)^2 = 1, 4, 9 < 11.$

$\Downarrow$

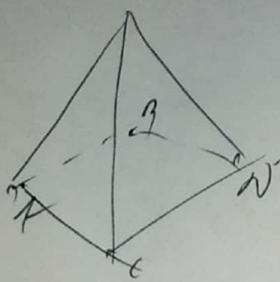
$a_1 = -8, -7, -6; -12; -11; -10;$

Ответ: $a_1 = -8, -7, -6; -12; -11; -10;$

6

№2.

CD ‖ оси цилиндра, ~~△ACD=△BC~~



△ACD = △BCD, то основание

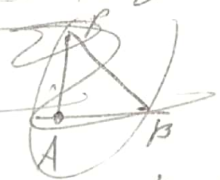
A и B на CD совпадают, скажем

точка P то плоскость APB ⊥,

т.к. CD ‖ оси цилиндра, то CD ⊥ основанию; плоскость PB ‖ ~~осн~~ основанию; R описанн. окружности. △PAB равен окружность с основание R, 2R; ~~2R≥AP~~

$2R \geq AB = 4$; т.к. по условию R наименьш. из возможности значи $R = 2$;

тогда AB диаметр описанной окружност. PAB; $\angle APB = 90°$; откуда следует ~~△APB~~



~~△APB - равнобедрен~~

△APB - равнобедренный прямоугольный треугольник; значит $AP = BP = 2\sqrt{2}$;

$CP = \sqrt{36-8} = \sqrt{28}$; $PD = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$

$CD = \sqrt{28} + \sqrt{41}$

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+4b, 8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le 8 \\ a^2+b^2 \le -4a+4b; \end{cases}$$

Сначала $a^2+b^2 < -4a+4b;$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = S$

$S = \frac{a_1 + a_1 + (6-1) \cdot d}{2} \cdot 6 = (2a_1 + 5d) \cdot 3 =$

$= 6a_1 + 15$

$a_{10} a_{16} > S + 39;$

$a_{11} a_{15} < S + 55;$

$a_{10} a_{16} > S + 39;$

$a_{10} = a_1 + 9d; \; a_{16} = a_1 + 15d;$

$(a_1 + 9d)(a_1 + 15d) > S + 39;$

$a_1^2 + 15a_1 d + 9a_1 d + 135d^2 > S + 39;$

~~$a_1^2 + 15a_1 d + 9a_1 d$~~

$a_1^2 + 24a_1 d + 135d^2 > S + 39;$

$a_{11} a_{15} < S + 55 \Rightarrow$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < S + 55;$

$a_1^2 + 14a_1 d + 10a_1 d + 140d^2 < S + 55;$

$a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2 < S + 55$

$\frac{55}{-39}{16}$

$a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2 < S + 55$

$-(a_1^2 + 24a_1 d + 135d^2) < -(S + 39)$

$5d^2 < 16;$

$d^2 < \frac{16}{5}$

$a_{10} a_{16} > S + 39;$

$(a_1 + 9d)(a_1 + 15d) > S + 39;$

$a_1^2 + 24a_1 d + 135d^2 > S + 39;$

~~$a_1^2 + 24a_1 d + 14$~~ $(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < S + 55;$

$+ \; a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2 < S + 55;$

$- \; (a_1^2 + 24a_1 d + 135d^2) < -(S + 39)$

$5d^2 < 16;$

$d^2 < \frac{16}{5} = 3{,}2$

$d = 1;$

$100 + 64 + 160 = 324$

$a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 15 + 39;$

$a_1^2 + 18a_1 + 91 > 0;$

$a_1^2 + 18a_1 > -91;$

$a_1^2 + 18a_1 < -70;$

$a_1^2 + 24a_1 + 140 < 6a_1 + 15 + 55$

$a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0;$

$a_1^2 + 18a_1 + 91 > 0;$

$D =$

$\frac{324}{-280}{44}$

$S = \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = 3(a_1 + a_6) = 3(a_1 + a_1 + 5d) = 6a_1 + 15d =$

$= 6a_1 + 15;$

$a_1^2 + 24a_1 + 135 > 6a_1 + 54$

$a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0;$

$(a_1 + 9)^2 > 0;$

$a_1^2 + 18d + 70 < 0;$

$(a_1 + 9)^2 - 11 < 0$

$(a_1 + 9)^2 < 11;$

Scanned by CamScanner

$S = \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = 3(a_1 + a_1 + 5d) = 6a_1 + 15d = 6a_1 + 15$

$(a_1 + 9)(a_1 + 15) > 6a_1 + 54$

$a_1^2 + 18a_1 + 135 > 54$

$a_1^2 + 18a_1 + 81 > 0$

$(a_1 + 9)^2 > 0;$

$a_1 = -8;\ a_1 = -7;\ a_1 = -6;$

$a_1 = -12;\ a_1 = -11;\ a_1 = -10$

$(a_1 + 10)(a_1 + 14) < 8a_1 + 70$

$a_1^2 + 18a_1 + 70 < 0$

$a_1^2 + 18a_1 + 81 - 11 < 0$

$(a_1 + 9)^2 - 11 < 0$

$(a_1 + 9)^2 < 11;$

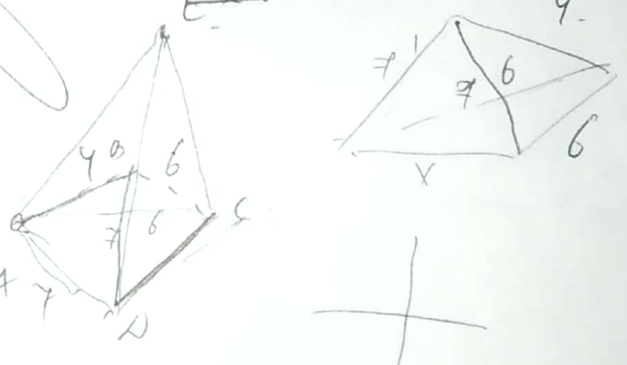
$\cancel{|a_1 + 9| < \sqrt{11}}$

$(a_1 + 9)^2 = 0, 1, 4, 9 < 11$

1, 4, 9;

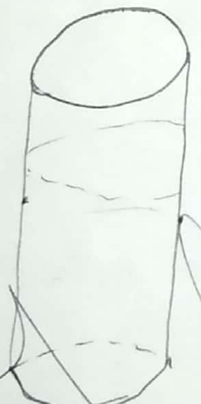
$\boxed{a_1 = -8;\ a_1 = -7;\ a_1 = -6}$

$a_1 = -8; -7; -6; -12; -10; -6$



$\cancel{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 8}$

$a^2 + b^2 \leq \min(-4a + 4b; 8)$



$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 8$

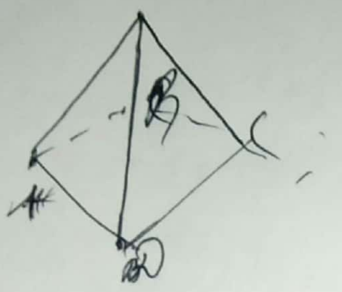
$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 8;$

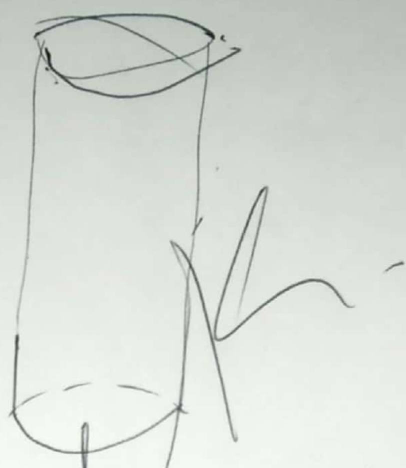
$a^2 + b^2 \leq -4a + 4b;$

$a^2 + 4a \leq 4b - b^2;$

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 8\\ a^2+b^2\le \min(-4a+4b,\ 8)\end{cases}$$





По ~~усл~~ $AC=BC=6$; $AD=BD=7$; $AB=4$;

~~т.к. $CD \perp$ по~~

$CD \parallel$ оси цилиндра

$\triangle ACD=\triangle BCD$, по основанию ~~перпендикуляр~~

A и B на CD совпадают; Пусть P, тогда

APB перпенд. т.к. $CD \parallel$ оси цилин, то $CD \perp$ основаниям;

$PB \parallel$ основанию; R опис $\triangle PAB$, ~~равен~~

$R = 2$; $AB=4$; R равен по $R=2$; AB – диам

описанной окружности $\triangle PAB$; $\angle APB=90^\circ$; $\Rightarrow \triangle APB$.

$AP=BP=2\sqrt{2}$;

$CP=\sqrt{36-8}=\sqrt{28}$; $PD=\sqrt{49-8}=\sqrt{41}$;

$CD=\sqrt{28}+\sqrt{41}$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100156**

ID профиля: **170137**

Вариант 23

№4

$\begin{cases} НОД(a,b,c)=22 \\ НОК(a,b,c)=2^{16}\cdot 11^{19} \end{cases}$

$a=2^{\alpha_1}\cdot 11^{\alpha_2}$; $b=2^{\beta_1}\cdot 11^{\beta_2}$; $c=2^{\gamma_1}\cdot 11^{\gamma_2}$.

$НОД(a,b,c)=2\cdot 11 \Rightarrow \begin{cases} \min(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=1 \\ \min(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=1 \end{cases}$

$НОК(a,b,c)=2^{16}\cdot 11^{19} \Rightarrow \begin{cases} \max(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=16 \\ \max(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=19 \end{cases}$

$\begin{cases} 1\le \alpha_1,\beta_1,\gamma_1 \le 16 \\ \min(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=1 \\ \max(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=19 \end{cases}$

$\alpha_1\ \beta_1,\gamma_1$

Один из них должен равнятся 1. Это мы можем выбрать 3 сп. Еще 1 из них должен ~~равн~~ равнятся 16. Это мы можем выбрать уже 2 сп. Итого $3\cdot 2=6$ сп.

Третье число должно быть от 1 до 16 ⇒

⇒ $16\cdot 6=96$ сп.

Но ~~...~~ случаями 1, 16, 16 и 1, 1, 16 мы считали по 2 раза $96-6=90$ сп.

Аналогично для $\alpha_2, \beta_2\ \gamma_2$.

$6\cdot 19-6=108$ сп.

Итого $90\cdot 108=9720$ сп.

$x+14=a$

$x+4=b$

$2x+23=c$

$\log_{\sqrt{a}} c=\log_a c^2=2\log_a c$

$\log_{b^2} a=\frac{1}{2}\log_b a$

$\log_{\sqrt{c}}(-b)=2\log_c b;$

$\log_a c=\frac{\log_b c}{\log_b a}=\frac{1}{\log_c b\cdot\log_b a}$

$\log_a c\cdot\log_c b\cdot\log_b a=1$

$2\log_a c\cdot\log_c b\log_b a=2$

Если 2 из 4 $x=x$, то III $\frac{2}{x^2}$

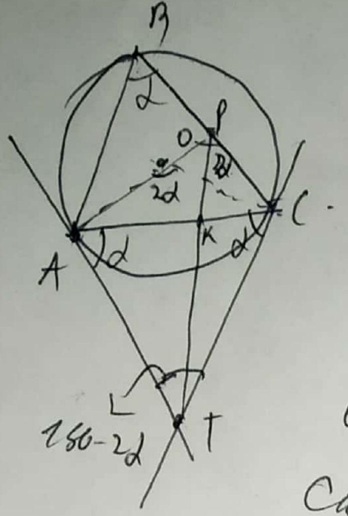
$\frac{2}{x^2}=x+1$

$x^3+x^2-2=0$

$x=1$ — корень

$x^2+2x+2>0$

№6



а) $\angle ABC = \alpha \Rightarrow \angle TAC = \angle TCA = \alpha$;

$\angle AOC = 2\alpha$;

$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{15}{13} = \frac{AK}{KC}$; т.к

PK - биссектриса $\angle APC$, то $\frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC}$;

и кроме того т.к как мы уже

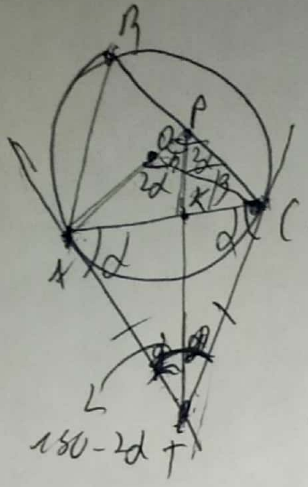
сказали $\angle ABC = \beta$ и $\angle APC = 2\beta$, то

$\angle BAP = \beta$, то $PB = PC$; $\frac{15}{13} = \frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC} = \frac{BP}{PC}$;

$\frac{S_{BPA}}{S_{APC}} = \frac{BP}{PC} = \frac{15}{13}$; ~~$S_{APC}$~~

$S_{ABC} = S_{BPA} + S_{APC}$

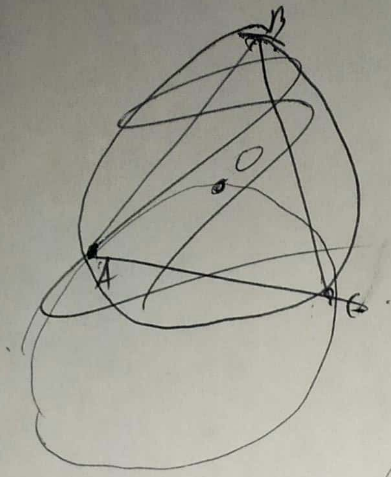
$S_{\Delta APK} = 15$; $S_{CPK} = 13$

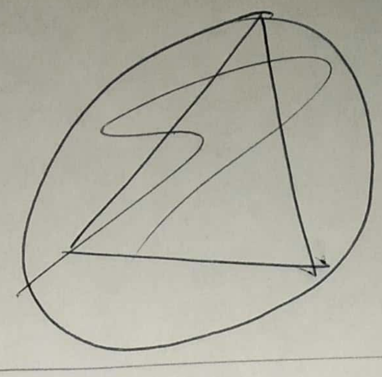


$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{KC} = \frac{15}{13}$;

$AK \cdot KC = AP \cdot PC$, $\angle ABC = \beta$;

Scanned by CamScanner





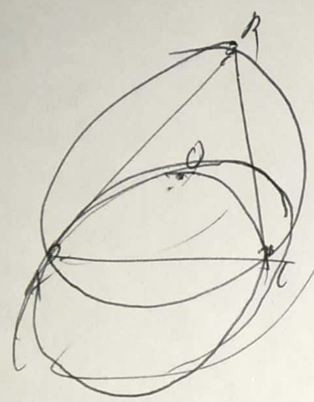
$\log_a b = c;$

$a^c = b;$

1) $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34)$

$\sqrt{(x+4)}^{\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)} = \sqrt{x+34}^{\log_{(x+4)^2}(x+34)}$

$2x+23 = (x+34)^{\frac{1}{4}\log_{(x+4)}(x+34)}$



$\log_{\sqrt{2x+34}}(2x+23)$

$\log_{(x+4)^2} \cdot \log_{\sqrt{2x+13}}(-x-4) = \log_{2x+13}(x+4)^2;$

$\log_{(2x+13)}(x+4)^2 - \log_{(x+4)^2}(x+34) = 1;$

$\log_{(2x+13)}(x+4)^2 = 1 + \log_{(x+4)^2}(x+34) = 1 + \frac{1}{\log}$

$\frac{1}{\log_{(x+4)^2}(x}$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34);$

$\log_{x+34}(2x+23)^2 = \log_{(x+4)^2}(x+34)$

$\log_{(x+34)}(2x+23)^2 = \frac{1}{\log_{x+34}(x+4)^2};$ $\log_{(x+34)}(x+4)^2 \cdot \log_{(x+34)}(2x+23)^2 = \frac{1}{4}.$

$\log_{(2x+13)}(x+4)^2 - \log_{(x+4)^2}(x+34) = 1;$

$\log_{(2x+13)}(x+4)^2 - \frac{1}{\log_{(x+34)}(x+4)^2} = 1;$

$\log_{(2x+13)}(x+4)^2 \log_{(x+34)}(x+4)^2 - 1 = \log_{(x+34)}(x+4)^2;$

Scanned by CamScanner

НОД $(a,b,c)=22$ НОК $(a,b,c)=2^{16}\cdot 11^{19}$;

$a=22a_1$; $b=22b_1$; $c=22c_1$ $2^3\cdot 11^3 a_1 b_1 c_1 = 2^{16}\cdot 11^{19}$

НОД $(a_1,b_1,c_1)=1$; $a_1\cdot b_1\cdot c_1 = 2^{13}\cdot 11^{16}$

~~НО~~ $a_1=1$ или $b_1=1$; или $c_1=1$;

пусть $c_1=1$;

$a_1 b_1 = 2^{13}\cdot 11^{16}$; $a_1 = 2^{x_1}\cdot 11^{y_1}$;

$b_1 = 2^{x_2}\cdot 11^{y_2}$;

$x_1+x_2=13$;

Это задача это ур-ие имеет $C^2_{13+2-1}=\frac{14\cdot 13}{2}=91$ решени

$y_1+y_2=16$;

это задача это ур-е имеет $C^2_{16+2-1}=\frac{17\cdot 16}{2}=136$ реш

$\begin{cases} x_1+x_2=13 \\ y_1+y_2=16 \end{cases}$ имеет ~~91·136=12376 решен~~

$91\cdot 136$;

$$\begin{array}{r} 136 \\ \times\ 91 \\ \hline 136 \\ 1224 \\ \hline 12376 \end{array}$$

12376 решений;

так мы решили, когда $c_1=1$, но надо ещё

учесть, что число перестановок умножим на 3!

Итого $12376\cdot 3! = 12376\cdot 6$

$$\begin{array}{r} 12376 \\ \times\ 6 \\ \hline 74256 \end{array}$$

74256 ~~троек~~ троек a,b,c

$a=2^{\alpha_1}\cdot 11^{\alpha_2}$; $b=2^{\beta_1}\cdot 11^{\beta_2}$; $c=2^{\gamma_1}\cdot 11^{\gamma_2}$;

$\begin{cases} \alpha_1,\beta_1,\gamma_1 \le 16 \\ \alpha_2,\beta_2,\gamma_2 \le 19 \end{cases}$

НОД $(a,b,c)=2\cdot 11 \Rightarrow \begin{cases} \min(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=1 \\ \min(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=1 \end{cases}$

НОК $(a,b,c)=2^{16}\cdot 11^{19} \Rightarrow \begin{cases} \max(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=16 \\ \max(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=19 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, $\log_{(x+4)^2}(x+34)$, $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$. $\log_a a = 1$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34)$ $a^{\log_a b} = b$

$2\log_{x+34}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34)$

$22 = 2 \cdot 11$;

$(x+34)^{\log_{x+34}(2x+23)} = (x+34)^{\log_{(x+4)^2}(x+34)}$

$\alpha+\beta=8$; $\log_a b = c$

$(2x+23)^2 = (x+34)^{\log}$; $a^c = b$

$a = 2^{x_1} \cdot 11^{y_1}$; $b = 2^{x_2} \cdot 11^{y_2}$; $c = 2^{x_3} \cdot 11^{y_3}$;

$x_1 + x_2 + x_3 = 16$; 1) $x_1 = 1$; $x_1 = 1$; $x_2 + x_3 = 15$

$y_1 + y_2 + y_3 = 19$; $y_2 + y_3 = 18$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34)$; $\log_{\sqrt{2x+23}}(-(x+4)) - \log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = 1$

$\frac{1}{2} \cdot 2\log_{x+34}(2x+23) = \frac{1}{2}\log_{(x+4)}(x+34)$

$\log -a$

1) $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23) = \log_{(x+4)^2}(x+34)$

$\sqrt{x+34}^{\log_{(\sqrt{x+34})}(2x+23)} = \sqrt{x+34}^{\log_{(x+4)^2}(x+34)}$

$\log_{(x+4)}(x+34)$;

$2x+23 = x+34$

$\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4) - \log_{(x+4)^2}(x+34) = 1$;

$2\log_{2x+23} -(x+4) - \frac{1}{2}\log_{(x+4)} x+34 = 1$;