Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104985**

ID профиля: **876558**

Вариант 22

Чистовик №1.

1) $S_{15} = 15a_1 + (b+14b)\cdot 7 = 15a_1 + 105b$ (если арифметическая прогрессия имеет вид $a_1; (a_1+b), (a_1+2b) \dots$);

2) $a_7 \cdot a_{16} > S_{15} - 24 \Leftrightarrow (a_1+6b)(a_1+15b) > 15a_1 + 105b - 24$

$$A_1 = a_1^2 + 21a_1b - 15a_1 - 15b + 24 > 0;$$

3) $a_{11} \cdot a_{12} < S_{15} + 4 \Leftrightarrow (a_1+10b)(a_1+11b) < 15a_1 + 105b + 4$

$$A_2 = a_1^2 + 21a_1b - 15a_1 + 5b - 4 < 0.$$

4) $A_2 = A_1 + 20b - 28 \Rightarrow A_1 + 20b - 28 < 0$

$$(\text{п. } 2)\ 0 < A_1 < 28 - 20b$$

$$20b < 28$$

$$b < \frac{7}{5}.$$

Прогрессия возрастающая и состоит из целых чисел $\Rightarrow \left.\begin{matrix} b \in \mathbb{Z} \\ b > 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow b = 1$

5) Тогда: $\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3)^2 > 0 \Rightarrow a \neq -3 \\ (a+3)^2 < 8 \end{cases}$

$$\Downarrow$$

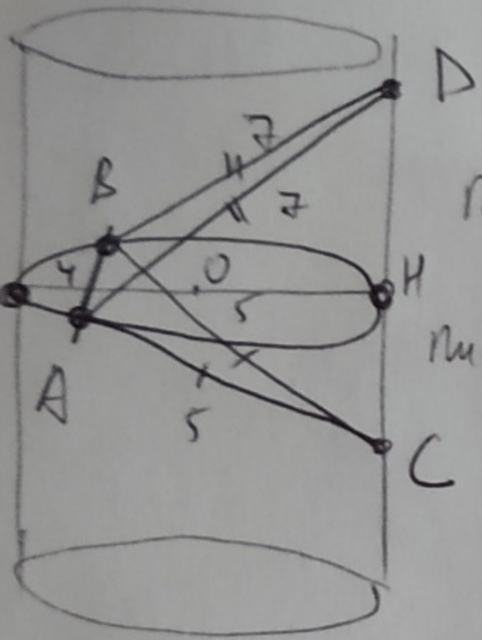
$$-2\sqrt{2} < (a+3) < 2\sqrt{2}$$

$$-(3+2\sqrt{2}) < a < 2\sqrt{2} - 3$$

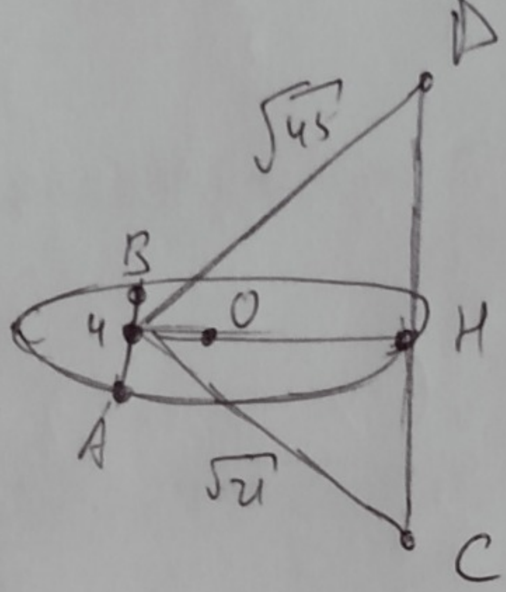
$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow -5 \leq a \leq -1$

Ответ: $a \in \{-5; -4; -2; -1\}$

Чистовик №2:



По т. $\Leftrightarrow$ Пифагора



1) AB – хорда $\Rightarrow 2R \geq AB \Rightarrow$

$\Rightarrow R_{min} = AB/2 = 2 = OH$

$(O \in AB)$

2) $HD = \sqrt{45-4} = \sqrt{41}$

$HC = \sqrt{21-4} = \sqrt{17}$

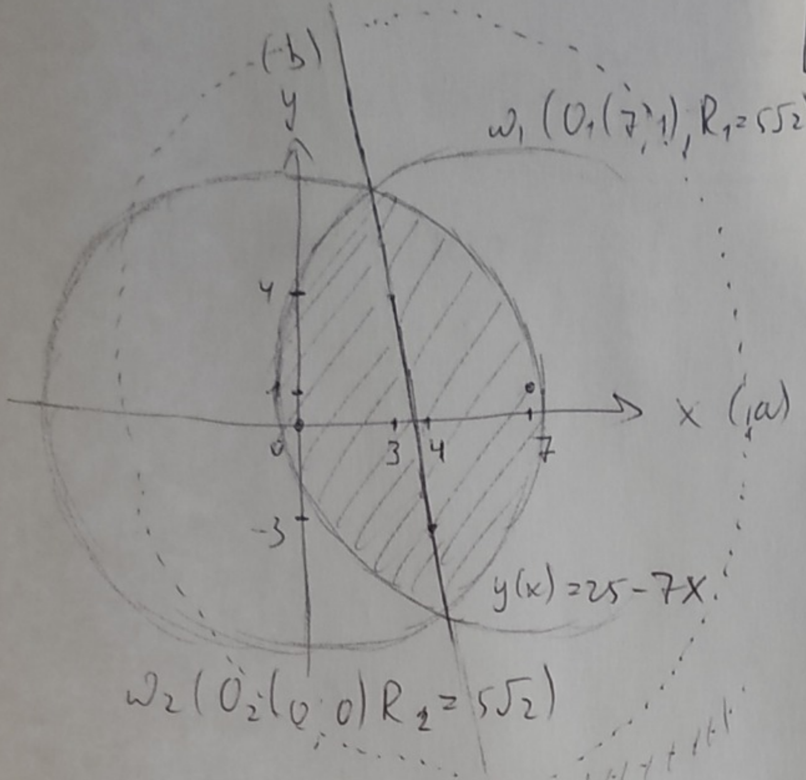
(по т. Пифагора в $\triangle DOH$ и $\triangle OHC$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow CD = \sqrt{17} + \sqrt{41}$

Ответ: $\sqrt{17} + \sqrt{41}$.

Чистовик №3.0:

1) $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min((14a+2b);50) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 14a+2b \le 50 \\ a^2+b^2 \le 14a+2b \end{cases} \\ \begin{cases} 14a+2b \ge 50 \\ a^2+b^2 \le 50 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b \le 25-7a \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 \end{cases} \\ \begin{cases} b \ge 25-7a \\ a^2+b^2 \le 50 \end{cases} \end{array} \right.$

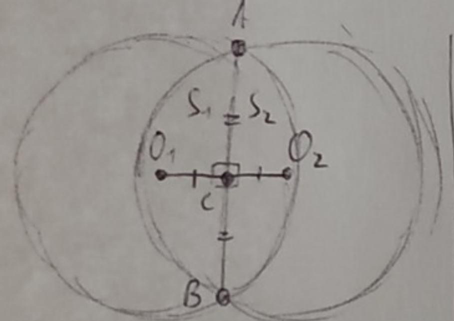


Решения 1 части - слева от прямой, решения 2 - справа

Решение объединение - пересечение кругов.

2) Графиком первой части основной системы является множество $\omega_3(O_3(x;y);\ R_3=5\sqrt{2})$ - круги.

3) Чтобы имелись решения необходимо пересечение с полученной в п.1 областью $\Rightarrow$ центры кругов будут лежать или внутри этой зоны, или на расстоянии, не большем $R_3=5\sqrt{2}$. Таким образом $S_M = S(\omega_4(O_1(0;0); R_4=10\sqrt{2}) \cup \omega_5(O_2(7;1); R_5=10\sqrt{2}))$



$R_1=R_2=10\sqrt{2}$

$O_1O_2=\sqrt{7^2+1^2}=5\sqrt{2}$

$S=S_{\omega_4}+S_{\omega_5}-S_1-S_2=2\pi R_4^2-S_1-S_2$

$AC=BC=\sqrt{O_1A^2-O_1C^2}=\sqrt{R_4^2-\left(\frac{O_1O_2}{2}\right)^2}=$

$=\sqrt{200-\frac{25}{2}}=\sqrt{\frac{375}{2}}=5\sqrt{\frac{15}{2}}$

$$S_1 = S_2 = 2\int_0^{R_ч - O_1C} \sqrt{R_ч^2 - (O_1C + x)^2} = 2\cdot\int_{O_1C}^{R_ч} \sqrt{R_ч^2 - x^2}$$

Чистовик №3.1

Итого: $S = 2\pi \cdot 200 - 4\int_{5\sqrt{2}/2}^{10\sqrt{2}} \sqrt{200 - x^2}$

$$S = 4\left(100\pi - \int_{5\sqrt{2}/2}^{10\sqrt{2}} \sqrt{200 - x^2}\right)$$

Ответ: $4\left(100\pi - \int_{5\sqrt{2}/2}^{10\sqrt{2}} \sqrt{200 - x^2}\right)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104985**

ID профиля: **876558**

Вариант 22

Чистовик №4:

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 14 \\ НОК(a; b; c) = 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases}$$

$a = 14d$
$b = 14e$
$c = 14f$

$\{d, e; f\} \in \mathbb{N}$
$(d; e; f)$ - взаимно просты

$НОК(d; e; f) = 2^{16} \cdot 7^{17} \Leftrightarrow d \cdot e \cdot f = 2^{16} \cdot 2^{17}$

1) Чтобы числа были взаимно просты, необходимо, чтобы хотя бы одно из них не было кратно „2", а ещё одно (возможно, тоже самое) не было кратно „7". Т.е. все степени „2" и „7" нужно разделить лишь между двумя из них: 18 способов распределить степени „7" (0–17) ($2^8 \cdot 2^8$ дважды) 16 способов распределить степени „2" (0–16)

2) Вариантов же для выбора двух из трёх чисел, чтобы „раздать" им эти степени, 3. Т.е. $3 \cdot 18 = 54$ способа распределить между тремя 7^{17} при условии, что хотя бы одно $\not\vdots\, 7$; и $3 \cdot 16 = 48$ способ сделать это с 2^{16}. Итого:

48 · 54 = 2692

Ответ: 2692 тройки чисел.

Чистовик №5:

$$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\frac{1}{2}\underbrace{\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}_{a}=\frac{1}{2}a$$

$$\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2\right)=4\underbrace{\log_{\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}\left(\frac{3x}{2}-6\right)}_{b}=4b$$

$$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2\log_{\left(\frac{3x}{2}-6\right)}\left(\frac{x}{2}+1\right)=\frac{2}{ab}$$

1) $\frac{1}{2}a=4b \Rightarrow a=8b \Rightarrow 4b-1=\frac{1}{4b^2} \quad | \cdot 4b^2$

$16b^3-4b^2-1=0$

$16b^3-8b^2+4b^2-1=0$

$8b^2(2b-1)+(2b+1)(2b-1)=0$

$(8b^2+2b+1)(2b-1)=0$

$D<0 \Rightarrow b=0{,}5.$

2) $\frac{1}{2}a=\frac{2}{ab} \Rightarrow b=\frac{4}{a^2} \Rightarrow \frac{a}{2}-1=\frac{16}{a^2} \quad | \cdot 2a^2$

$a^3-2a^2-32=0$

$a^3-4a^2+2a^2-32=0$

$a^2(a-4)+2(a^2-16)=0$

$a^2(a-4)+2(a-4)(a+4)=0$

$(a-4)(a^2+2a+8)=0$

$a=4 \Leftarrow D<0$

3) $\cancel{4}^{2}b=\frac{\cancel{2}^{1}}{ab} \Rightarrow a=\frac{1}{2b^2} \Rightarrow 4b-1=\frac{1}{4b^2}$ – см. п. 1.

4) Итого:
$$\left[\begin{array}{l}\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=4\\ \log_{\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}\left(\frac{3x}{2}-6\right)=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{x}{2}+1\right)^4=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}=\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}(x+2)^4=56x-68\\ 14x-17=(3x-12)^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x^2+4x+4)^2=56x-68 \quad (2)\\ 9x^2-72x+144=14x-17 \quad (1)\end{array}\right.$$

Чистовик №5.1:

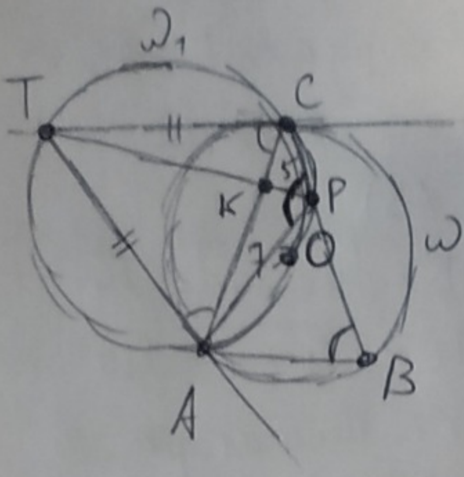
(1) $$9x^2 - 86x + 161 = 0$$

$$(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot \frac{86}{6} + 161 = 0$$

$$\left(3x - \frac{86}{6}\right)^2 = \left(\frac{86}{6}\right)^2 - 161$$

$\dots$

Чистовик №6:



1) $OC \perp CT$ (TC - кас-ная) | $OA \perp TA$ (TA - кас-ная) | $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в TCOA $\angle C + \angle A = 180^\circ \Rightarrow$ TCOA впис. в ω_1; $T \in \omega_1$

2) $AT = TC$ (отр. кас-ных) $\Rightarrow \triangle CAT$ р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle A = \angle C$; $\angle TCA$ и $\angle APT$ - опир. на одну дугу ($\breve{TA}$) | $\Rightarrow$

$\angle TAC$ и $\angle TPC$ - аналогич. ($\breve{TC}$)

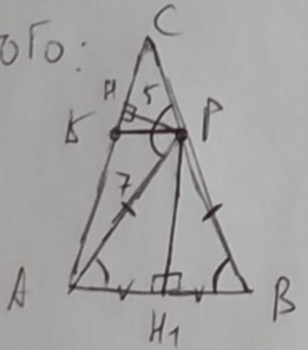
$\Rightarrow$ равны $\Rightarrow$ PK - бис-са $\angle CPA$ ($\angle CPK = \angle APK$)

3) $\angle COA$ и $\angle CPA$ опир. на одну дуги ($\breve{CA}$) $\Rightarrow$ равны.

$\angle COA$ - централ. в ω; $\angle CBA$ опир. на ту же дугу ($\breve{CA}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CBA = \frac{1}{2}\angle COA = \frac{1}{2}\angle CPA \Rightarrow \angle B = \angle CPK = \angle APK$.

4) Итого:



$KP \parallel AB$ ($\angle CPK = \angle PBA$) $\Rightarrow \angle KPA = \angle PAB \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle PAB$ - р/б; $\triangle CKP \sim \triangle ABC$

$$\frac{S(\triangle CKP)}{S(\triangle ABC)} = \left(\frac{CK}{AC}\right)^2$$

5) $S(\triangle CKP) = \frac{PH \cdot CK}{2} = 5$

$S(\triangle APK) = \frac{PH \cdot AK}{2} = 7$

$\frac{CK}{AK} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{CK}{AC} = \frac{5}{12}$

$S(\triangle ABC) = \left(\frac{12}{5}\right)^2 \cdot 5$

$S(\triangle ABC) = 28{,}8$.

6) $S(\triangle PAB) = \frac{PH_1 \cdot AB}{2} = \frac{PA\sin(\angle B)\cdot(PA\cos(\angle B)\cdot 2)}{2} = PA^2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{25}PA^2$ | $\Rightarrow$

$S(\triangle PAB) = S(\triangle ABC) - S(\triangle APC) = 16{,}8$

$\Rightarrow \frac{12}{25}PA^2 = 16{,}8$

Чистовик №6.1!

$PA^2 = 25 \cdot 1{,}4 = 35 \Rightarrow PA = \sqrt{35} \Rightarrow PC = \frac{7}{5}\sqrt{35}$ (PK - бис-са; $\frac{CK}{AK} = \frac{5}{7}$)

7) Тогда по т. косинусовв $\triangle CPA$:

$$AC = \sqrt{PC^2 + AP^2 - 2PC\,AP\cos(2\cdot\angle B)} =$$

$$= \sqrt{\frac{49}{25}\cdot 35 + 35 - 2\cdot\frac{7}{5}\cdot 35\cdot\frac{1{,}4}{5}} = \cancel{\ldots}$$

$$= \sqrt{35\left(\frac{49}{25} + 1 - \frac{14\cdot 1{,}4}{25}\right)} = \frac{1}{5}\sqrt{35(49+25-14\cdot 1{,}4)} = 0{,}8\sqrt{35\cdot 3{,}4} =$$

$$= 0{,}8\sqrt{119}.$$

<u>Ответ</u>: а) 28,8; б) $0{,}8\sqrt{119}$.