# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100041**

ID профиля: **371054**

Вариант 23

Чистовик.

№1.

Пусть $a_1 = a$, а разность прогрессии – $d$ (т.е. $a_n = a+(n-1)d$)

Тогда $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_6 = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a+5d) = 6a + (1+2+\ldots+5)d =$
$= 6a + 15d$

$a_{10} \cdot a_{16} = (a+9d)(a+15d) = a^2 + 24ad + 135d^2 > S + 39 = 6a + 15d + 39$ (1)

$a_{11} \cdot a_{15} = (a+10d)(a+14d) = a^2 + 24ad + 140d^2 < S + 55 = 6a + 15d + 55$ (2)

~~$a^2+24ad+135d^2 > 6a+15d+39$~~

$a^2 + 24ad + 135d^2 + 16 > 6a + 15d + 39 + 16 = 6a + 15d + 55 > a^2 + 24ad + 140d^2$

Отсюда $16 > 5d^2 \Leftrightarrow d^2 < \frac{16}{5}$ $\frac{-4}{\sqrt{5}} < d < \frac{+4}{\sqrt{5}}$ $d = -1, 0, 1$.

Но по условию $d > 0$. Тогда $d = 1$.

Перепишем (1) и (2) с учётом того, что $d = 1$.

$\begin{cases} a^2 + 24a + 135 > 6a + 54 \\ a^2 + 24a + 140 < 6a + 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 18a + 81 > 0 \\ a^2 + 18a + 81 < 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+9)^2 > 0 \\ (a+9)^2 < 11 \end{cases}$

$(a+9)^2 \geq 0$ всегда. $(a+9)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -9$. Тогда первое нер-во равносильно $a \neq -9$.

Второе равносильно системе $\begin{cases} a+9 > -\sqrt{11} \\ a+9 < \sqrt{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -9 - \sqrt{11} \\ a < -9 + \sqrt{11} \end{cases}$

Т.к. $3 < \sqrt{11} < 4$, то $a \in [-12; -6]$, $a \in \mathbb{Z}$.

С учетом $a \neq -9$, $a \in [-12; -10] \cup [-8; -6]$, $a \in \mathbb{Z}$.

В решении использовалось, что $a$, $d \in \mathbb{Z}$. Докажем это.

$a = a_1 \in \mathbb{Z}$ по условию

$d = (a+d) - a = a_2 - a_1 \in \mathbb{Z}$ по условию.

разность целых чисел

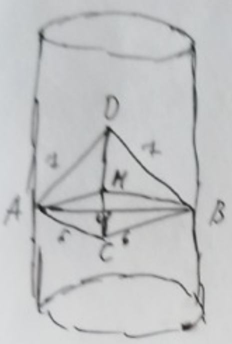
Ответ: $-12; -11; -10; -8; -7; -6$.

1

Чистовик.

№2.

Через ~~АВ-прав~~ $M$ середину $AB$ проведем плоскость $\alpha$ такую, что $AB \perp \alpha$.




Т.к. $DM \perp AB$ (из р/б $\triangle ADB$), $M \in \alpha$, то $D \in \alpha$.

Аналогично $C \in \alpha$.

Пусть $l$ - ось цилиндра.

$l \parallel CD \subset \alpha$ $\Rightarrow l \parallel \alpha$ $\Rightarrow l \perp AB$.

по условию

Т.е. $A$ и $B$ ~~не~~ лежат в цилиндре „на одной высоте".

Т.е. ~~[illegible]~~ плоскость, параллельная основаниям, через $A$ проходит и через $B$.

Проведём эту плоскость $\beta$.

Пусть $K = \beta \cap CD$.

Тогда заметим, что радиус описанной около $\triangle AKB$ окружности совпадает с радиусом цилиндра.

Из теоремы синусов для $\triangle AKB$ $2R = \frac{AB}{\sin\angle AKB} = \frac{4}{\sin\angle AKB}$, где $R$-радиус

Тогда для наименьшего радиуса нужен наибольший синус.

$\sin\angle AKB = 1 \Leftrightarrow \angle AKB = 90^\circ$.

Тогда $\triangle AKB$ - прямоуг. р/б ($AK = KB$, т.к. $K \in DC \in \alpha$)

$AK = KB = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

Из прямоуг $\triangle DKB$ ($DK \parallel l$, $l \perp \beta$, $BK \subset \beta$) по т. Пифагора

$DK^2 = 7^2 - (2\sqrt{2})^2 = 41$ $\Rightarrow DK = \sqrt{41}$

Аналогично $CK = \sqrt{28}$

Заметим, что $K$ может лежать как вне отрезка $CD$, так и на нём. В первом случае $CD = DK - CK = \sqrt{41} - \sqrt{28}$, во втором — $CD = DK + CK = \sqrt{41} + \sqrt{28}$

Ответ: $\sqrt{41} + \sqrt{28}$, $\sqrt{41} - \sqrt{28}$

2

Чистовик

№3.

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8$

$\Updownarrow$

$(a-x)^2+(b-y)^2 \le 8$ ~~окружность~~

в координатах $aOb$ ~~окружность~~ круг с центром $(x; y)$ и радиусом $2\sqrt{2}$.

Для второго нер-ва рассмотрим 2 случая.

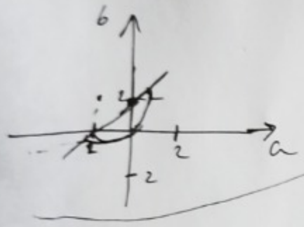
1) $-4a+4b \le 8 \Leftrightarrow b \le a+2$

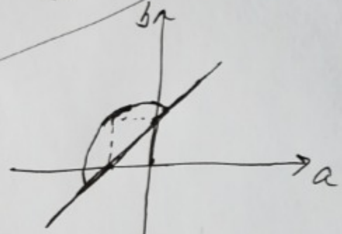
$a^2+b^2 \le -4a+4b$

$(a+2)^2+(b-2)^2 \le 8$

2) $-4a+4b \ge 8 \Leftrightarrow b \ge a+2$

$a^2+b^2 \le 8$





Т.е. второе ур-ие задаёт фигуру из двух дуг окружностей и их внутр.

Рассмотрим пересечения круга ~~окружности~~ из первого нер-ва.

Найдём общие точки дуг из второго нер-ва.

$\begin{cases} a^2+b^2=8 \\ b=2+a \end{cases} \Rightarrow a^2+(a+2)^2=8 \Rightarrow 2a^2+4a+4=8$

$a^2+2a+2=4$

$a^2+2a+1=3$

$(a+1)^2=3$

$a=-1\pm\sqrt{3} \quad b=1\pm\sqrt{3}$

③

Найдём пересечение круга из первого нер-ва с частью круга из 1 случая

Найдём прямые через $(-2; 2)$, $(\sqrt{3}-1; \sqrt{3}+1)$ и через $(-2; 2)$, $(-\sqrt{3}-1; -\sqrt{3}+1)$.

Если окружность из первого нер-ва пересечет окружность из 1 случая второго нер-ва, то центр такой окружности $((x; y))$ будет лежать между прямыми из предыдущего предложения и не дальше суммы радиусов от $(-2; 2)$ $(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2})$. Это будет сектор круга. Если окружность из первого нер-ва пересекает $b=a+2$, её центр лежит в прямоугольнике. Объединение прямоугольника и части круга – всевозможные $(x; y)$, для которых

чистовик

№3 (продолжение)

~~...~~ будет решения в 1 случае.
Для 2 случая действуем аналогично.
Объединение ответов для двух случаев – искомая фигура.



21100041 (U371054 M1305068)

Черновик

$a_1 \quad \overset{a_2}{a_1+d} \quad \dots$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$S = a_1 + \dots + a_6 = 6a_1 + (1+2+3+4+5)d = 6a_1 + 15d$

$(a_1+9d)(a_1+15d) > S+39$

$(a_1+10d)(a_1+14d) < S+55$

$a^2 + 24ad + 135d^2 > S+39 = 6a_1 + 15d + 39$

$a^2 + 24ad + 140d^2 < S+55 = 6a_1 + 15d + 55$

$6a_1 + 15d + 55 > a^2 + 24ad + 140d^2$

$a^2 + 24ad + 135d^2 > 6a_1 + 15d + 39$

$16 > 5d^2$

$4 > \frac{16}{5} > d^2$

$\cancel{a^2+24ad+}$

$a^2 + 24a + 135 > 6a + 54$

$a^2 + 24a + 140 < 6a + 70$

$\cancel{a^2+24a+135 > 6a+54}$

$\cancel{6a+70 > a^2+24a+140}$

$a^2 + 18a + 81 > 0$

$a \neq -9$

$(a+9)^2 > 0$

$a^2 + 18a + 70 < 0$

$(a+9)^2 < 11$

$a + 9 < \sqrt{11}$

$-12$

$-3 \cdot 3 > -18$

$-2 \cdot 2 < -2$

$-6$

$3 \cdot 9 > 18$

$4 \cdot 8 < 34$

$-3 \ -2 \ -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3$

$-12 \ -11 \ -10 \ \cancel{-9} \ -8 \ -7 \ -6$

$4^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6^2 \cdot \cos C$

$16 = 72 + 72 \cdot \cos C$

$7 > \cos C = 56$

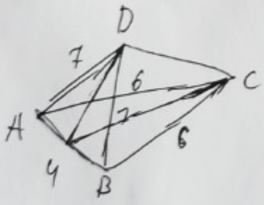
$\cos C = \frac{56}{72} = \frac{7}{9}$

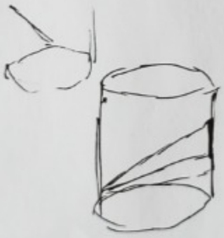
$4^2 = 7^2 + 7^2 - 2 \cdot 7^2 \cos D$

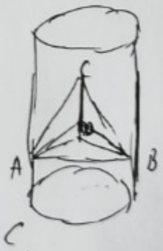
$16 = 98 - 98 \cos D$

$98 \cos D = 82$

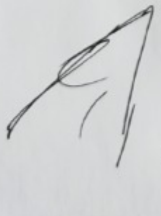
$\cos D = \frac{82}{98} = \frac{41}{49}$

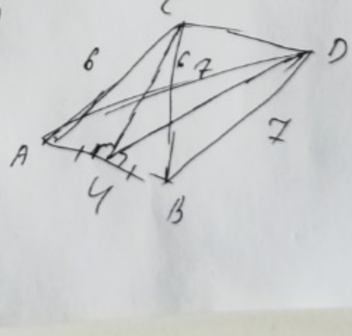


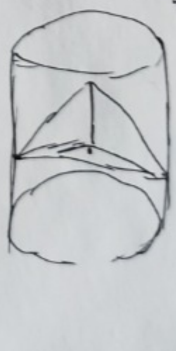





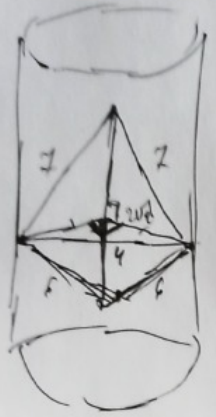

$\sqrt{45}$ $\sqrt{32}$





Черновик

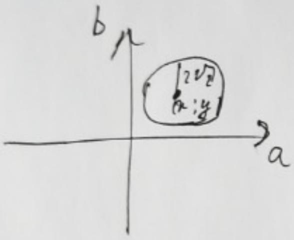


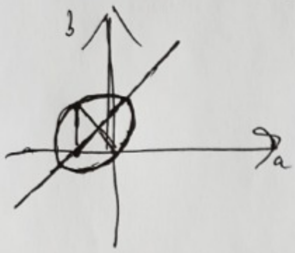
$$\frac{4}{\sin\alpha} = 2R$$

$$\frac{4}{\sin\alpha}$$

$49 - 8$ $\sqrt{41}$

$36 - 8$ $\sqrt{28}$





$-4a + 4b \leq 8$

$4b \leq 8 + 4a$

$b \leq 2 + a$

$a^2 + b^2 \leq -4a + 4b$

$a^2 + 4a + 4 + b^2 - 4b + 4 \leq 8$

$(a+2)^2 + (b-2)^2$

21100041 (U371054 M1305068)

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100041**

ID профиля: **371054**

Вариант 23

Чистовик.

№ 4.

~~Решение~~

~~Рассмотрим степень вхождения двойки в разложение на простые множители чисел a, b, c. Заметим, что каждое из чисел~~

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 11^{\alpha_2}$

$b = 2^{\beta_1} \cdot 11^{\beta_2}$

$c = 2^{\gamma_1} \cdot 11^{\gamma_2}$

Простых чисел, отличных от 2 и 11 в разложении на простые множители a, b, c нет, т.к. иначе бы их НОК делилось бы на это простое число.

Т.к. НОД $(a, b, c) = 2 \cdot 11$, то $\min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 1$

$\min(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 1$

т.к. иначе бы каждое число делилось бы на ~~...~~ хотя бы на $2^2$ (или $11^2$), а тогда бы и их НОД делился бы.

Т.к. ~~НОД~~ НОК$(a, b, c) = 2^{16} \cdot 11^{19}$, то $\max(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 16$

$\max(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 19$.

Тогда одно из чисел $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ равно 1, другое 16, а третье не меньше 1 и не больше 16.

Если два равны 1, а третье 16, то так „раскидать" степени двойки по числам можно 3 способами.

Если два равны 16, а третье 1, то способов так же 3.

Иначе все степени двойки различны. Тогда пусть $\alpha_1 > \beta_1 > \gamma_1$. Тогда $\alpha_1 = 16$, $\gamma_1 = 1$, $16 > \beta_1 > 1$. Способов выбрать $\beta_1$ равно 14. Но упорядочить различные $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ 6 способов.

Тогда всего способов „раскидать" степени двойки $3+3+6\cdot 14 = 90$

Аналогично способов „раскидать" ~~...~~ " $3+3+6\cdot 17 = 108$

Т.к. $(2, 11) = 1$, то способов „раскидать" и то, и то равно $90 \cdot 108 = 9720$

Ответ: 9720

1

21100041 (U371054 M1305069)

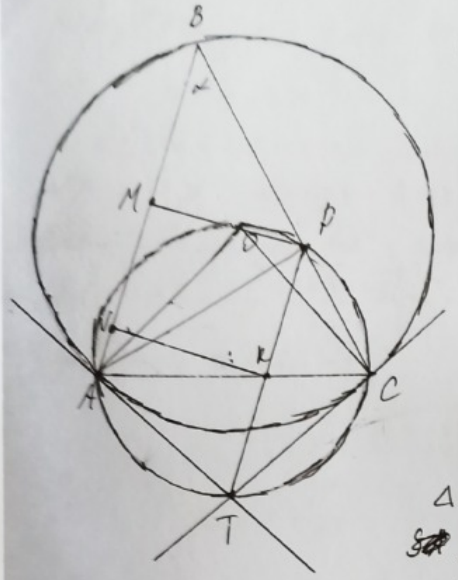
Чистовик №6

Т.к. $AT$ – кас, $\angle OAT = 90^\circ$

Т.к. $CT$ – кас, $\angle OCT = 90^\circ$.

Откуда $AOCT$ – вписанный.

Т.к. $AT = CT$ (отрезки касательных), $T$ лежит на сер. перп к $AC$ $\Rightarrow$ на середине дуги $AC$.




Тогда $\overset{\frown}{AT} = \overset{\frown}{TC}$ $\Rightarrow \angle ABT = \angle CPT$

Пусть $\angle ABT = \angle CPT = \alpha$.

$\angle AOC = \angle APC = 2\alpha$

$\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2} = \alpha$

центр. и впис.

$\angle ABP = \angle TPC \Rightarrow AB \parallel BT \Rightarrow \angle BAB = \angle APT = \alpha$

$\Delta BPA$ – р/б, т.к $\angle BAP = \angle ABP = \alpha \Rightarrow BP = AP$.

$\frac{15}{13} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{CK} = \frac{AB}{CP} = \frac{BP}{CP}$

общ. высота; PK – биссектриса

$S_{ABC} = \frac{BC}{PC}\cdot S_{APC} = \frac{BP+PC}{PC}\cdot(S_{APK}+S_{CPK}) = \frac{28}{13}\cdot 28 = 2\frac{2}{13}\cdot 28 = 56\frac{56}{13} = 60\frac{4}{13}$

В р/б $\Delta APB$ проводим биссектрису $PM$.

Из $\Delta BMP$ $\frac{PM}{BM} = tg\,\alpha = \frac{4}{7}$ $PM = \frac{4}{7}BM$. По т. Пифагора $PM^2 + BM^2 = PB^2$

$(\frac{4}{7}BM)^2 + BM^2 = PB^2$ $BM = \frac{7}{\sqrt{65}}PB$. $AB = 2BM = \frac{14}{\sqrt{65}}PB$ $BC = \frac{28}{15}BP$

$S_{ABC} = \frac{\sin(arctg\frac{4}{7})\cdot\frac{28}{15}\cdot\frac{14}{\sqrt{65}}}{2}PB^2$ $\frac{28\cdot 28}{13} = \sin(arctg\frac{4}{7})\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{14}{\sqrt{65}}PB^2$

$\frac{4}{13} = \sin(arctg\frac{4}{7})\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{\sqrt{65}}PB^2$

$PB^2 = \frac{60\cdot\sqrt{65}}{13}\cdot\frac{1}{\sin(arctg\frac{4}{7})}$

$PB = \sqrt{\frac{60\cdot\sqrt{65}}{13}\cdot\frac{1}{\sin(arctg\frac{4}{7})}}$

Пусть $AB = 28x$. $\frac{PK}{AB} = \frac{CP}{CB} = \frac{13}{28}$ $\Rightarrow PK = \frac{13}{28}\cdot 28x = 13x$ 2

$\Delta CPK \sim \Delta CBA$

Чистовик

№ 6 (продолжение)

Опустим из K перпендикуляр на AB, KN.

$MN \parallel PK$, $NK \parallel MP$, $\angle PMN = 90^\circ$. PKNM – прямоугольник.

$MN = PK = 13x$.

$NA = MA - MN = 14x - 13x = x$

$NK = MP = tg\,\alpha \cdot BM = \frac{4}{7} \cdot 14x = 8x$

По т. Пифагора $AK^2 = KN^2 + AN^2 = 8^2x^2 + x^2 = 65x^2$, $AK = \sqrt{65}x$

$AC = AK \cdot \frac{28}{15} = \frac{28\sqrt{65}}{15}x = \frac{\sqrt{65}}{15}$ $AB = \frac{\sqrt{65}}{15} \cdot \frac{14}{\sqrt{65}}$ $PB = \frac{14}{15}$ $PB = \frac{14}{15} \cdot \sqrt{\frac{60 \cdot \sqrt{65}}{13} \cdot \frac{1}{\sin(arcctg \frac{4}{7})}}$

Ответ: а) $60\frac{4}{13}$

б) $\frac{14}{15} \cdot \sqrt{\frac{60 \cdot \sqrt{65}}{13} \cdot \frac{1}{\sin(arcctg \frac{4}{7})}} = \frac{14}{15}\sqrt{\frac{60 \cdot \sqrt{65}}{13} \frac{\sqrt{65}}{7}} = \sqrt{\frac{300}{7}} \cdot \frac{14}{15} =$

$= \sqrt{\frac{98 \cdot 300}{15^2}} =$

3

21100041 (U371054 M1305069)

Черновик

$(a,b,c) = 2\cdot 11$

$[a,b,c] = 2^{10}\cdot 11^{9}$

$\frac{28x}{\sin B} = 65x$

$\sin B = \frac{28}{65}$

$\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, $\log_{(x+4)^2}(x+34)$, $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$

$2\log_{\sqrt{x+34}}\sqrt{2x+23}$, $\log_{-(x+4)}\sqrt{x+34}$, $\log_{\sqrt{2x+23}}-(x+4)$

$a = \sqrt{x+34}$

$b = \sqrt{2x+23}$

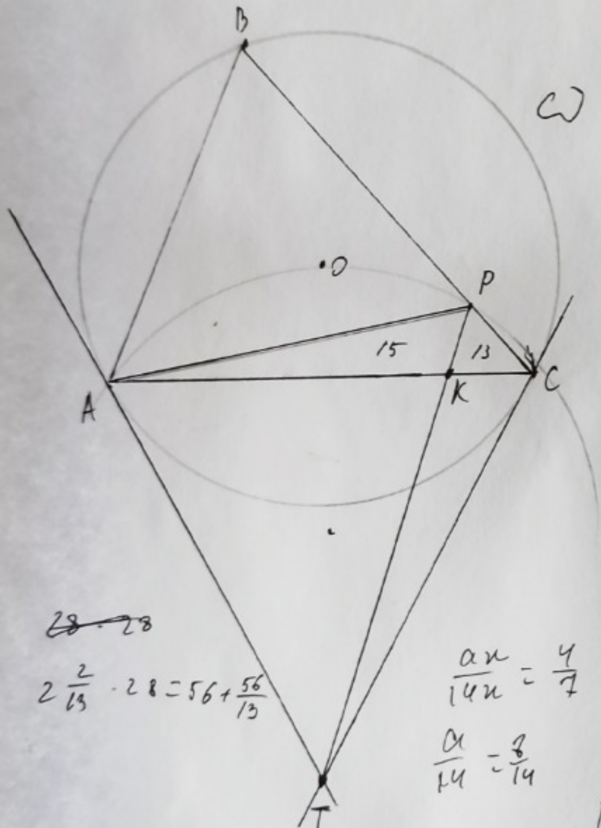
$c = -x-4$

$2\log_a b$, $\log_c a$, $\log_b c$

~~$\sin(90-\alpha) = \cos$~~

$tg\,\alpha = \frac{4}{7}$

$\sin$

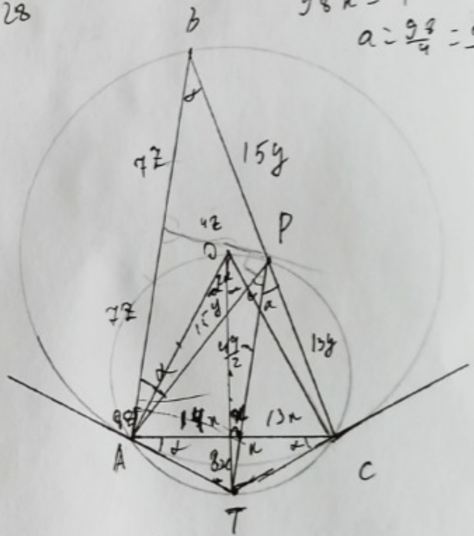



$\frac{13}{28}\cdot 14 =$

$\frac{14x}{ax} = \frac{4}{7}$

$98x = 4ax$

$a = \frac{98}{4} = \frac{49}{2}$




~~28 28~~

$2\frac{2}{13}\cdot 28 = 56 + \frac{56}{13}$

$\frac{ax}{14x} = \frac{4}{7}$

$\frac{a}{14} = \frac{8}{14}$

BA ∥ PT

$49z^2 + 16z^2 = 225y^2$

$65z^2 = 225y^2$

$z^2 = \frac{225}{65}y^2$

$z = \sqrt{\frac{45}{13}}\,y$

$7\sin\alpha - 4\cos\alpha$

$7\sin\alpha - 4\cos\alpha = 0$

$\frac{7}{\sqrt{65}}\sin\alpha - \frac{4}{\sqrt{65}}\cos\alpha = 0$

21100041 (U371054 M1305069)

Черновик

$tg 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin\alpha}$

$\cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha -$

$\cos^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\sin arcctg \frac{4}{7}$

$\frac{4}{7} = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\sin^2 + \cos^2 = 1$

$1 + ctg^2 = \frac{1}{\sin^2}$

$\sin^2 = \frac{1}{1+ctg^2} = \frac{1}{1+(\frac{4}{7})^2}$

$\frac{65}{4}$

$\frac{49}{65}$

21100041 (U371054 M1305069)